

ハミルトニアン形式のゲージ理論における ハドロン質量スペクトルの数値計算

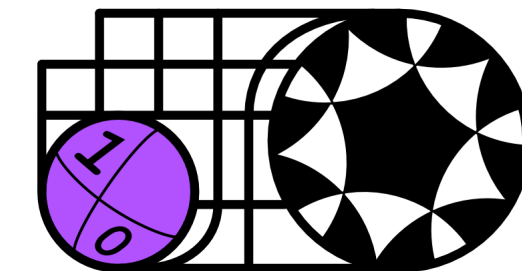
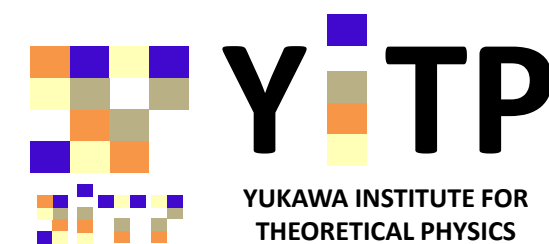
松本 祥 (YITP, Kyoto U, RIKEN iTHEMS)

collaboration with

伊藤 悦子 (YITP, Kyoto U, RIKEN iTHEMS) and 谷崎 佑弥 (YITP, Kyoto U)

[arXiv:2307.16655](https://arxiv.org/abs/2307.16655)

素粒子物理学の進展2023, 31 August 2023 @YITP

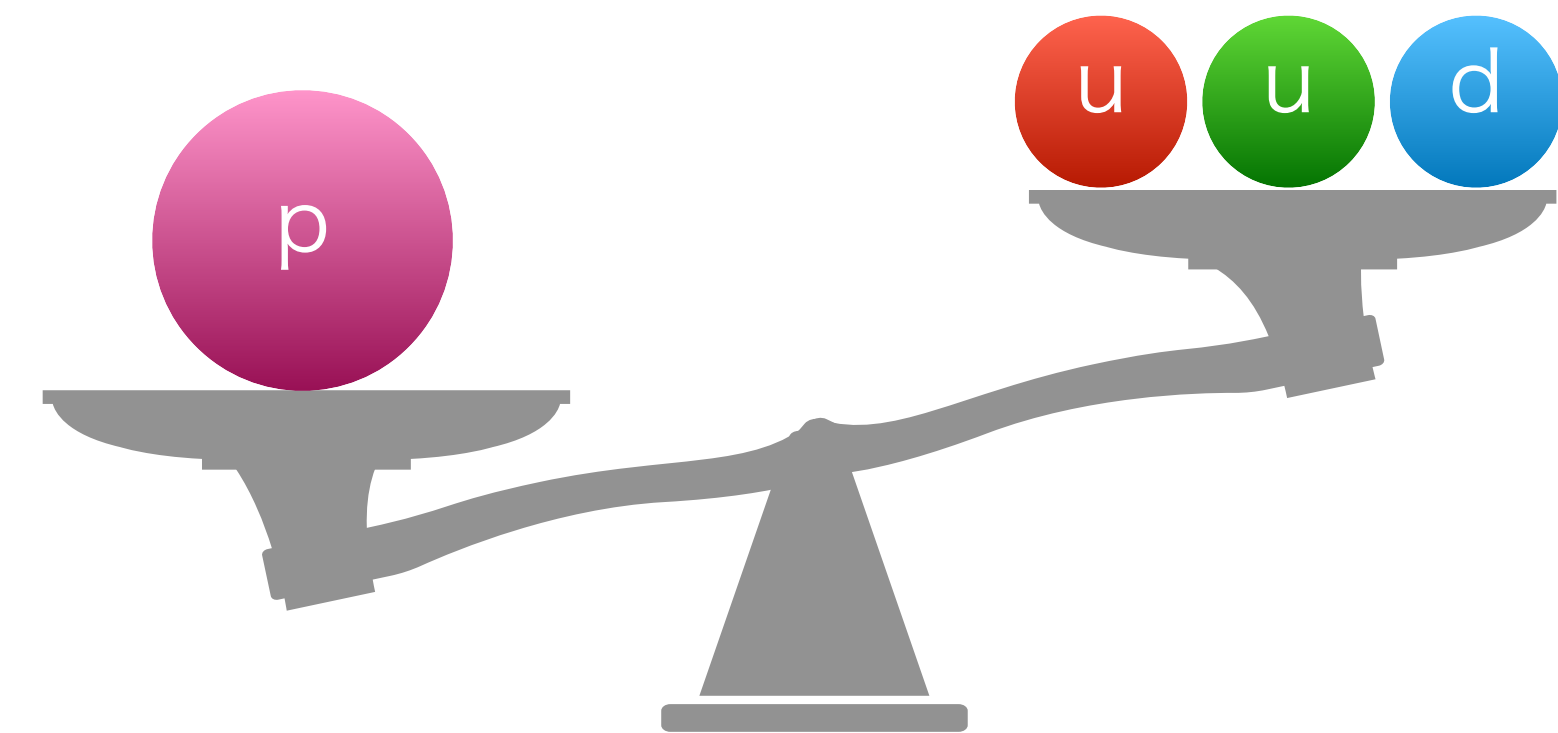


複合粒子の質量スペクトル

- QCDにおける複合粒子(ハドロン)の質量

u/d クォーク : 2~5 MeV

陽子 (uud) : 938 MeV \gg $2m_u + m_d$

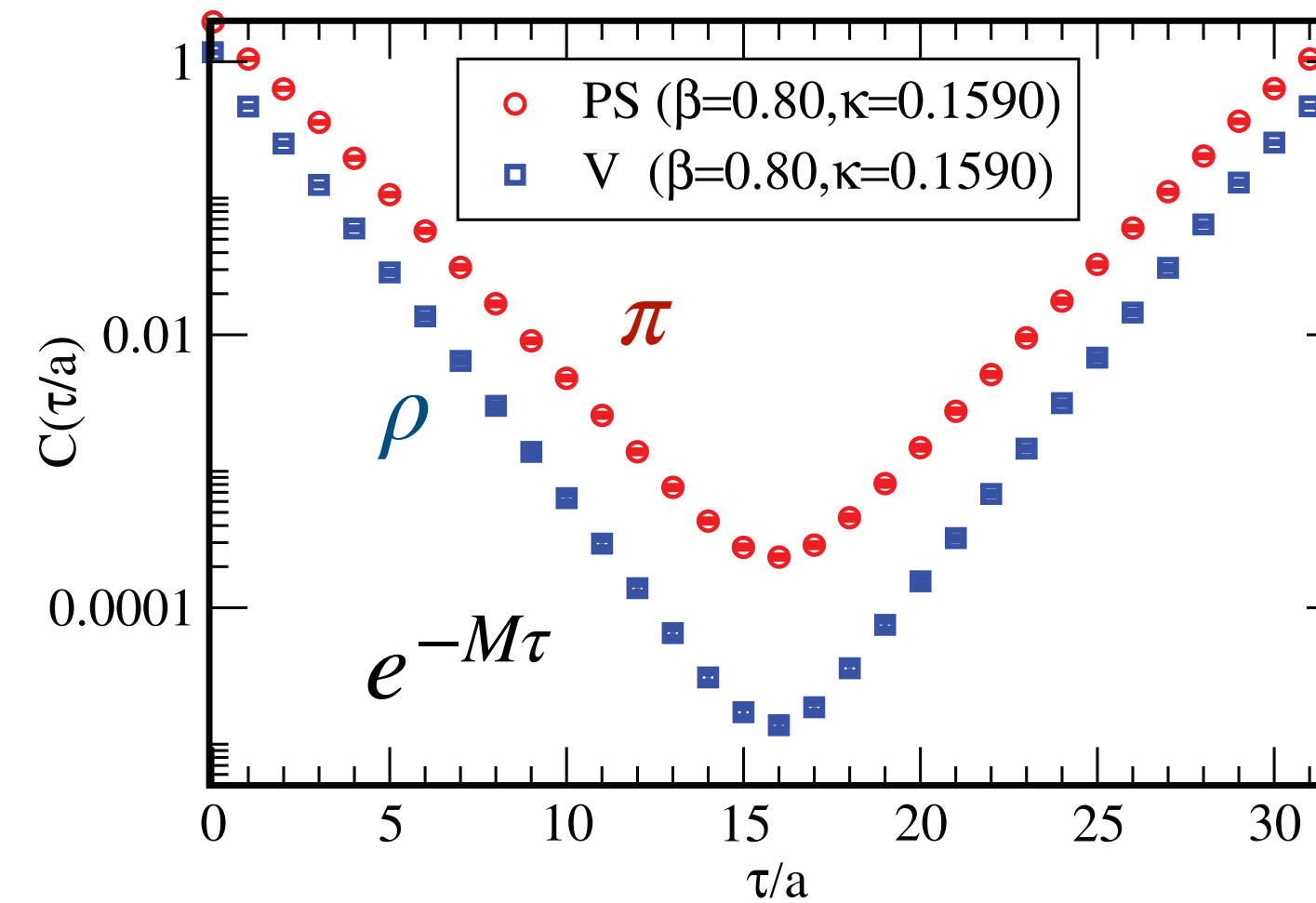


- lattice Monte Carlo simulation

による非摂動計算

(ラグランジアン形式)

- ハドロン質量は
虚時間相関関数から計算
→ 実験値を再現



[Iida et al. (2021)]

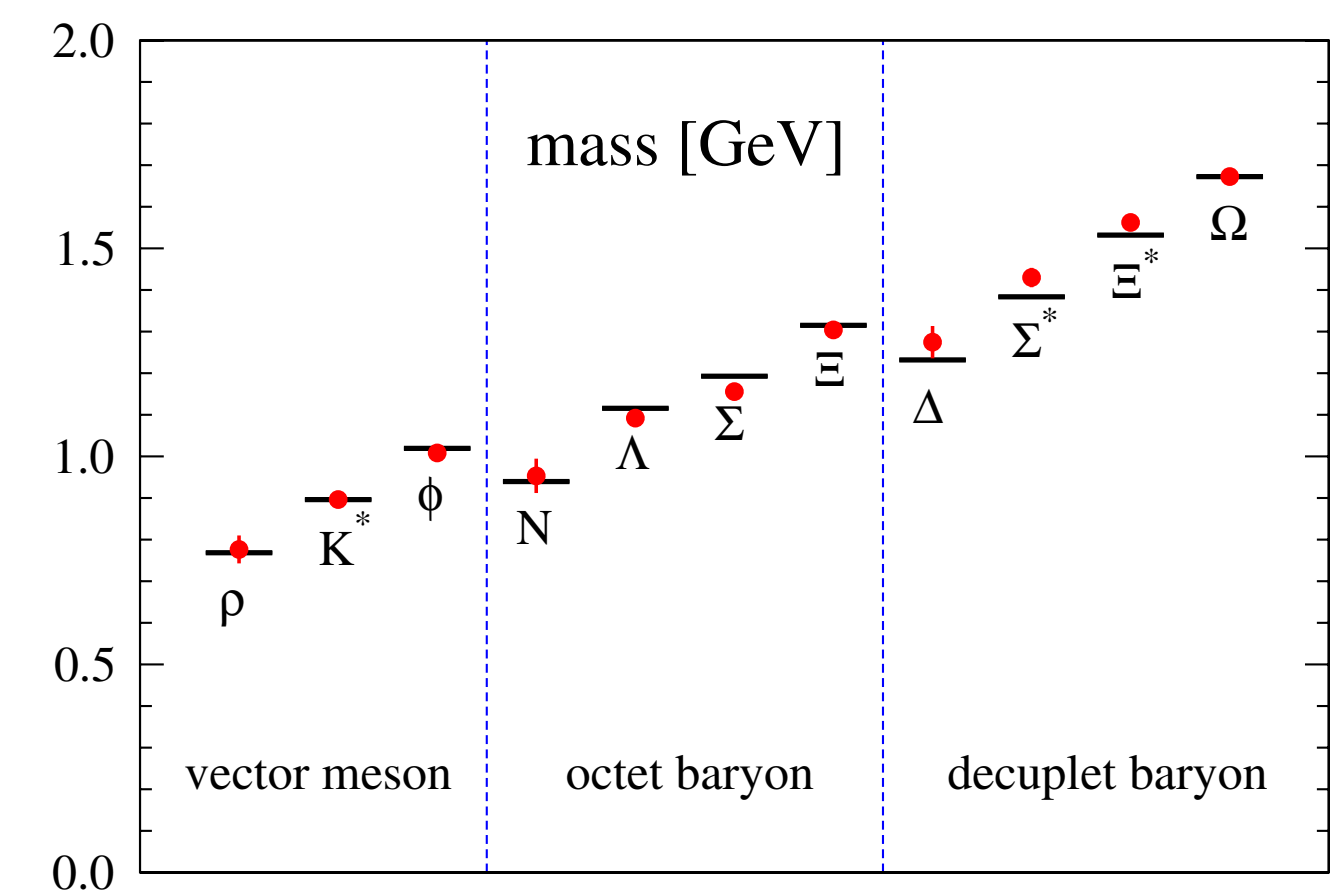


FIG. 24 (color online). Light hadron spectrum extrapolated to the physical point using m_π , m_K and m_Ω as input. Horizontal bars denote the experimental values.

[PACS-CS collab. (2009)]

ハミルトニアン形式におけるQFTの数値計算

- 指数関数的に大きなヒルベルト空間の数値的な取り扱い
- テンソルネットワークや量子計算の発展

👍 符号問題がない

👍 励起状態の直接的な取得

cf.) 量子計算

@本田 正純さんのトーク (8/29)

- 場の理論への新たな非摂動的アプローチ (有限密度QCD, θ 項, 実時間発展, ...)

本研究の目的

ハミルトニアン形式において複合粒子(ハドロン)の質量スペクトルの計算する

cf.) ラグランジアン形式のテンソルネットワーク

@Zahra Fathiyya Izzatun Azさんのポスター (8/30)

Schwinger模型への適用

Schwinger模型 (QED_{1+1d})

- 簡単ながら非自明なゲージ理論であり、QCDと似た性質を持つ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \left[i\bar{\psi}_f \gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \psi_f - m\bar{\psi}_f \psi_f \right]$$

Nf=1

- 先行研究: chiral condensate, $q\bar{q}$ potential, mass spectrum, ...

[Chakraborty et al. (2022)]

[Honda et al. (2022)]

[Banuls et al. (2013)]

Nf=2

- QCDのanalogyとしての“ハドロソ” → good testing ground

2-flavor Schwinger模型の複合粒子

3つの“メソン”

$$\pi = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2) : J^{PG} = 1^{-+}$$

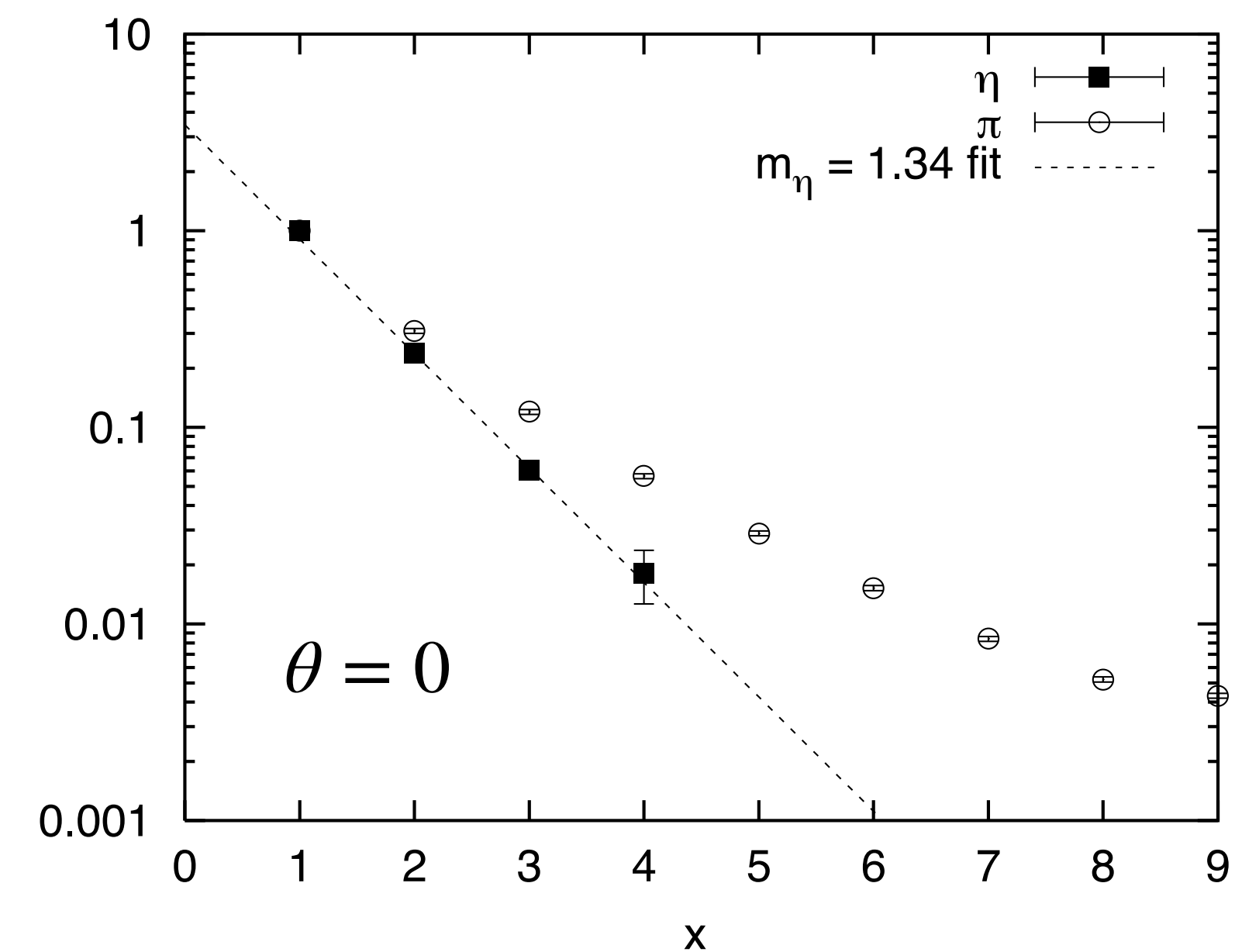
$$\eta = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2) : J^{PG} = 0^{--}$$

$$\sigma = \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2 : J^{PG} = 0^{++}$$

量子数

- isospin J : flavor doubletに作用するSU(2)対称性
- parity P
- G-parity $G = Ce^{i\pi J_y}$ (C の一般化)

Monte Carlo法による先行研究



[Fukaya & Onogi (2003)]

u/d クォークを含むQCDのtoy model

Short summary

- 複合粒子の質量スペクトルの計算方法
 - (1) correlation-function scheme — MC計算でも用いられる一般的手法
 - (2) one-point-function scheme — boundary effectを有効活用
 - (3) dispersion-relation scheme — 励起状態を直接取得する
- テンソルネットワーク(DMRG)を用いて、2-flavor Schwinger模型で検証
- 3つの方法による結果は互いに無矛盾

Calculation strategy

- 格子上のハミルトニアン (staggered fermion + open boundary)

$$H = \frac{g^2 a}{2} \sum_{n=0}^{N-2} \left(L_n + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 + \sum_{f=1}^{N_f} \left[\frac{-i}{2a} \sum_{n=0}^{N-2} \left(\chi_{f,n}^\dagger U_n \chi_{f,n+1} - \chi_{f,n+1}^\dagger U_n^\dagger \chi_{f,n} \right) + m_{\text{lat}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \chi_{f,n}^\dagger \chi_{f,n} \right]$$

- Gauss lawを解きゲージ場 L_n を消去

[Kogut & Susskind (1975)]

[Dempsey et al. (2022)]

- ゲージ固定 $U_n = 1$

- Jordan-Wigner変換 for $N_f=2$

$$\chi_{1,n} = \sigma_{1,n}^- \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z), \quad \chi_{2,n} = \sigma_{2,n}^- (-i\sigma_{1,n}^z) \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z)$$

→ 有限次元のヒルベルト空間を持つスピン系のハミルトニアン

行列積状態による近似

行列積状態 (MPS)

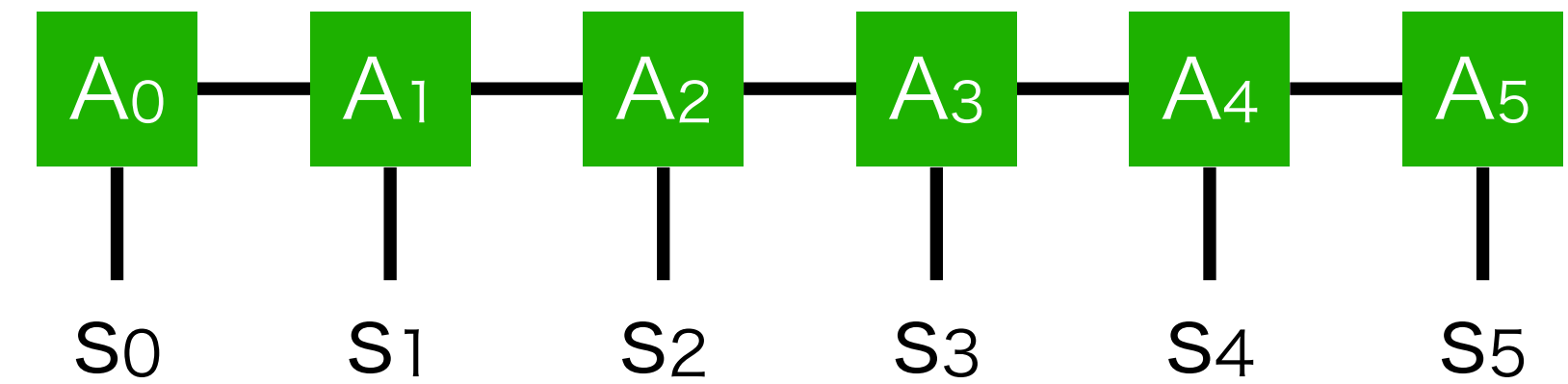
$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr} [A_0(s_0) A_1(s_1) \cdots] |s_0 s_1 \cdots\rangle$$

- $A_i(s_i)$: spin index $s_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ を持つ $D_{i-1} \times D_i$ 行列 (D_i : bond次元)
- 任意の状態は特異値分解を繰り返すことでMPSで表せるが、一般には $D_i = O(2^{N/2})$

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \Psi(s_0, s_1, \cdots) |s_0 s_1 \cdots\rangle = \begin{array}{c} \text{---} \psi \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \square \text{---} \square \text{---} \square \text{---} \square \text{---} \square \text{---} \square \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array}$$

- gappedな系では、 $D_i \leq \text{const.}$ でcutoffしても任意の N で良い近似 \rightarrow 計算量 = $O(ND^3)$

例) spin-1/2, N=6サイト



密度行列繰り込み群 (DMRG)

[White (1992)] [Schollwock (2005)]

MPSをansatzとして H の固有状態を変分法により求める

- コスト関数：エネルギー $E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$
- E が減少するように $A_i(s_i)$ をupdate
- MPS近似の精度を決める cutoff parameter ε を導入
特異値分解において、 ε より小さい特異値は無視
→ ε を小さくすると精度は上がるが D_i が大きくなる

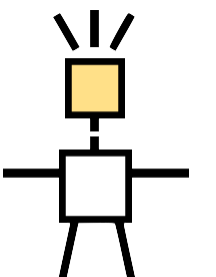
$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr} [A_0(s_0) A_1(s_1) \cdots] |s_0 s_1 \cdots\rangle$$

$A_i(s_i) : D_{i-1} \times D_i$ 行列

$D_i : \text{bond次元}$

- 第 ℓ 励起状態 $|\Psi_\ell\rangle \rightarrow$ コスト関数：
$$\langle \Psi_\ell | H | \Psi_\ell \rangle + W \sum_{\ell'=0}^{\ell-1} \left| \langle \Psi_{\ell'} | \Psi_\ell \rangle \right|^2$$

本研究の計算には、ITensorのC++ libraryを用いた [Fishman et al. (2022)]



数値計算の結果

1. Correlation-function scheme
2. One-point-function scheme
3. Dispersion-relation scheme

数値計算の結果

1. Correlation-function scheme

2. One-point-function scheme

3. Dispersion-relation scheme

(1) Correlation-function scheme

• 空間2点相関関数： $C_\pi(r) = \langle \pi(x)\pi(y) \rangle$

• 有効質量： $M_{\pi,\text{eff}}(r) = -\frac{d}{dr} \log C_\pi(r), \quad r = |x - y|$

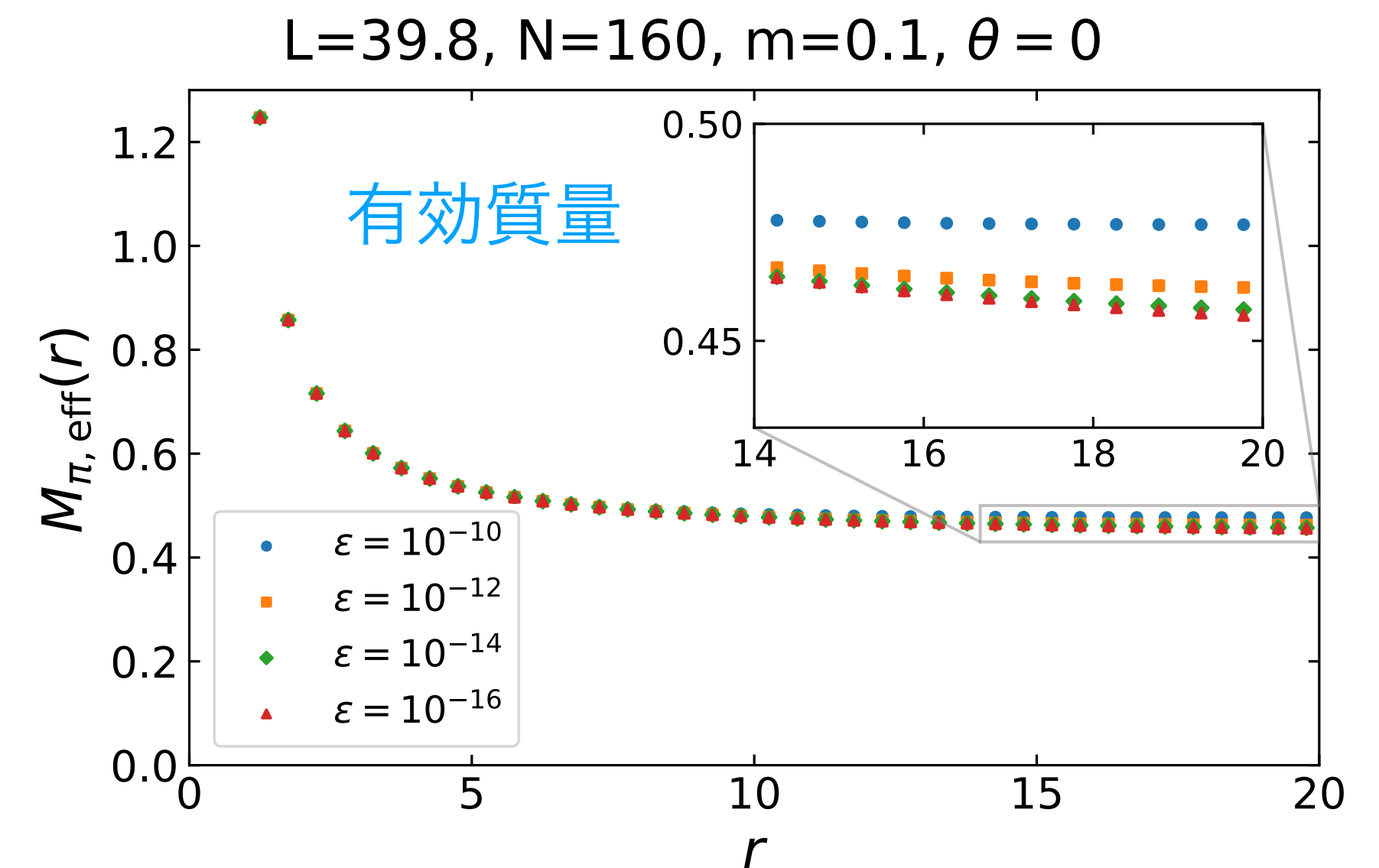
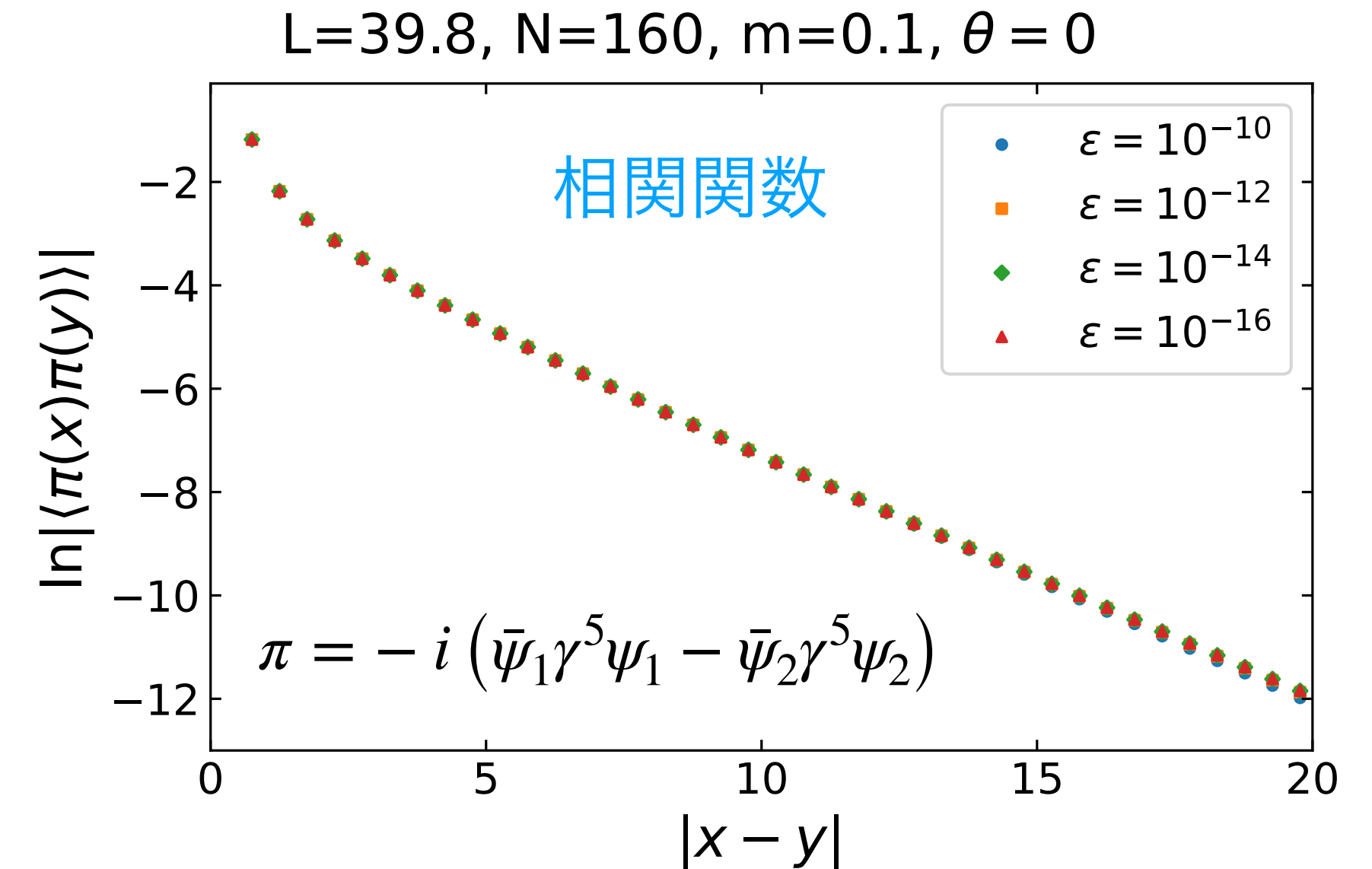
プラトーの値 = pionの質量?

⚠ 近似の精度を上げると長距離での振る舞いに変化

$\varepsilon = 10^{-10}$ ($D_i \sim 400$) : $M_{\pi,\text{eff}}(r)$ は平坦

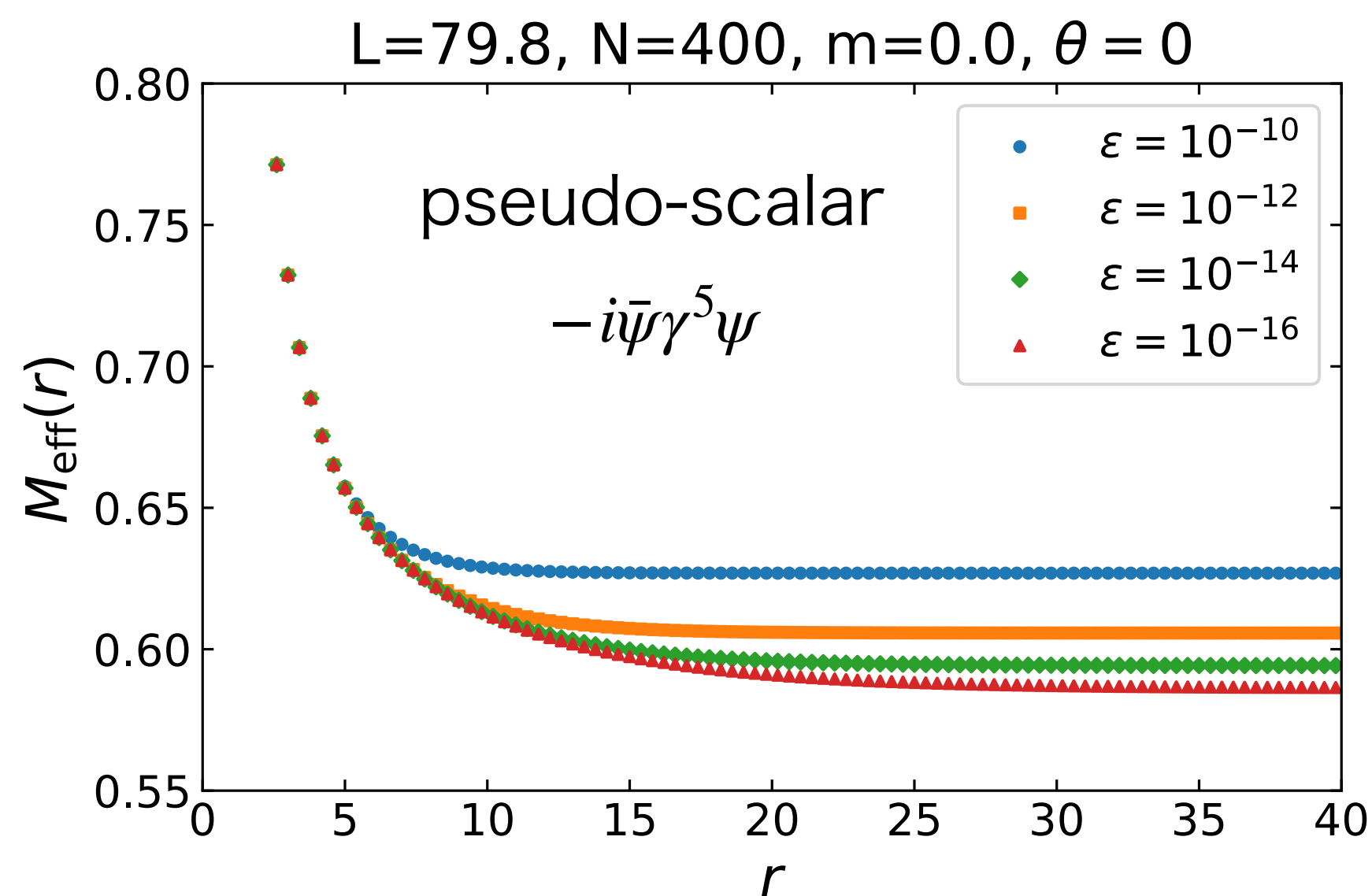
$\varepsilon = 10^{-16}$ ($D_i \sim 2800$) : $M_{\pi,\text{eff}}(r)$ の r 依存性が見える

• What's happened?

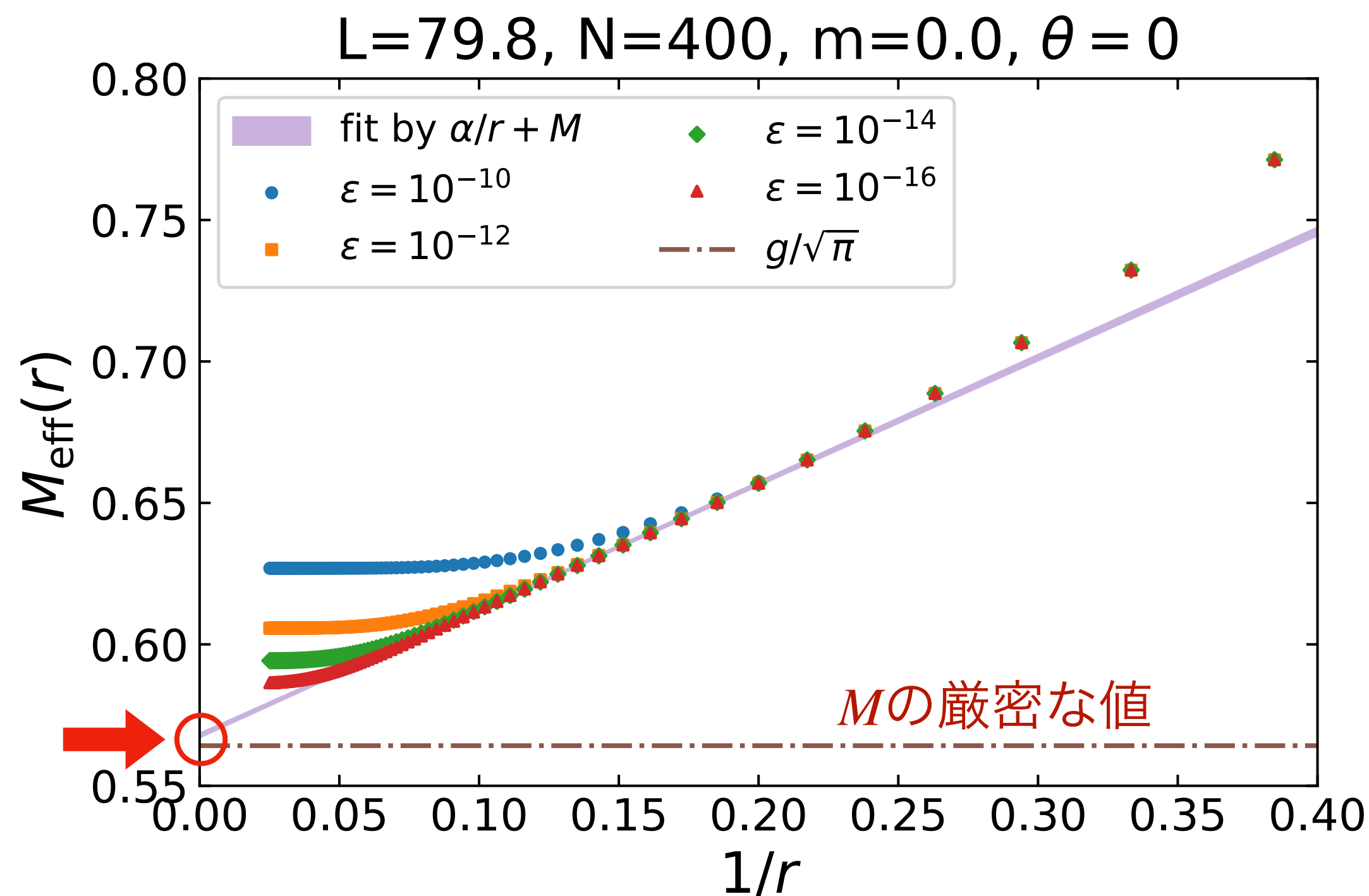


Nf=1の場合での検証

- (1+1)d 質量 M の自由粒子 : $\langle \phi(x,t)\phi(y,t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{Mr}} e^{-Mr} \rightarrow M_{\text{eff}}(r) \sim \frac{\alpha}{r} + M$
- massless Nf=1 Schwinger模型 (厳密に解ける)



→
 $\frac{1}{r}$ に対してplot



- MPSで $1/r$ 補正を再現するのは難しい
- $1/r \rightarrow 0$ の外挿が必要

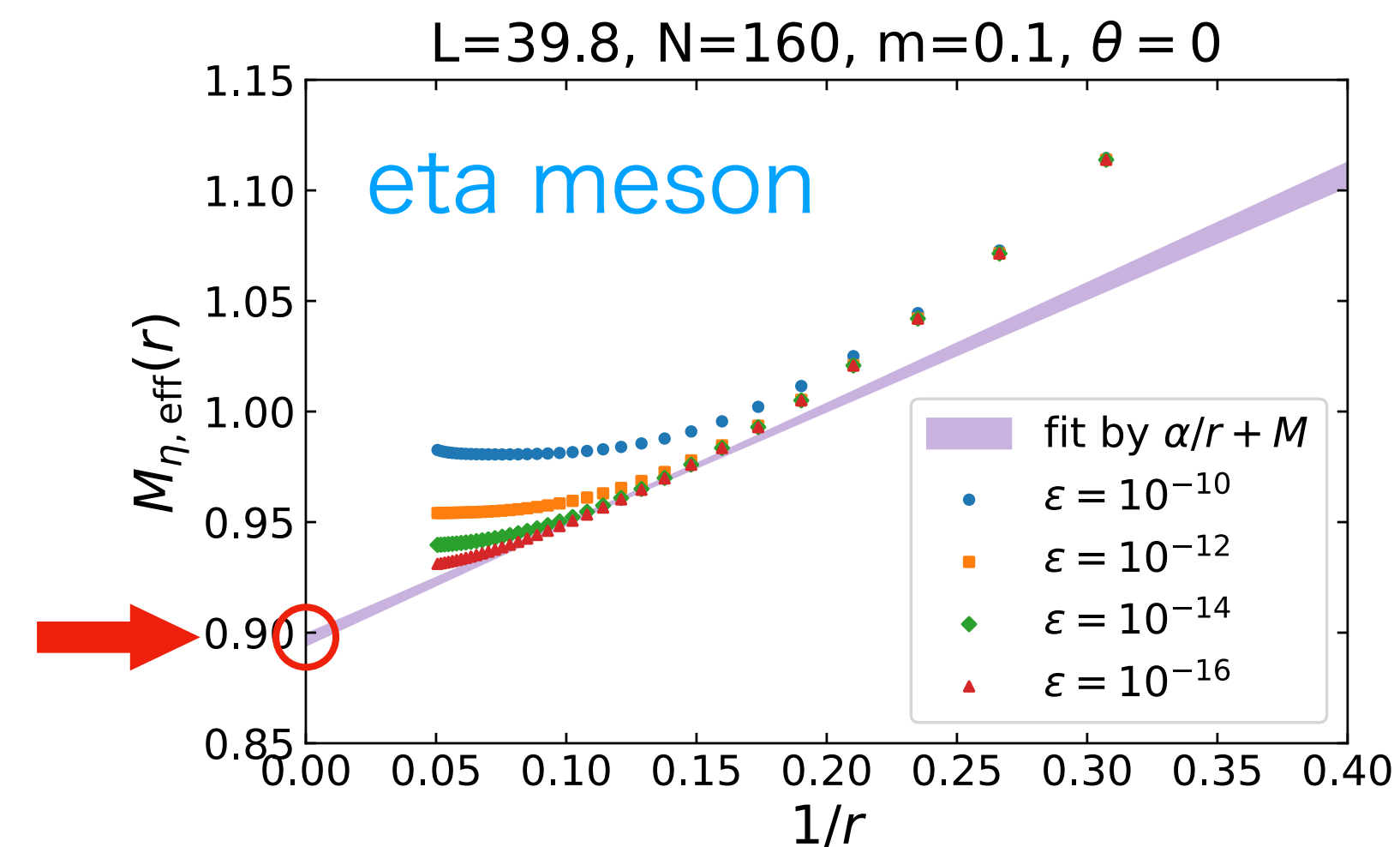
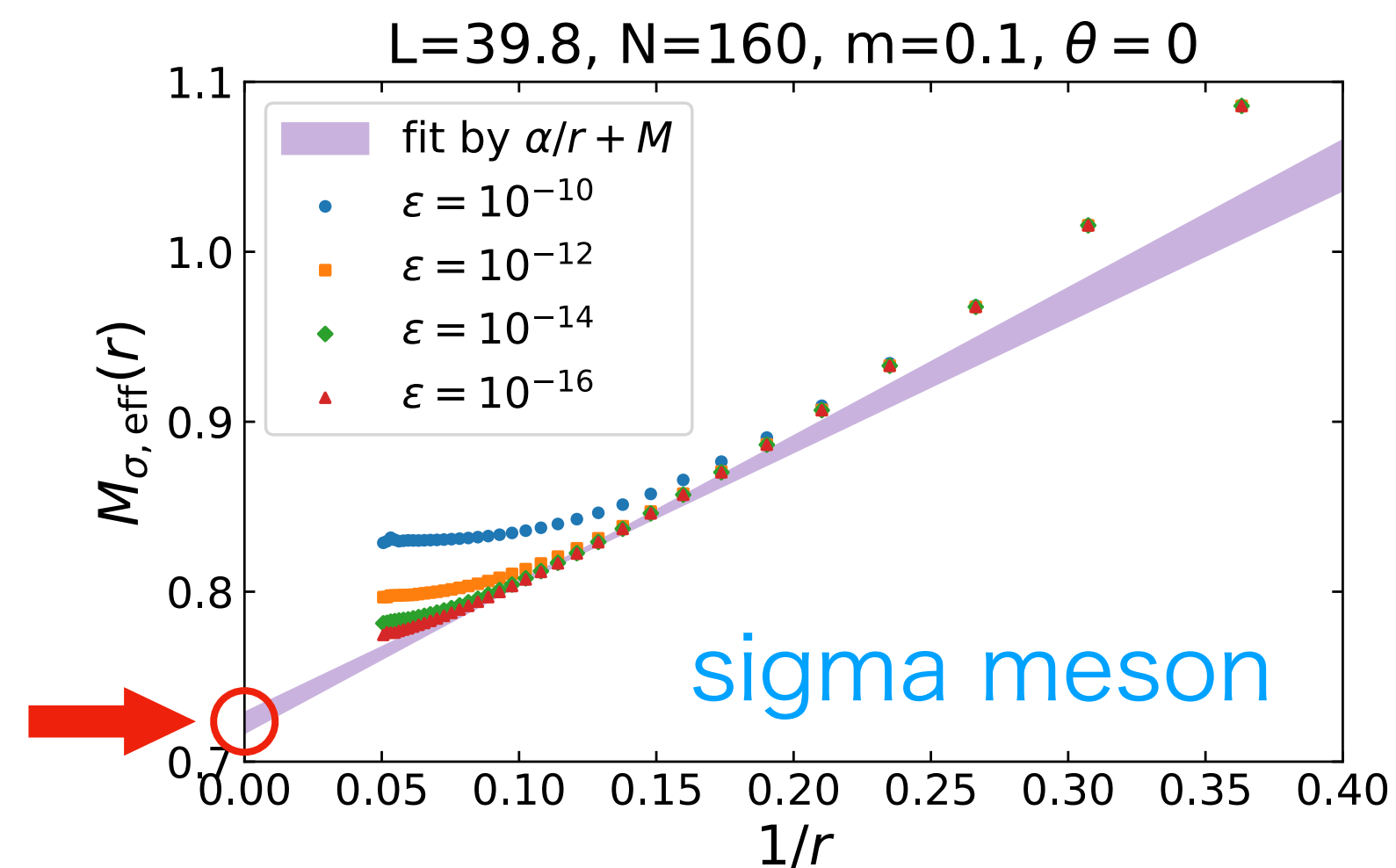
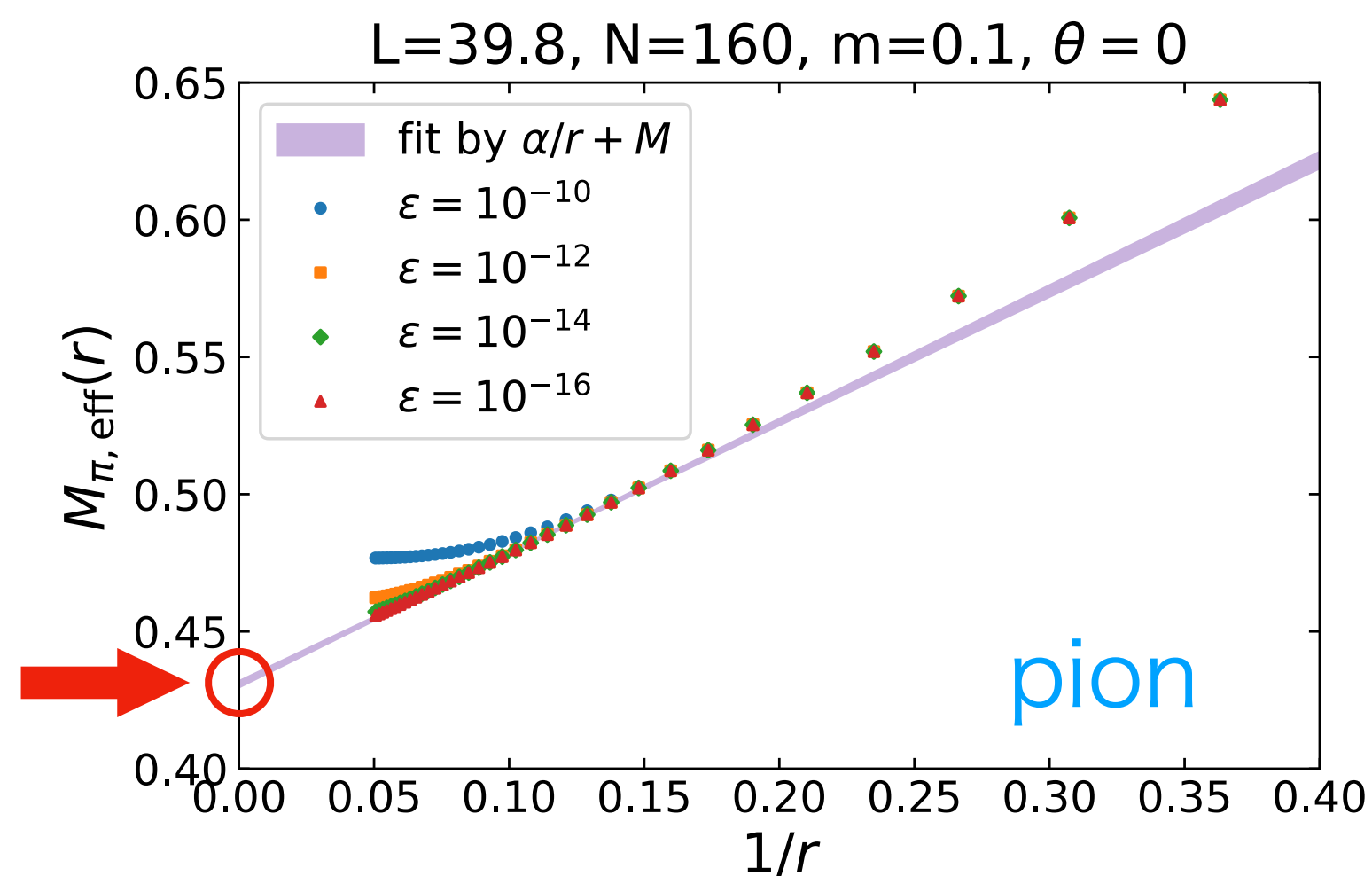
Nf=2での結果

$\varepsilon = 10^{-16}$ のデータを用いて、有効質量を $1/r \rightarrow 0$ に外挿

$$\pi = -i (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma^5 \psi_2)$$

$$\sigma = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2$$

$$\eta = -i (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^5 \psi_2)$$



	pion	sigma	eta
M	0.431(1)	0.722(6)	0.899(2)
α	0.477(9)	0.83(5)	0.51(2)

数値計算の結果

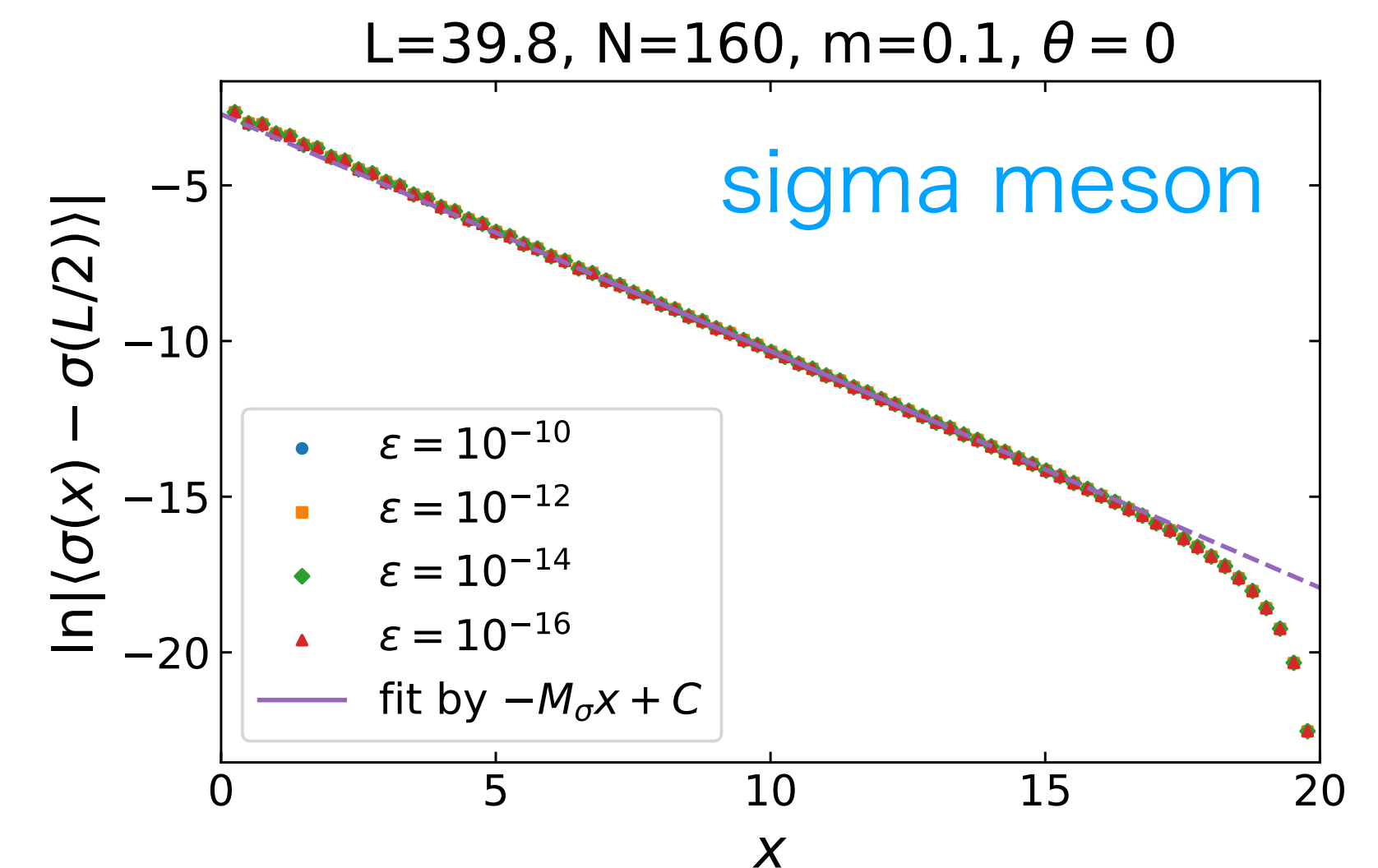
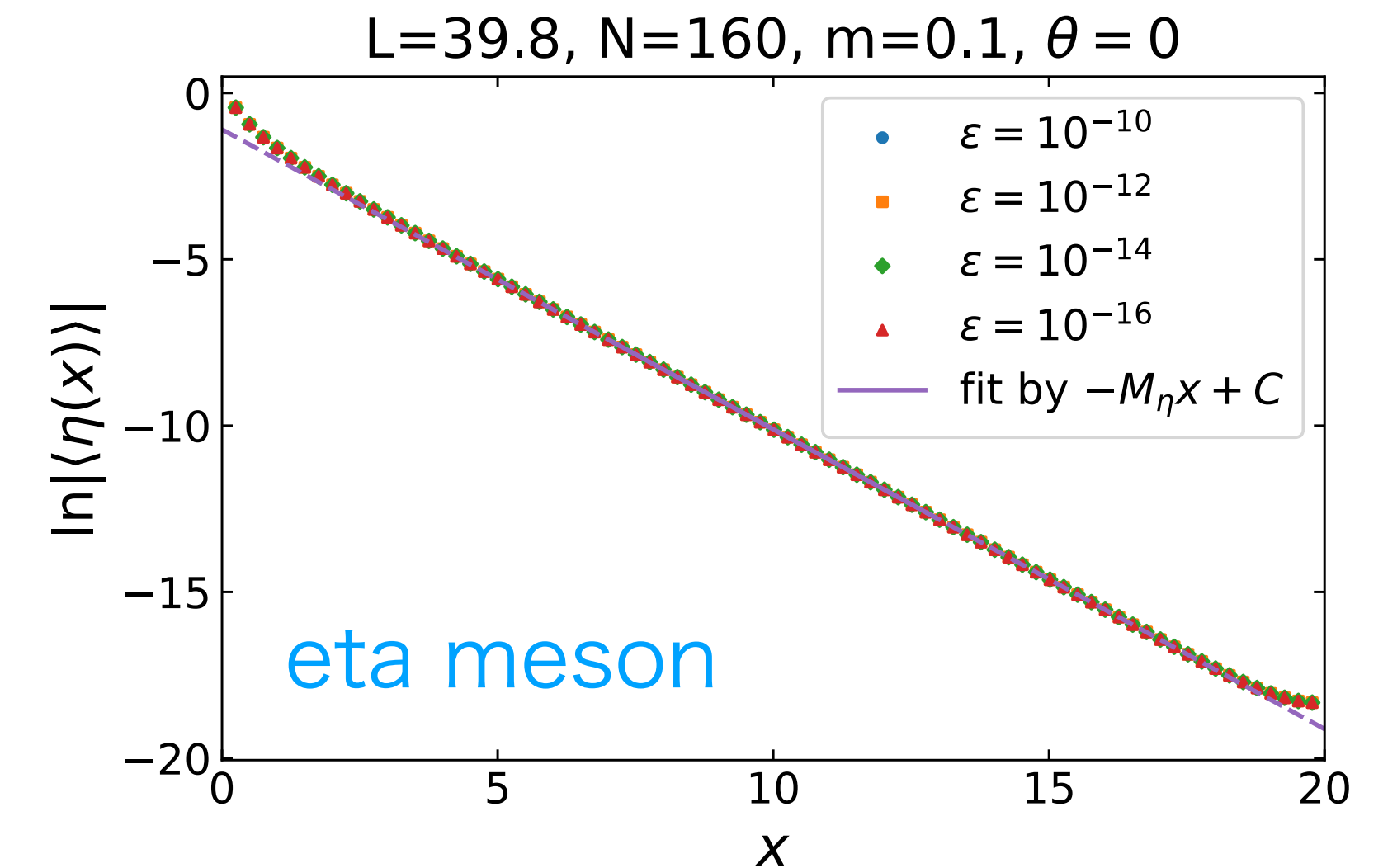
1. Correlation-function scheme
- 2. One-point-function scheme**
3. Dispersion-relation scheme

(2) one-point-fn. scheme (eta & sigma)

- $\theta = 0$ では、open boundary が iso-singlet state の source となる
- 1点関数 $\langle \mathcal{O}(x) \rangle \sim e^{-Mx+C}$
 x : boundaryからの距離
- ε 依存性は見られない
→ 特異値の切り捨てによる
系統誤差は十分小さい

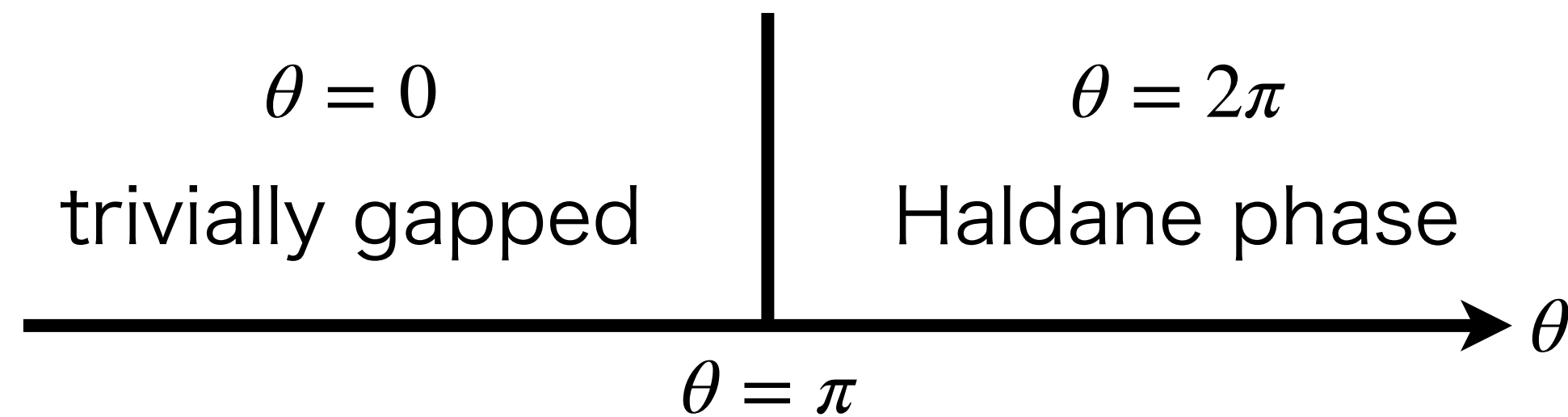
fittingの結果

- eta: $M = 0.9014(1)$, $C = -1.096(1)$
- sigma: $M = 0.761(2)$, $C = -2.71(2)$



(2) pion: tricky case

⚠ $\theta = 0$ (trivially gapped phase) では常に $\langle \pi(x) \rangle = 0$

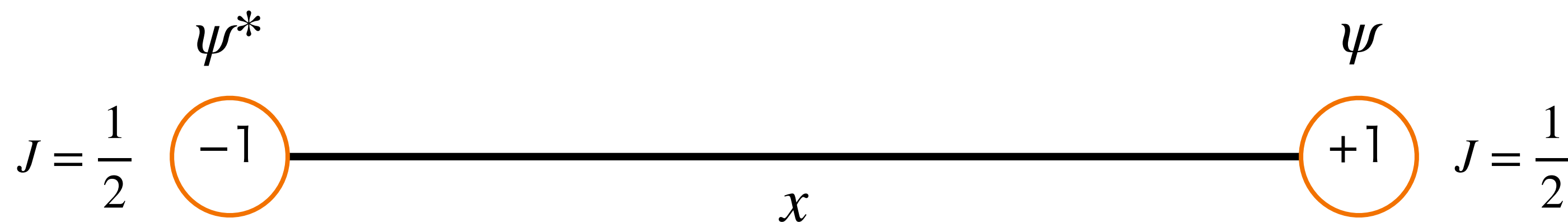


cf.) 反強磁性 Heisenberg chain
と同様のSPT的性質

[Chen et al. (2011)]
[Kapustin (2014)]

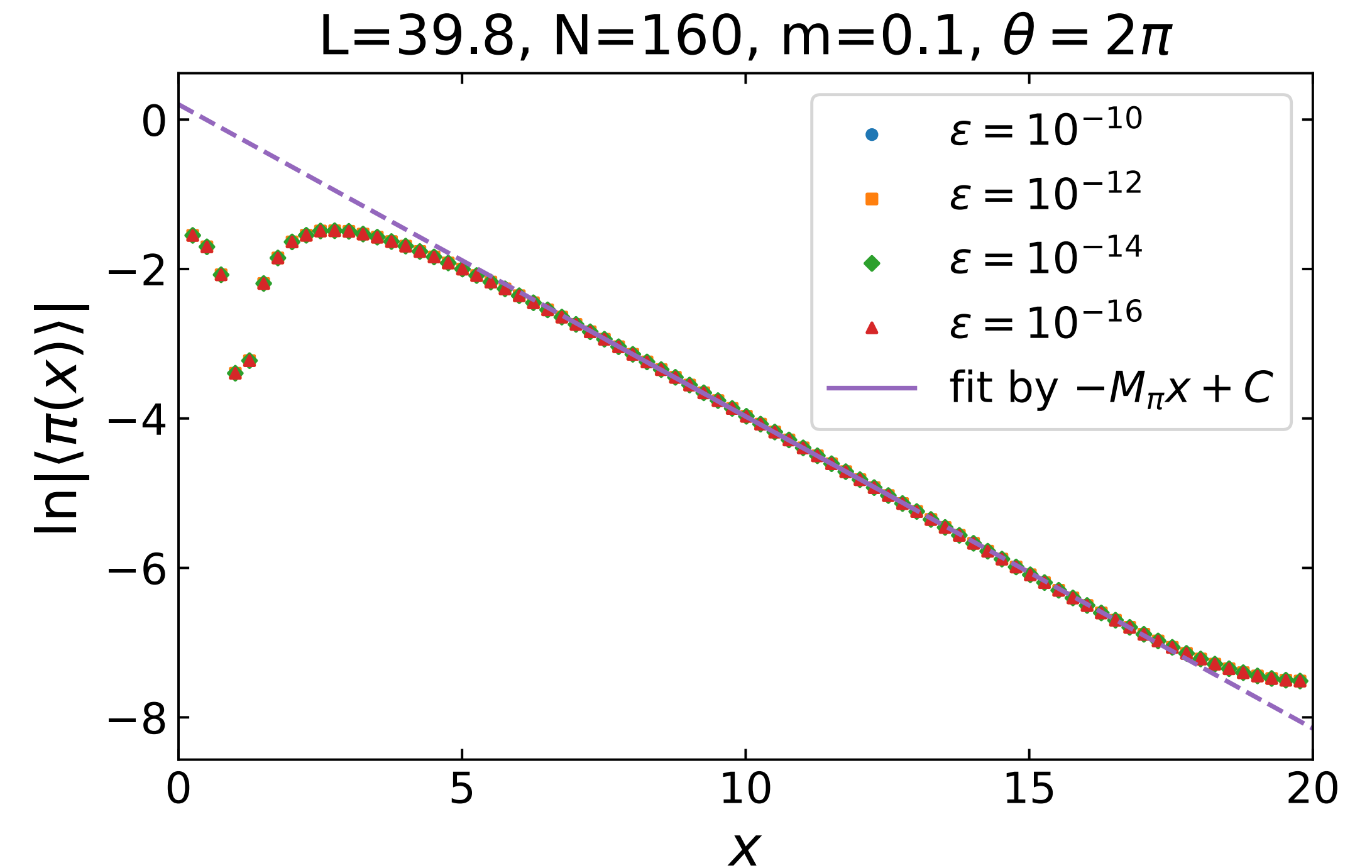
θ の値をシフト: $\theta = 2\pi$ (Haldane phase) \rightarrow 背景電場が導入される

- 電荷 ± 1 を持つ Dirac フェルミオンが両端に励起される
- boundary上の isospin $1/2 \rightarrow$ iso-triplet state の source



(2) one-point-fn. scheme (pion)

- $\theta = 2\pi$ において基底状態を生成
- 1点関数を計算 $|\langle \pi(x) \rangle| \sim e^{-Mx+C}$
- fittingの結果:
 $M = 0.4175(9)$, $C = 0.203(9)$
- ε 依存性は見られない



	pion	sigma	eta
M	0.4175(9)	0.761(2)	0.9014(1)

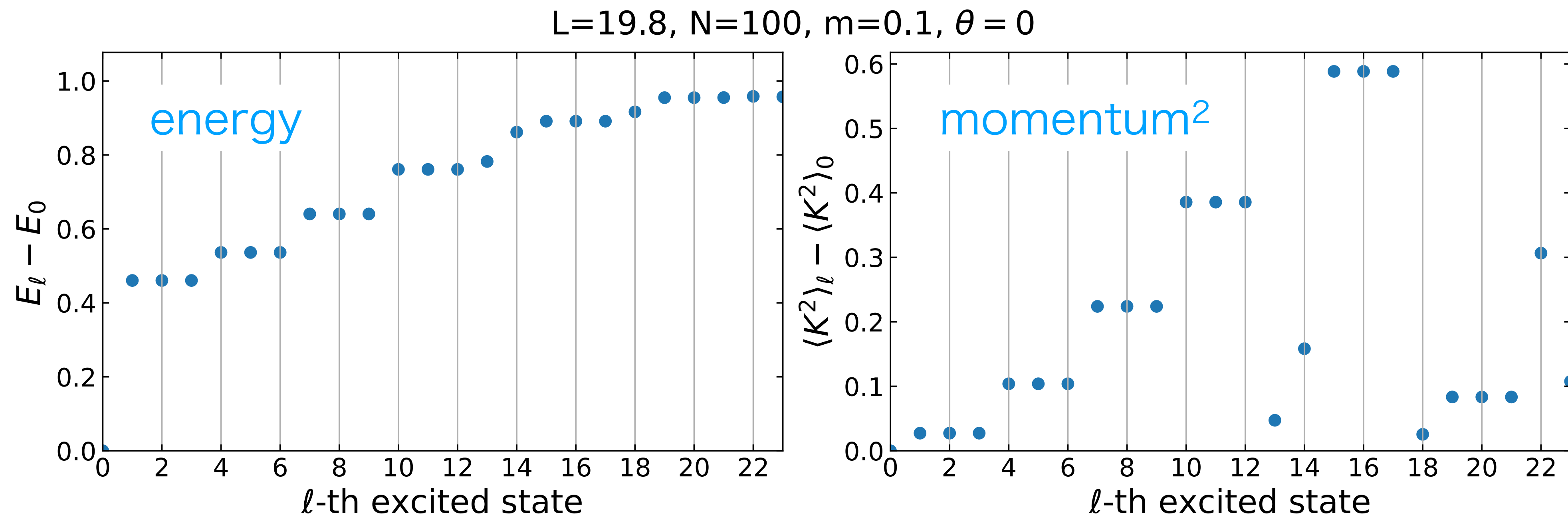
数値計算の結果

1. Correlation-function scheme
2. One-point-function scheme
- 3. Dispersion-relation scheme**

(3) Dispersion-relation scheme

- energy gap: $\Delta E_\ell = E_\ell - E_0$ momentum square: $\Delta K_\ell^2 = \langle K^2 \rangle_\ell - \langle K^2 \rangle_0$
- triplets \rightarrow pion? singlets \rightarrow sigma or eta meson?

量子数を測ることによって状態を分類 : $\mathbf{J}^2, J_z, G = Ce^{i\pi J_y}$



量子数

• triplets: $\mathbf{J}^2 = 2$, $J_z = (0, \pm 1)$, $G > 0$

→ pion ($J^{PG} = 1^{-+}$)

• singlets: $\mathbf{J}^2 = 0$, $J_z = 0$,

$G > 0$ ($\ell = 13, 14, 22$) → sigma meson ($J^{PG} = 0^{++}$)

$G < 0$ ($\ell = 18, 23$) → eta meson ($J^{PG} = 0^{--}$)

triplets

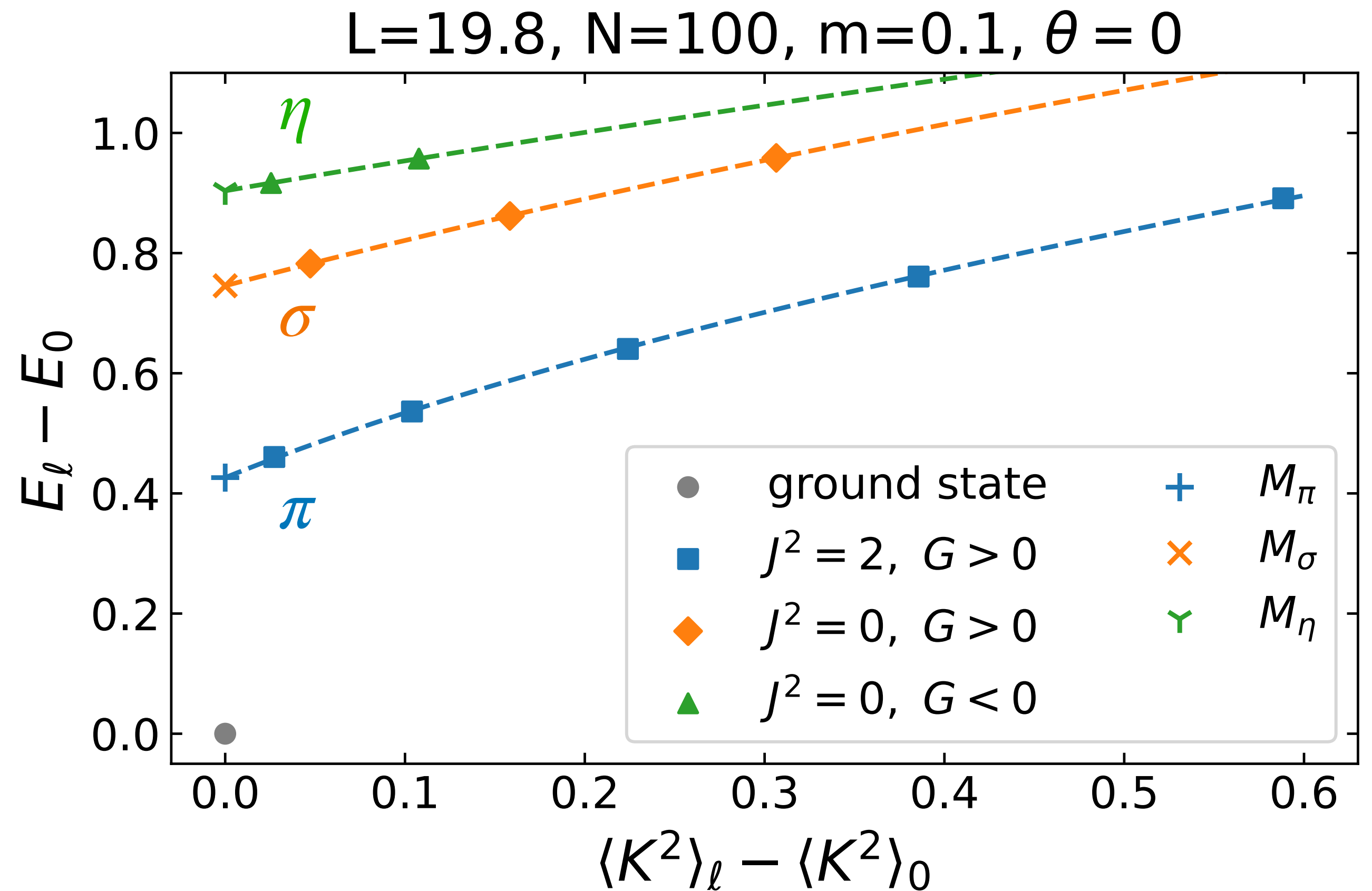
singlets

ℓ	\mathbf{J}^2	J_z	G
0	0.00000003	-0.00000000	0.27984227
13	0.00000003	0.00000000	0.27865844
14	0.00000003	0.00000000	0.27508176
18	0.00000028	0.00000006	-0.27390909
22	0.00001537	0.00000115	0.26678987
23	0.00003607	-0.00000482	-0.27664779

ℓ	\mathbf{J}^2	J_z	G
1	2.00000004	0.99999997	0.27872443
2	2.00000012	-0.00000000	0.27872416
3	2.00000004	-0.99999996	0.27872443
4	2.00000007	0.99999999	0.27736066
5	2.00000006	0.00000000	0.27736104
6	2.00000009	-0.99999998	0.27736066
7	2.00000010	1.00000000	0.27536687
8	2.00000002	0.00000000	0.27536702
9	2.00000007	-0.99999998	0.27536687
10	2.00000007	0.99999998	0.27356274
11	2.00000005	0.00000001	0.27356277
12	2.00000007	-0.99999999	0.27356274
15	1.99999942	0.99999966	0.27173470
16	2.00000052	0.00000000	0.27173482
17	2.00000015	-1.00000003	0.27173470
19	2.00009067	1.00004377	0.27717104
20	2.00002578	-0.00000004	0.27717020
21	2.00003465	-1.00001622	0.27717104

分散関係の結果

- 各メソン毎に ΔE_ℓ を ΔK_ℓ^2 に対してプロット
- 分散関係式 $\Delta E = \sqrt{b^2 \Delta K^2 + M^2}$ でfittingする

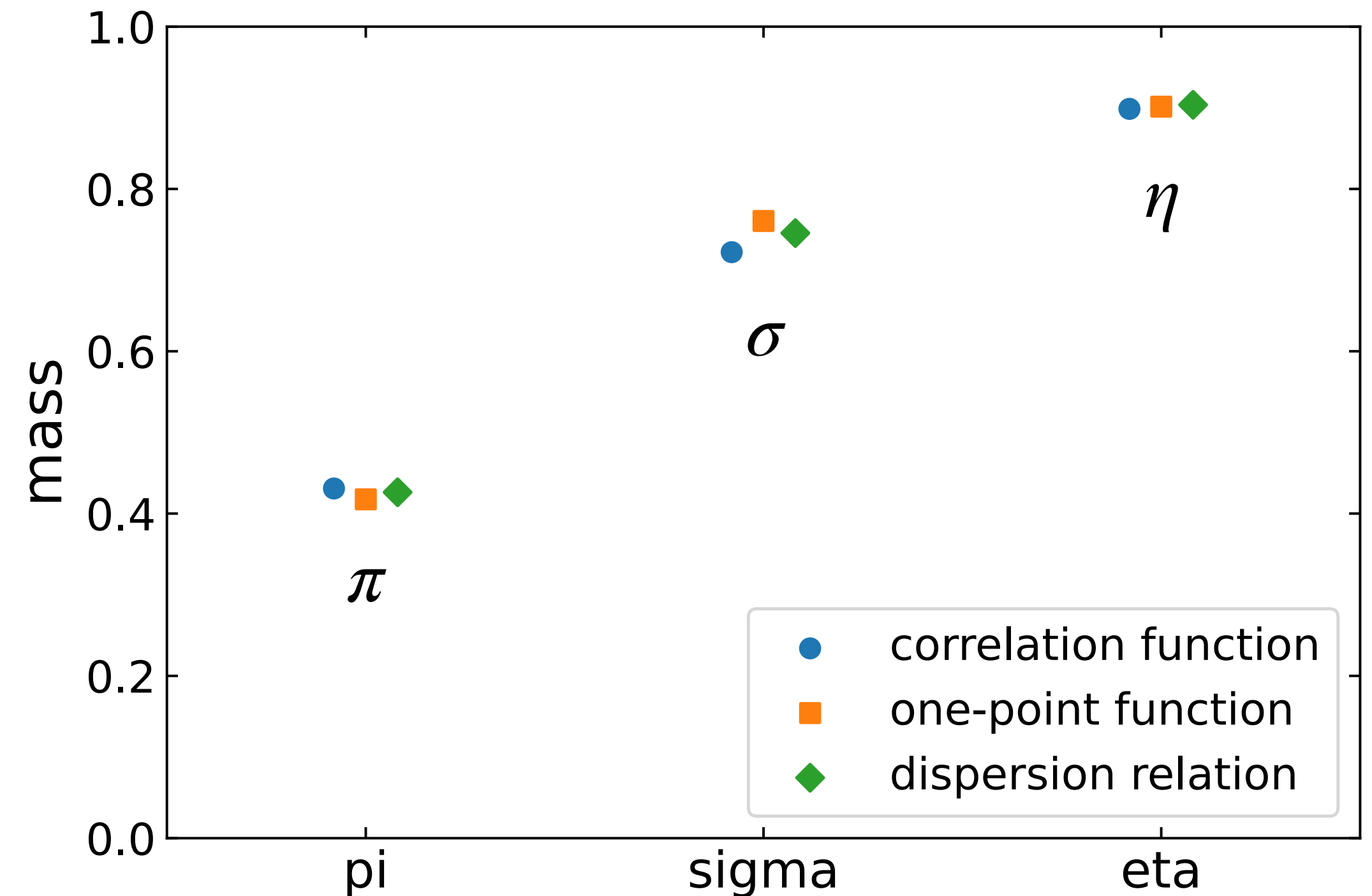


	pion	sigma	eta
M	0.426(2)	0.7456(5)	0.9037
b	1.017(4)	1.087(2)	0.9622

Summary

- 3つの独立な方法により得られたスペクトルは互いに無矛盾
- bosonizationを用いた近似計算とも無矛盾
 - ✓ $M_\pi < M_\sigma < M_\eta \rightarrow$ U(1) problem
 - ✓ $M_\eta \sim \mu$ ($\mu = g\sqrt{2/\pi} \sim 0.8$)
 - ✓ $M_\sigma/M_\pi = \sqrt{3}$ within 5% deviation

[Coleman (1976)] [Dashen et al. (1975)]



	correlation func.	one-point func.	dispersion
M_σ/M_π	1.68(2)	1.821(6)	1.75(1)

Discussion

(1) correlation-function scheme

👍 あらゆる場合に適用可能な一般的な手法

😞 DMRGではbond次元の影響が大きい → 😊 量子計算

(2) one-point-function scheme

👍 系のサイズやbond次元が小さくても有効

😞 boundaryと同じ量子数を持つ lowest state にしか適用できない

(3) dispersion-relation scheme

👍 様々な励起状態が発見的に得られる / 波動関数などの情報 (s/p-wave)

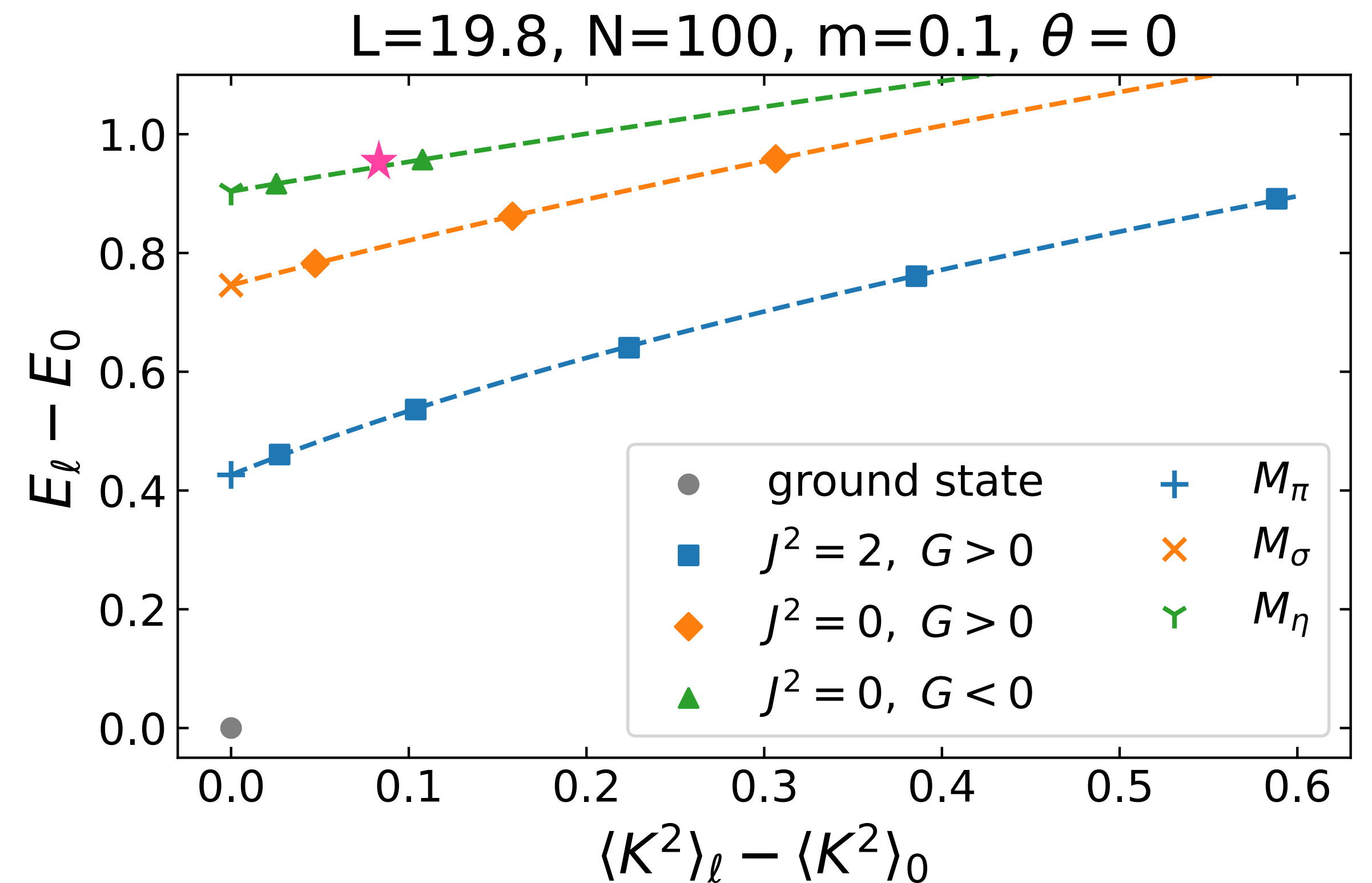
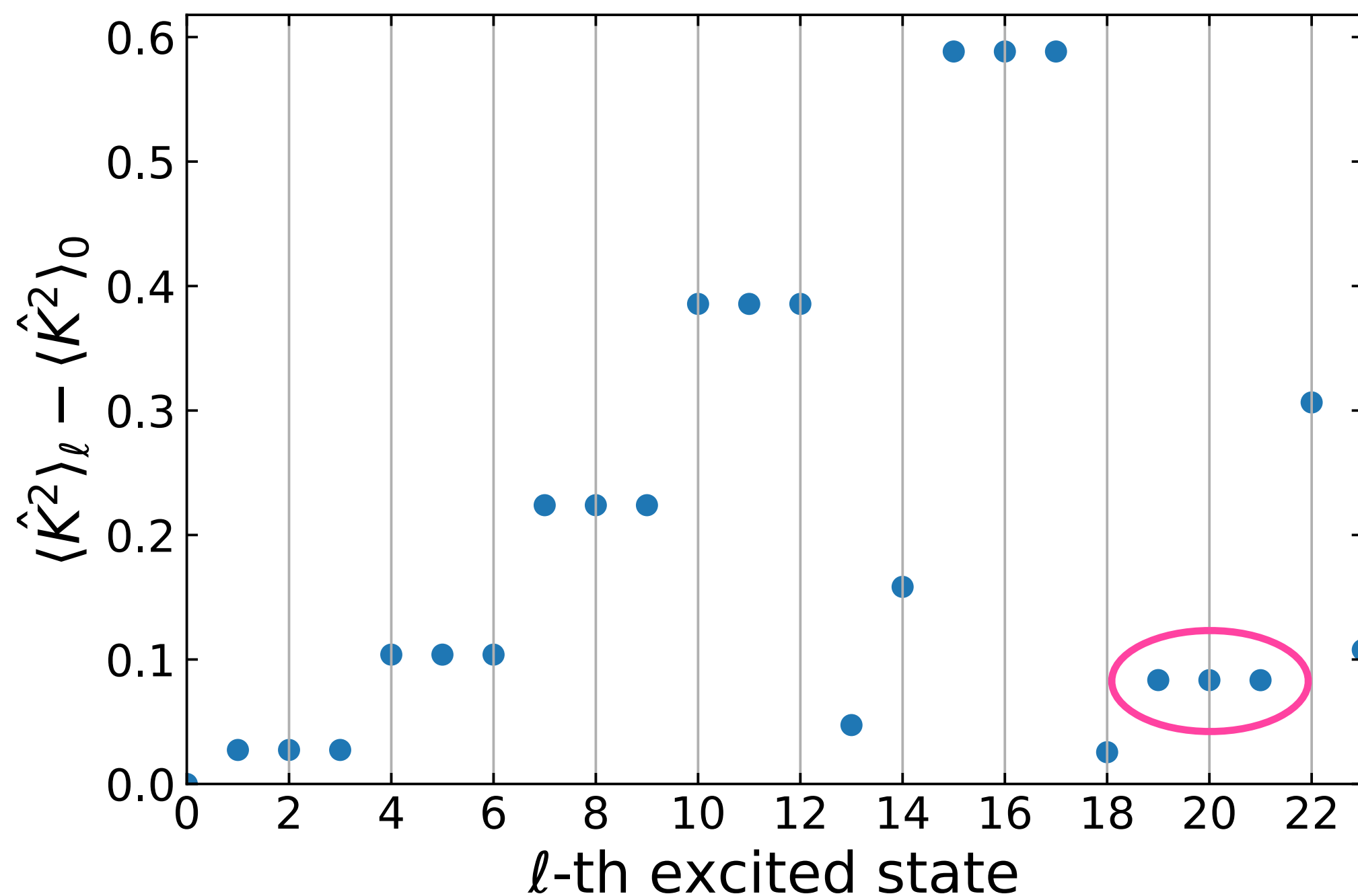
😞 励起状態をたくさん生成する計算コストが高い

励起状態の更なる応用

★ $\ell = 19, 20, 21$ の triplet は two-pion の散乱状態? $\Delta E > 2M_\pi$

[Harada et al. (1994)]

散乱状態からハドロン間ポテンシャルが計算できるか?

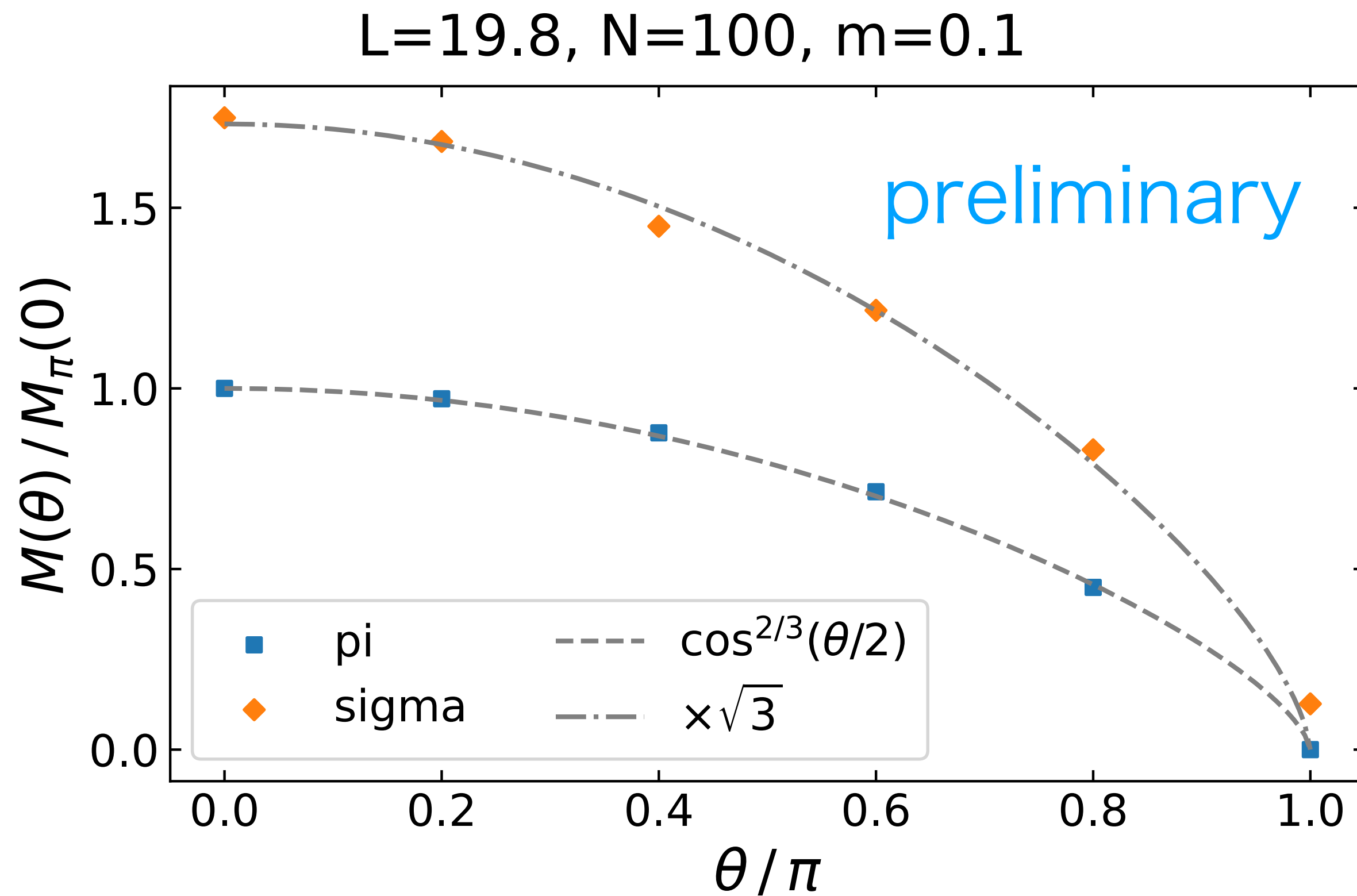


$\theta \neq 0$ への応用

- θ に依存してメソン演算子が scalar/pseudo-scalar の非自明な mixing になる
 - 相関行列 $\begin{pmatrix} \langle S(x), S(y) \rangle & \langle S(x), PS(y) \rangle \\ \langle PS(x), S(y) \rangle & \langle PS(x), PS(y) \rangle \end{pmatrix}$ を計算して対角化する
 - 1点関数の方法は難しい？
- G や P が量子数ではなくなるが、励起状態自体は生成できる
- $\theta = \pi$ では $M_\pi \sim 0$ となり、CFTに近づく

$\theta \neq 0$ への応用

- dispersion-relation schemeの結果



Monte Carlo result
[Fukaya & Onogi (2003)]

