非繰り込み定理による
超対称性グラディエントフローの紫外有限性

菊地 健吾

理化学研究所 iTHEMS

“Perturbative analysis of the Wess-Zumino flow”
D. Kadoh, K. Kikuchi, N. Ukita,
Phys. Rev. D 107 (2023) 12, 125015

共同研究者　加堂大輔（同志社大）
　　　　　　浮田尚哉(筑波大)

素粒子物理学の進展2023
＠YITP 2023/08/29

Introduction

グラディエントフロー

対称性を保ちながら、有限量を作る手法

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = - \left.\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi}\right|_{\phi \to \varphi}$$

有限量を作る

・格子ゲージ理論への適用
・カイラル対称性のオーダーパラメタ
・格子上でのエネルギー運動量テンソル
・自発的対称性の破れのオーダーパラメタ
・K.Kikuchi, K.Nishiwaki,K.Oda
Eur.Phys.J.C 83 (2023) 6, 462
・超対称性理論への応用
・K. Kikuchi, T. Onogi, J-HEP11(2014)094
・S. Aoki, K. Kikuchi, T. Onogi,J-HEP02(2018)128
・D. Kadoh, K. Kikuchi, N. Ukita,
Phys. Rev. D100 no.1, (2019) 014501

その他多くの応用、950を超える引用

対称性を保つ

・Bounce解を求める手法

・スファレロン解を求める手法
・Y. Hamada, K. Kikuchi
Phys.Rev.D 101 (2020) 9, 096014

・厳密繰り込み群への応用

本講演 4次元超対称Wess-Zumino模型

"Perturbative analysis of the Wess-Zumino flow"
D. Kadoh, K. Kikuchi, N. Ukita,
Phys. Rev. D 107 (2023) 12, 125015

新しいこと

超対称Wess-Zumino模型において

非ゲージ的相互作用を含むグラディエントフローの有限性をオールオーダーで証明

Key word

・ゲージ対称性が無い理論
・相互作用を含むフロー
・非繰り込み定理
・超場フローファインマンルール
・次数勘定定理

ゲージ相互作用が無いので、オリジナルなグラディエントフローの有限性の証明とは全く異なる

グラディエントフロー

グラディエントフロー方程式 ≒ 拡散方程式

量子力学

エネルギー関数の最急降下法を与える

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial E(q)}{\partial q^i}}$$

$$\frac{dE(q)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(q)}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial E(q)}{\partial q^i})^2 \leq 0$$

場の理論

$\varphi(t,x)$:フロー場　t :フロー時間　$S[\phi]$:作用

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\left.\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi}\right|_{\phi\to\varphi}$$

グラディエントフロー方程式

$$\varphi(t=0,x) = \phi(x)$$

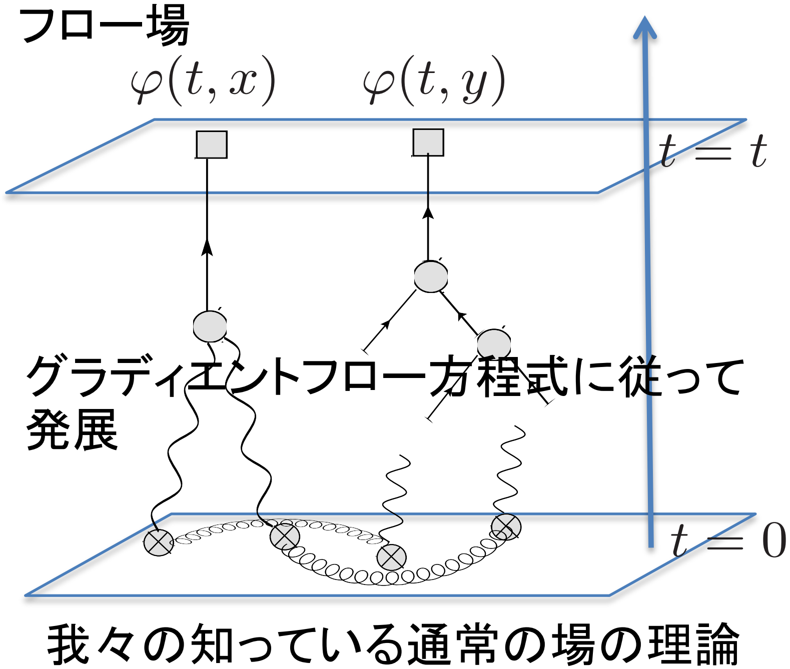
境界条件

紫外有限性

紫外有限性

ゲージ理論において、フロー場で書かれた任意の相関関数は、追加の繰り込み無しに、全次数で有限になる。

$$\langle \varphi(t_1, x_1)\varphi(t_2, x_2)\ldots\rangle = \text{finite}$$



・追加の繰り込み（複合演算子繰り込み等）は必要ない
・裸の量から有限量を作る手法

ゲージ理論に対する発散を抑える新しい手法

この有限性の証明は **ゲージ対称性** に依存している

ϕ^4理論

ゲージ対称性が無い理論は一般には紫外有限性は持たない

simpleな例：ϕ^4理論

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right\}(x)$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = (\Box - m^2)\varphi(t,x) - \lambda \varphi^3(t,x)$$

$$\varphi(t=0,x) = \phi(x)$$

m : bare mass
λ : bare coupling

フロー場の相関関数 $\left\{\begin{array}{l}\text{・GFの逐次解} \\ \text{・境界での摂動論}\end{array}\right.$ を必要な次数まで計算

・massless free フロー (m=0, λ=0) の場合、有限にするためにはフロー場の波動関数繰り込みが必要
・massive もしくは相互作用を含むフローの場合、紫外有限性を持たない

4+1次元理論

GF方程式と4次元理論を等価な5次元理論に拡張

4+1次元作用

$$S_{\mathrm{tot}} = S + S_{\mathrm{bulk}}$$

$$S_{\mathrm{bulk}} = \int_0^\infty dt \int d^4x L(t,x) \Big\{ \partial_t \varphi(t,x) - (\Box - m^2)\varphi(t,x) + \lambda \varphi^3(t,x) \Big\}$$

$L(t,x)$: Lagrange multiplier field

通常の繰り込み

$$m^2 = Z_\varphi^{-1}\left(m_r^2 + \underline{\delta_m}\right) \qquad \lambda = Z_\varphi^{-2}\left(\lambda_r + \underline{\delta_\lambda}\right)$$

mやλの通常の繰り込みから来るbulkカウンター項があり、そこからillnessな発散が生まれる → 4+1次元の意味で繰り込み不可能な理論になっている

紫外有限性を持つためには、ゲージ対称性、もしくは何らかの他の対称性が必要

⇒ **超対称性**

Wess-Zumino模型

ϕ⁴理論の超対称的拡張

$$S = -\int d^8 z\, \bar{\Phi}(z)\Phi(z) - \int d^4 x d^2\theta W(\Phi(z)) - \int d^4 x d^2\bar{\theta} W(\bar{\Phi}(z))$$

$$W(\Phi) \equiv \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3$$

$\Phi(z)$: カイラル超場
$\bar{\Phi}(z)$: 反カイラル超場
$z = (x, \theta, \bar{\theta})$

繰り込み

$$\Phi_r = Z^{-\frac{1}{2}}\Phi \qquad \delta_m = mZ - m_r$$

$$\bar{\Phi}_r = Z^{-\frac{1}{2}}\bar{\Phi} \qquad \delta_g = gZ^{\frac{3}{2}} - g_r$$

非繰り込み定理

$$m_r = mZ$$

$$g_r = gZ^{\frac{3}{2}}$$

繰り込み不変なmass

$$M \equiv mg^{-\frac{2}{3}} = m_r g_r^{-\frac{2}{3}}$$

Wess-Zuminoフローの構成法

変数変換

$$x'_\mu \equiv g^{\frac{2}{3}} x_\mu, \quad \theta' \equiv g^{\frac{1}{3}}\theta, \quad \bar{\theta}' \equiv g^{\frac{1}{3}}\bar{\theta} \qquad \Xi(x',\theta',\bar{\theta}') \equiv g^{\frac{1}{3}}\Phi(x,\theta,\bar{\theta})$$

GFを作るための作用

$$S = -\frac{1}{g^2}\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}\bar{\Xi}\Xi - \frac{1}{g^2}\int d^4x d^2\theta \underline{\left(\frac{1}{2}M\Xi^2 + \frac{1}{3}\Xi^3\right)}$$
$$- \frac{1}{g^2}\int d^4x d^2\bar{\theta} \underline{\left(\frac{1}{2}M\bar{\Xi}^2 + \frac{1}{3}\bar{\Xi}^3\right)}$$

繰り込み不変

$$\partial_t \Psi(t,z) = g^2 \frac{\bar{D}^2}{4} \frac{\delta S}{\delta\bar{\Xi}(z)}\bigg|_{\Xi(z),\bar{\Xi}(z)\to\Psi(t,z),\bar{\Psi}(t,z)}$$

- 右辺の超対称共変微分はカイラル超場であることを保つために必要
- 超対称性は変数変換後のプライム系でも成り立つ（対称性を保っている）

Wess-Zuminoフロー

Wess-Zuminoフロー

$$\partial_t \Psi = \Box\Psi - M\frac{\bar{D}^2}{4}\bar{\Psi} - \frac{\bar{D}^2}{4}\bar{\Psi}^2$$

$$\partial_t \bar{\Psi} = \Box\bar{\Psi} - M\frac{D^2}{4}\Psi - \frac{D^2}{4}\Psi^2$$

境界条件

$$\Psi(t=0,z) = g^{\frac{1}{3}}\Phi(z) = \underline{g_r^{\frac{1}{3}}\Phi_r(z)}$$

$$\bar{\Psi}(t=0,z) = g^{\frac{1}{3}}\bar{\Phi}(z) = \underline{g_r^{\frac{1}{3}}\bar{\Phi}_r(z)}$$

- 変数変換によりフロー方程式は繰り込み不変なカップリングのみを含む形で書ける
- 適切な初期条件を選ぶことで、非繰り込み定理を使って繰り込み不変な初期条件をとれる

Freeフローの紫外有限性

Free フロー（境界は相互作用あり）

Wess-Zuminoフロー

$$\partial_t \Psi(t,z) = \Box \Psi(t,z)$$
$$\partial_t \bar{\Psi}(t,z) = \Box \bar{\Psi}(t,z)$$

境界条件

$$\Psi(t=0,z) = g^{\frac{1}{3}} \Phi(z) = \underline{g_r^{\frac{1}{3}} \Phi_r(z)}$$
$$\bar{\Psi}(t=0,z) = g^{\frac{1}{3}} \bar{\Phi}(z) = \underline{g_r^{\frac{1}{3}} \bar{\Phi}_r(z)}$$

$$\langle \Psi(t_1,\tilde{z}_1)\Psi(t_2,\tilde{z}_2)\cdots\rangle = e^{-(t_1 p_1^2 + t_2 p_2^2 + \cdots)} \langle \Psi(0,\tilde{z}_1)\Psi(0,\tilde{z}_2)\cdots\rangle$$
$$= e^{-(t_1 p_1^2 + t_2 p_2^2 + \cdots)} \underbrace{g_r^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots} \langle \Psi_r(\tilde{z}_1)\Psi_r(\tilde{z}_2)\cdots\rangle}_{\text{有限}}$$

Freeフローは厳密に解けて、非繰り込み定理のおかげで紫外有限になる（波動関数繰り込みも必要ない）

相互作用を含むフローの紫外有限性

相互作用を含むフロー

境界上での摂動展開の super Feynmanグラフ

$+$

Wess-Zuminoフローの逐次解のtreeグラフ

次数勘定定理

$$d = 2 - C - C_f - E - 3E_f$$

d : superficial degrees of divergence

C : chiral field propagator

C_f : chiral flip flow propagator

E : External field line

E_f : External flow line

- $E_f>0$、すなわちflow vertexを含むダイアグラムはd<0で発散がでない
- $E_f=0$のときはFreeの時の議論に落ちて、発散がでない

・Wess-Zuminoフローは摂動の全次数で紫外有限である
・オリジナルなGFとは全く異なるメカニズムで有限になっている
（ゲージ対称性ではなく超対称性）

Yang-Mills Flow vs Wess-Zumino Flow

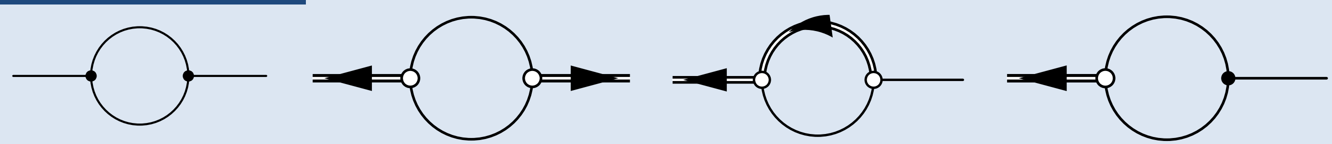
Yang-Mills $\quad D = 4 - E$

Wess-Zumino $\quad D = 2 - C - E$

Yang-Mills Flow $\quad D = 4 - E - 3E_f$

Wess-Zumino Flow $\quad D = 2 - C - C_f - E - 3E_f$

代表的なダイアグラム ($C=C_f=0$)



	$E=2,\ E_f=0$	$E=0,\ E_f=2$	$E=1,\ E_f=1$	$E=1,\ E_f=1$
Yang-Mills Flow	D=2	D=-2	D=0	D=0
Wess-Zumino Flow	D=0	D=-4	D=-2	D=-2

Summary and Discussion

超対称Wess-Zuminoフロー理論

超対称性がもつ非繰り込み定理により、適切な初期条件が存在し、その下でフロー場の相関関数は有限になることを次数勘定定理を用いて全次数で示した

・非繰り込み定理により、
i) 繰り込み不変なカップリングだけでフロー方程式を与えることができる
ii) 適切な初期条件を与えることができる

・ゲージ相互作用でない相互作用を持つフロー理論が有限である例
・フロー場の波動関数繰り込みも要らない
・ゲージ対称性ではなく超対称性が有限性を保証している。その意味で、オリジナルなYang-Mills Flowとは全く異なるメカニズムにより有限になっている。

今後の発展
・超対称性理論、重力の量子化（超弦理論）への数値的アプローチ
・拡張されたNが高い超対称性理論における議論
・超対称性の破れや、自発的対称性の破れのオーダーパラメータとしての利用
・フロー場そのものの物理的意味
・超対称厳密繰り込み群への応用