QEDの赤外発散と漸近対称性

杉下 宗太郎 (京大基研)

共同研究者: 平井 隼人 (木更津高専) 氏との論文に基づく

[JHEP 07(2018)], [JHEP 06 (2019)], [JHEP 02 (2021)], [PTEP (2023) 5]

YITP
YUKAWA INSTITUTE FOR
THEORETICAL PHYSICS

基研研究会 素粒子物理学の進展2023，2023年8月29日

■ 量子電磁気学(QED)と漸近対称性

- QEDのS行列は素朴に計算すると赤外発散

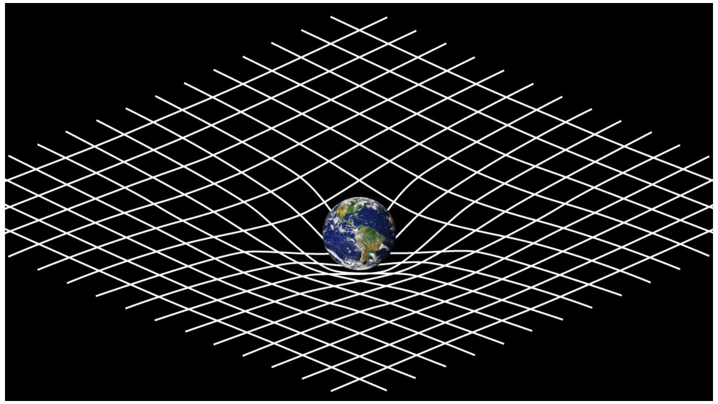
  最近わかってきたこと: 漸近対称性から理解 & 回避できる！

- Keywords: 赤外発散, 漸近対称性

漸近対称性

- 場の遠方(漸近領域)での振る舞いに関する対称性

- 重力理論の場合: 時空遠方の構造を尊重する変換に関する対称性.



遠方はほとんど影響がない.

- AdS時空の場合　　漸近対称性 in AdS = 共形対称性 in CFT

■ 平坦時空の漸近対称性

- 平坦時空上の重力理論の漸近対称性は無限次元.

BMS symmetry [Bondi, Van der Burg, Metzner (1962), Sachs (1962)]
Not BSM

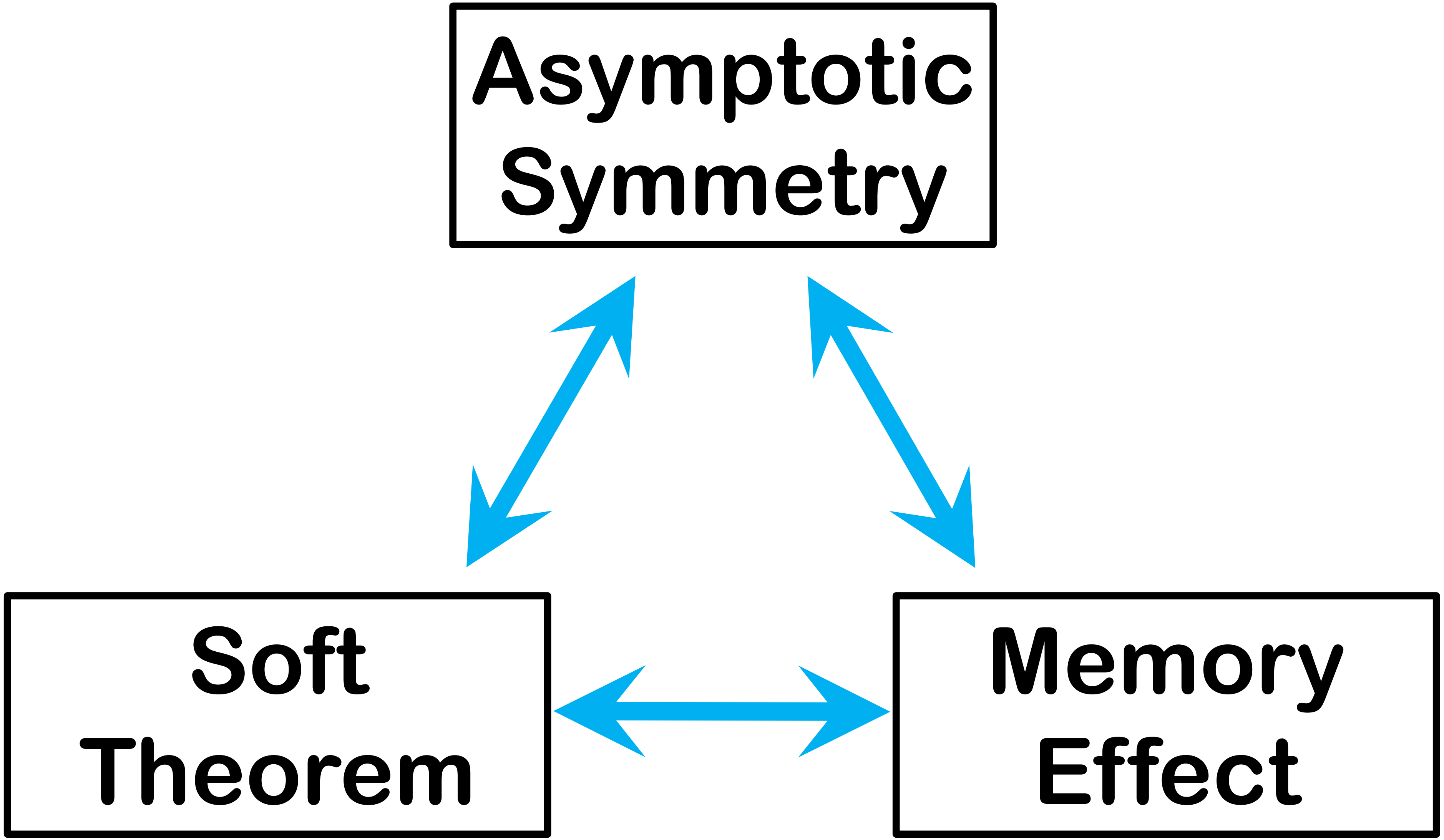
- 電磁気理論も無限次元の漸近対称性を持つ!

[He, Mitra, Porfyriadis, Strominger (2014), (2015)]

この対称性は何を意味しているのか？

IR triangle relation

[Strominger (2013)...]



■ 赤外発散と漸近対称性

- QEDの漸近対称性は赤外発散やそれを回避するためのドレス状態法と関連.

- 今回の話: 赤外安全なS行列を得るためのドレス状態の条件(ドレスコード)を導出.
  その漸近対称性との関係も説明.　[平井, 杉下 (2023)]

Quantum IR relation

[平井, 杉下 (2023)]

Dress Code $\longleftrightarrow$ **Asymptotic Symmetry**

- ドレスコードはメモリー効果の量子論における実現.
  古典的にはメモリー効果は漸近対称性の保存則.

Conservation law $\longleftrightarrow$ **Symmetry**

- 正確には、ドレスコードは漸近対称性の超選択則.

Outline

1. Introduction — 6 slides
2. Asymptotic symmetry and memory effect — 6 slides
3. Asymptotic symmetry in QED — 14 slides
4. Dressed formalism vs Inclusive computations — 8 slides

Outline

■ 電磁気理論における漸近対称性

- 4次元Minkowski時空上の電磁気
- U(1) ゲージ対称性 $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x), \quad \delta\psi(x) = ie\,\epsilon(x)\psi(x)$
- 変換のネーター電荷 $Q[\epsilon] = \int d^3x\,\partial_i(F^{0i}\epsilon)$

全微分なので、$\epsilon(x)$ が遠方で0なら $Q[\epsilon] = 0$

遠方で0ではないなら、nonzeroもあり得る(large trsf).

そのような $Q[\epsilon] \neq 0$ となる変換を漸近対称性と呼ぶ.

■ 無限次元漸近対称性

- 実際、光的無限遠で $\epsilon(x) \sim \epsilon^{(0)}(\theta, \varphi)$ であれば、$Q[\epsilon] \neq 0$

正確にはゲージ固定後のresidual sym
としてこのようなものがある.

- 変換の自由度は2次元球面(天球)上の関数自由度.

⇒ 無限次元

◆この対称性から何が言える?

- 量子論では、(small)ゲージ変換では $Q[\epsilon] \sim 0$ (gauge redundancy). $\langle\psi| Q[\epsilon] |\psi'\rangle = 0$

漸近対称性では $Q[\epsilon]$ は状態に非自明に作用しても良い $\langle\psi| Q[\epsilon] |\psi'\rangle \neq 0$

◆Qの役割は何?

■ 保存量

保存カレント: $J^\mu = j^\mu_{\rm mat}\epsilon + F^{\mu\nu}\partial_\nu\epsilon \qquad (\partial_\mu J^\mu = 0)$

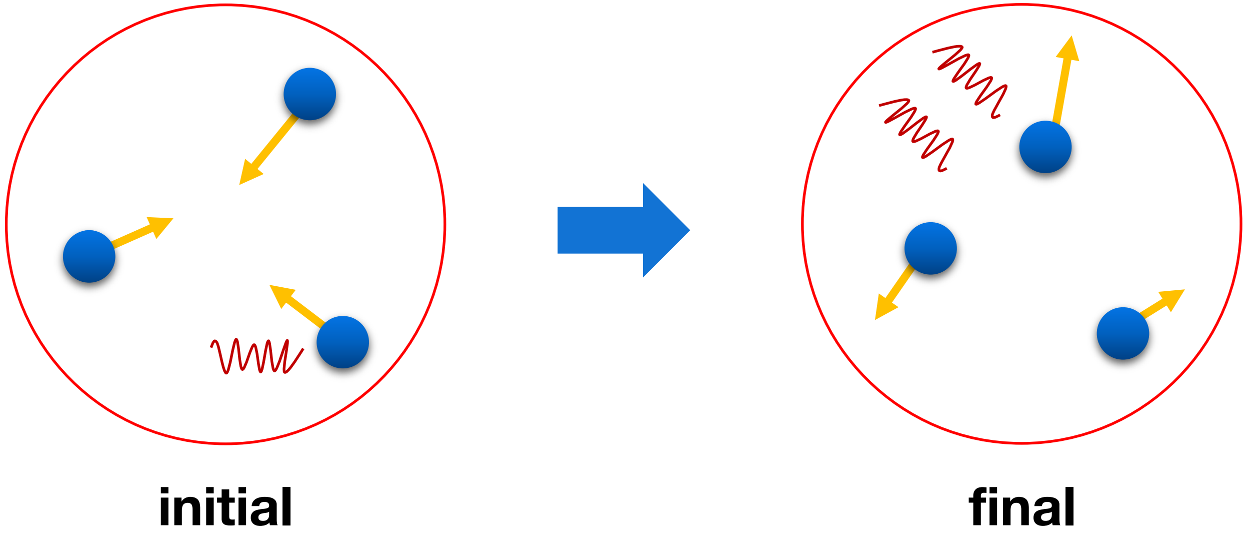
保存量: $Q[\epsilon] = Q^{\rm hard}[\epsilon] + Q^{\rm soft}[\epsilon]$

$\epsilon =$ 定数 ➡ 総電荷　(通常の電荷保存則)

$\epsilon(\theta,\varphi)$ ➡ “多重極モーメント” + 電磁波の寄与

$Q^{\rm hard}$　　$Q^{\rm soft}$

$Q_{\rm in}[\epsilon]$



$Q_{\rm fin}[\epsilon]$

■ 保存則

$$Q[\epsilon] = Q^{\text{hard}}[\epsilon] + Q^{\text{soft}}[\epsilon]$$

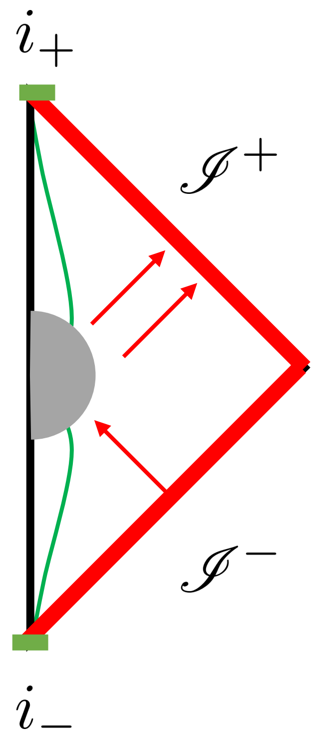
$$Q^{\text{hard}}_{\text{in}}[\epsilon] = \int_{S^2(t=-\infty)} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\,\epsilon^{(0)}$$

"electric multiple moment"

For general $\epsilon(\theta,\varphi)$, $Q^{\text{hard}}_{\text{in}}[\epsilon] \neq Q^{\text{hard}}_{\text{fin}}[\epsilon]$

$$Q^{\text{soft}}_{\text{in}}[\epsilon] = \int_{\mathscr{I}^-} dV\,F^{rA}\partial_A\epsilon$$

"入射電磁波のflux"



保存則 $Q_{\text{in}}[\epsilon] = Q_{\text{fin}}[\epsilon]$ はメモリー効果! [平井, 杉下 (2018)]

■ メモリー効果

- 保存則 $Q^{\text{hard}}_{\text{in}}[\epsilon] + Q^{\text{soft}}_{\text{in}}[\epsilon] = Q^{\text{hard}}_{\text{fin}}[\epsilon] + Q^{\text{soft}}_{\text{fin}}[\epsilon]$

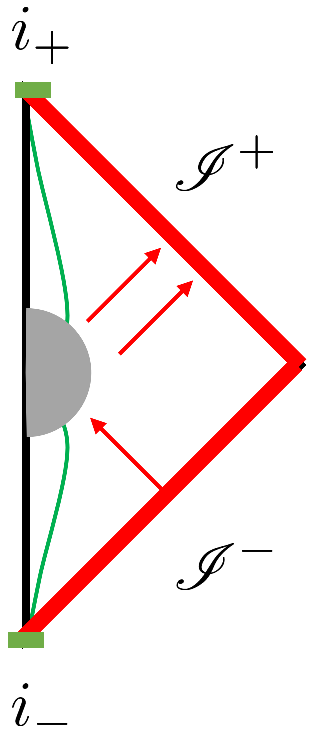
In Lorenz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, $A_B(u,r,\Omega) = A^{(0)}_B(u,\Omega) + \mathcal{O}(1/r)$

角度成分 $(u = t - r)$

$$Q^{\text{soft}}_{\text{fin}}[\epsilon] = \int_{S^2} d^2\Omega\, \delta A^{(0)}_B \partial^B \epsilon^{(0)}\,, \quad \delta A^{(0)}_B = A^{(0)}_B(u=\infty) - A^{(0)}_B(u=-\infty)$$

$$\boxed{\int_{S^2} d^2\Omega\, \delta A^{(0)}_B \partial^B \epsilon^{(0)} = Q^{\text{hard}}_{\text{in}}[\epsilon] - Q^{\text{hard}}_{\text{fin}}[\epsilon] + Q^{\text{soft}}_{\text{in}}[\epsilon]}$$

memory effect



- 散乱が起きると場が変位.
  変位のleading partはハード電荷の変化と始状態のソフト電荷で決まる.

- 重力のメモリー効果の電磁気バージョン.

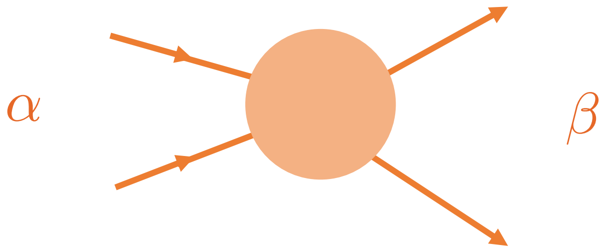
[Zel’dovich & Polnarev (1974)] [Bieri & Garfinkle (2013)]

■ 量子電磁気学(QED)では？

- ここまでは古典論での話.　量子論では？

- QEDでの散乱を考え、漸近対称性がどういう役割を果たしているかを調べる.

S行列　　$S_{\beta,\alpha} = \langle\beta|\, S \,|\alpha\rangle$

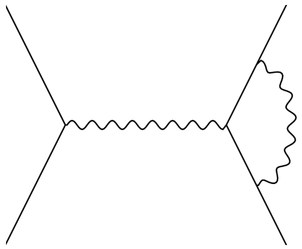


Outline

赤外問題

- S行列の摂動計算. ループレベルで赤外発散.

- 1-loop



$$\int_{k_{\min}} \frac{dk}{k} \sim -\log k_{\min}$$

$k_{\min} \to 0$ で発散: 赤外発散

- 低エネルギーの補正に限れば高次も計算可能. 摂動の和が取れる.

$$S_{\beta,\alpha} \propto \sum_n \frac{1}{n!} \left(C \log k_{\min}\right)^n = e^{C \log k_{\min}}$$

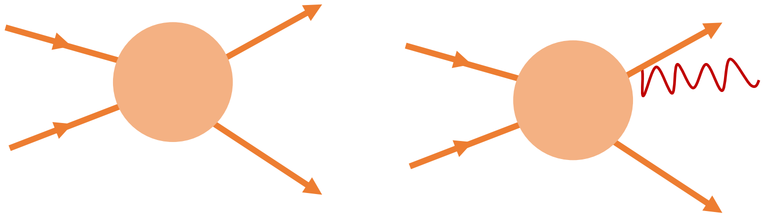
自明な過程を除き一般に$C > 0$ ⟹ $\displaystyle \lim_{k_{\min} \to 0} S_{\beta,\alpha} = 0$

散乱なし？？

■ 標準的な回避法: inclusiveな計算 [Bloch & Nordsieck (1937)]

標準的な場の理論の教科書に書いてある処方箋：**S行列は諦める.**
他の過程も含めた散乱振幅の和のみを考える.

$$\sigma^{\rm tot}(\alpha \to \beta) = |\langle\beta|\,S\,|\alpha\rangle|^2 + |\langle\beta+\gamma|\,S\,|\alpha\rangle|^2 + \cdots$$



現実の検出器では微小エネルギーの光子は検出できない.
検出器で区別できない過程はすべて足す.

このinclusiveな量は赤外安全. $k_{\rm min} \to 0$ としても0でない有限の値.

S行列が自明になることは見なかったことにする... Unitarity?

■ 別の解決方法: ドレス状態

[Chung (1965), Kibble (1968), Kulish & Faddeev (1970)]

$S_{\beta,\alpha} = \langle\beta|\, S \,|\alpha\rangle$ の計算.

- 通常は状態 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ として自由粒子状態(Fock状態)を使う. $|\alpha\rangle_0$, $|\beta\rangle_0$
- QEDや重力のような遠距離力に対してこの仮定は不自然.

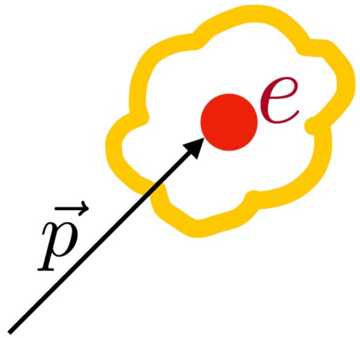
● コヒーレントな光子が荷電粒子に付加された状態(ドレス状態)を使う.

Chungのドレス状態 [Chung (1965)]

$$||\vec{p}\rangle\rangle = e^{R_C(\vec{p})}\,|\vec{p}\rangle\,, \qquad R_C(\vec{p}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)}\,\frac{e\,p\cdot\epsilon^A}{p\cdot k}\left(a_A(\vec{k}) - a_A^\dagger(\vec{k})\right)$$

電子のFock状態

S行列は赤外安全 $\lim_{k_{\min}\to 0} S_{\beta,\alpha} \neq 0$



■ なぜFock状態が悪いのか

■ Fock空間は以下の意味で不完全:

有限粒子数の任意のFock状態と直交する状態が存在.

Coherent states

$$|\psi\rangle = e^R |\psi_0\rangle\,, \quad R = \int_{\lambda}^{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)} \frac{e\, p\cdot\epsilon^A}{p\cdot k}(a_A(\vec{k}) - a_A^\dagger(\vec{k}))$$

Fock

- 赤外カットオフを取り除く極限で任意のFock状態と直交

$$\langle\alpha|\psi\rangle \to 0 \qquad (\lambda \to 0)$$

- こういう状態が現れなければFock状態だけで話は閉じるが、そんなことはない.
  QEDだと、Fock状態で始めても時間発展させると(ソフト光子の)コヒーレント状態になる.

$\langle\alpha|\, U(t)\, |\beta\rangle \to 0 \qquad (\lambda \to 0)$ Fock状態間の遷移振幅は0. これが赤外問題の原因.

もっと広いクラスの状態を考えればよい → ドレス状態

■ 漸近対称性の超選択則

[平井, 杉下 (2023)]

漸近対称性はlarge gauge変換なので、(bulkの)任意の物理量と可換.

$$[Q, \mathcal{O}] = 0 \quad \text{on physical Hilbert space}$$

cf. 普通の対称性 $[Q, H] = 0$

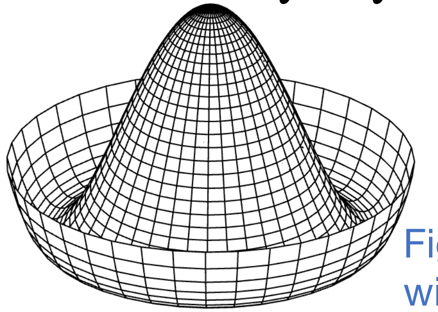
ヒルベルト空間は漸近対称性の電荷でラベルされるセクターの直和に分解.

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \oplus_Q \mathcal{H}_Q$$

普通の電荷と同様.

異なるセクターは決して混ざらないし干渉もしない.

- 自発的対称性の破れと同様. **無限体積**では無数の真空があり、混ざらない. $\oplus_Q \mathcal{H}_Q$



- 少し違うのは、soft chargeが違ってもhard chargeを合わせれば同じQになるところ. $Q = Q^{\text{hard}} + Q^{\text{soft}}$

Fig from wikipedia

■ なぜFock状態が悪いのか(part 2)

$$Q[\epsilon] = \underline{Q^{\text{hard}}[\epsilon]} + \underline{Q^{\text{soft}}[\epsilon]}$$

散乱の前後で保存　$Q_{\text{in}}[\epsilon] = Q_{\text{fin}}[\epsilon]$
(同じ超選択則セクター)

- (普通の)Fock状態を使うと $Q^{\text{soft}}_{\text{in}} = Q^{\text{soft}}_{\text{fin}}$
- 非自明な散乱の前後で $Q^{\text{hard}}_{\text{in}} \neq Q^{\text{hard}}_{\text{fin}}$

Fock状態からFock状態への遷移は保存則(超選択則)に反する.

遷移はない $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{k_{\text{min}}\to 0} S_{\beta,\alpha} = 0$

- 逆に言うと、禁止されている遷移が起きないのは赤外発散のおかげ.

■ ドレス状態再考

e^R : ソフト光子のコヒーレント状態を作る演算子

$$[Q^{\mathrm{soft}}, e^R] = c\text{-number}$$

この演算子はsoft chargeの値をシフトする.

- ドレスしてsoft chargeをシフトすれば保存則を満たすことができる.

$$|\alpha\rangle \longrightarrow e^R |\beta\rangle$$

$$Q_\alpha = Q_\beta + \delta Q^{\mathrm{soft}}$$

保存則が満たされていれば(他の理由で禁止されていない限り)遷移は起きるはず.

- より一般には　$e^{C_\alpha} |\alpha\rangle \longrightarrow e^{C_\beta} |\beta\rangle$

■ 一般のドレス

[平井, 杉下 (2023)]

- 一般のソフト光子のコヒーレント状態を考える.

$$|\alpha\rangle_{GB} = e^{C_\alpha}\,|\alpha\rangle_0\,, \quad |\beta\rangle_{GB} = e^{D_\beta}\,|\beta\rangle_0$$

$|\alpha\rangle_0\,, |\beta\rangle_0$ はハードなFock状態.

$$C_\alpha = \int_\lambda^{\Lambda_s} \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)} \left[C_\alpha^A(\vec{k})a_A(\vec{k}) - C_\alpha^{A*}(\vec{k})a_A^\dagger(\vec{k}) \right]$$

soft photons

- どういうドレスを取れば赤外カットオフ$\lambda \to 0$でもS行列要素はnonzeroか?

General IR factorization

[平井, 杉下 (2023)]

- S行列のsoft部分はall orderで計算可能
  (通常のsoft photon近似の計算とほぼ同じ.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{\beta,\alpha} = \underline{S^{\text{soft}}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s, \lambda)} S^{\text{hard}}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s)}$$

通常のIR factorization公式の一般化

$$S_{\beta,\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda_s}\right)^{\#} S^{\Lambda_s}_{\beta,\alpha}$$

General IR factorization

[平井, 杉下 (2023)]

- S行列のsoft部分はall orderで計算可能
  (通常のsoft photon近似の計算とほぼ同じ.)

$$S_{\beta,\alpha} = \underline{S^{\text{soft}}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s,\lambda)} S^{\text{hard}}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s)$$

$$= e^{N_{D_\beta,C_\alpha}}$$

通常のIR factorization公式の一般化

$$S_{\beta,\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda_s}\right)^{\#} S^{\Lambda_s}_{\beta,\alpha}$$

where $\mathrm{Re}(N_{D_\beta,C_\alpha}) = -\frac{1}{2}\int_\lambda^{\Lambda_s} \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)} \underline{|R^A_{\beta,\alpha} - C^A_\alpha + D^A_\beta|^2} \le 0$

$$R^A_{\beta,\alpha} = R^A_\beta - R^A_\alpha, \qquad R^A_\psi := \sum_{n\in\psi} e_n \frac{p_n\cdot\epsilon^A}{p_n\cdot k} \quad (\psi=\alpha,\beta)$$

- 被積分関数はドレスでcancelさせない限り$1/k^2$で発散.

$$\mathrm{Re}(N_{D_\beta,C_\alpha}) \to -\infty$$

Dress code

[平井, 杉下 (2023)]

$$\boxed{S_{\beta,\alpha} = e^{N_{D_\beta,C_\alpha}} S^{\text{hard}}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s)}$$

$$\mathrm{Re}(N_{D_\beta,C_\alpha}) = -\frac{1}{2}\int_\lambda^{\Lambda_s} \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)} \underline{|R^A_{\beta,\alpha} - C^A_\alpha + D^A_\beta|^2} \leq 0$$

- Dress code for non-vanishing S-matrix elements:

$$\boxed{D_\beta - C_\alpha = -R_{\beta,\alpha} + o(k^{-1})}$$

$$\lim_{k\to 0} k\, o(k^{-1}) = 0$$

- A choice is $C^A_\alpha = -\sum_{n\in\alpha} e_n \frac{p_n\cdot\epsilon^A}{p_n\cdot k}, \quad D^A_\beta = -\sum_{n\in\beta} e_n \frac{p_n\cdot\epsilon^A}{p_n\cdot k}$ (Chung's dress)

$\Rightarrow$ $S_{\beta,\alpha} = S^{hard}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s)$ IR finite!

- ドレスコードを満たしていれば(少なくともソフト部分の)S行列要素はnonzero.

Quantum memory effect

[平井, 杉下 (2023)]

- Dress code

$$D_\beta - C_\alpha = -R_{\beta,\alpha} + o(k^{-1})$$

final initial change of hard info

$$\Rightarrow \quad Q^{\rm soft}_{\rm fin}[\epsilon] - Q^{\rm soft}_{\rm in}[\epsilon] = -Q^{\rm hard}_{\rm fin}[\epsilon] + Q^{\rm hard}_{\rm in}[\epsilon]$$

Hard chargeは古典の点電荷の場合と全くおなじ.

- ドレスコードはメモリー効果.

soft sectorのシフトはhard sectorの変化で決まる. 漸近対称性とコンシステント.

- 漸近対称性に反する禁止された遷移は赤外発散のおかげで起こらない.
超選択則は赤外発散(無限体積効果)で保証されている.

超選択則と重ね合わせ

[平井, 杉下 (2023)]

$$|\mathrm{in}\rangle = f_\alpha |\alpha\rangle + f_{\alpha'} |\alpha'\rangle$$

- 異なる超選択則セクターに属する状態は干渉しない.
  意味のある重ね合わせは同じセクター内のみ.
- ドレスしていない荷電粒子の運動量固有状態 $|\vec{p}\rangle, |\vec{p'}\rangle$ は異なるセクターに属する.
- 波束を考えるときに注意が必要. $\int d\vec{p}\,\varphi(\vec{p})\,|\vec{p}\rangle$

  ドレスした状態で重ね合わせる必要がある. $\int d\vec{p}\,\varphi(\vec{p})e^{C(\vec{p})}\,|\vec{p}\rangle_0$

可能なドレス

[平井, 杉下 (2023)]

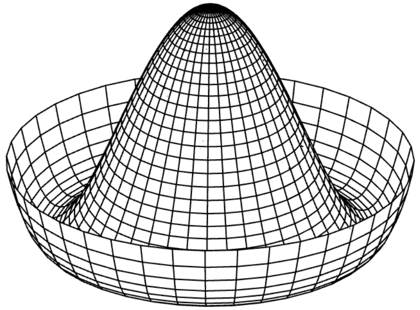
- 一般的な重ね合わせ $\sum_i f_i \, e^{C_i} \, |\alpha_i\rangle$

- 重ね合わされている状態が同じセクターにいるために必要なドレス

$$\boxed{C_i = -R_{\alpha_i} + C + o(k^{-1})}$$

Chung's dress　　Common to all i

$$R^A_{\alpha_i} = \sum_{n\in\alpha_i} e_n \frac{p_n \cdot \epsilon^A}{p_n \cdot k}$$



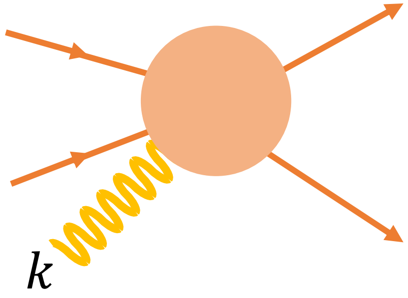
本質的にChungのドレスしかない.

Soft theorem for dressed states

[平井, 杉下 (2023)]

- Fock状態に対して、 $S_{\beta,\alpha+\gamma(k,A)} \sim \underline{-R^A_{\beta,\alpha}} S_{\beta,\alpha}$

1/k soft factor



StromingerのIR triangleの話ではこのsoft theoremが漸近対称性のWT恒等式だと議論されていた.
ただ、$S_{\beta,\alpha} \to 0$ なので0の係数を議論しても意味ないのでは?

- ドレス状態でsoft theoremを考える.

$$S_{\beta,\alpha+\gamma(k,A)} \sim \underline{\left[-R^A_{\beta,\alpha} + C^A_\alpha - D^A_\beta\right]} S_{\beta,\alpha}$$

general soft factor

ドレスコードが満たされているならばsoft factorは消える.
どんな場合でもsoft光子の(少なくともleadingの)発散は現れない.

[Mirbabayi & Porrati (2016), Gabai & Sever (2016)]

Outline

1. Introduction — 6 slides
2. Asymptotic symmetry and memory effect — 6 slides
3. Asymptotic symmetry in QED — 14 slides
4. Dressed formalism vs Inclusive computations — 8 slides

Inclusive computations

現実の実験では、ソフト光子は見れないので、通常のinclusiveな計算で十分ではないか?

inclusiveな量だけ見るときにドレスかそうじゃないかを区別できるのか?

重ね合わせ状態を考えるとFockとChung dressで違いが実際に出る.

[Carney, Chaurette, Neuenfeld & Semenoff (2018)]

Decoherence

重ね合わせ初期状態 $|\mathrm{in}\rangle = f_\alpha |\alpha\rangle + f_{\alpha'} |\alpha'\rangle$

Inclusive cross section for the hard final states $|\beta\rangle$.

$$\sigma^{\mathrm{hard}}(\mathrm{in} \to \beta) = \sigma(\mathrm{in} \to \beta) + \sigma(\mathrm{in} \to \beta + \gamma) + \sigma(\mathrm{in} \to \beta + 2\gamma) + \cdots$$

この断面積は初期状態の相対位相 $f_\alpha f^*_{\alpha'}$に一般には依存するはず.

ところが、

- If we use Fock states (undress), no interference term. Decoherence!
- If we use Chung states (dress), we have the interference term.

[Carney, Chaurette, Neuenfeld & Semenoff (2018)]

これも超選択則から理解できる.

Superselection rule

$$|\mathrm{in}\rangle = f_\alpha |\alpha\rangle + f_{\alpha'} |\alpha'\rangle$$

ドレスしていない異なるhard状態は一般に異なる漸近対称性の保存電荷を持つ.

$$Q_{\mathrm{as},\alpha} \neq Q_{\mathrm{as},\alpha'}$$

⇨ always decohered

同じ超選択則セクターにいるときのみ干渉可能. $Q_{\mathrm{as},\alpha} = Q_{\mathrm{as},\alpha'}$

適切なドレス状態でのみ干渉効果が現れる.

Zero-measure problem

[Carney, Chaurette, Neuenfeld & Semenoff (2018)]

- ドレス状態の必要性は波束を考えるとより明らか.
- Fock状態の重ね合わせ $|\mathrm{in}\rangle = \sum_\alpha f_\alpha |\alpha\rangle$

  デコヒーレンスの議論から $\sigma^{\mathrm{hard}}(\mathrm{in} \to \beta) = \sum_{\alpha,\alpha'} f_\alpha f^*_{\alpha'} \underbrace{X_{\alpha,\alpha',\beta}}_{\propto\, \delta_{\alpha,\alpha'}} = \sum_\alpha |f_\alpha|^2 X_{\alpha,\alpha,\beta}$
- 特に波束のような連続的な重ね合わせを考えると $|\mathrm{in}\rangle = \int d\alpha\, f(\alpha)\,|\alpha\rangle$

$$\sigma^{\mathrm{hard}}(\mathrm{in} \to \beta) = \int d\alpha d\alpha' f(\alpha) f^*(\alpha') \underbrace{X_{\alpha,\alpha',\beta}}_{\propto\, \delta_{\alpha,\alpha'}} = 0$$

$\longleftarrow$ not delta function

$\alpha = \alpha'$ region has measure zero. 断面積は0

- 適切なドレスをすれば、このzero-measure問題はなく、non-zeroの断面積.

Precise definition of hard density matrix 1 [平井, 杉下 (2023)]

- Inclusiveな量はソフト光子をトレースアウトしたハードセクターのreduced density matrixを使って計算される.
- 超選択則のためのに、このdensity matrixの定義には注意が必要.

A naïve definition used in literature: $\rho^{\text{hard}}_{\beta,\beta'} = \sum_{\gamma:\text{soft}} \langle \beta, \gamma | \, \rho \, | \beta', \gamma \rangle$

この定義は、一般には問題で、終状態が波束のときにzero-measure問題.

ヒルベルト空間が直和のときのEEの定義の問題と同じ. $\oplus_Q \mathcal{H}_Q$

適切な定義を提案.

Precise definition of hard density matrix 2 [平井, 杉下 (2023)]

A naïve definition: $\rho^{\mathrm{hard}}_{\beta,\beta'} = \sum_{\gamma:\mathrm{soft}} \underline{\langle \beta, \gamma|}\, \rho \,\underline{|\beta', \gamma\rangle}$

in different sectors except for $\beta = \beta'$

Our new definition: $\rho^{\mathrm{hard}}_{\beta,\beta'} = \sum_{\gamma:\mathrm{soft}} \underline{\langle \beta, \gamma|\, e^{-C_\beta}}\, \rho \,\underline{e^{C_{\beta'}}\, |\beta', \gamma\rangle}$

Dress is chosen so that they are in the same sector.

Hard density matrix for general dress

[平井, 杉下 (2023)]

一般のドレスされた初期状態 $|\mathrm{in}\rangle = \sum_{\alpha} f_\alpha e^{C_\alpha} |\alpha\rangle_0$

In our definition, $\rho^{\mathrm{hard}}_{\beta,\beta'} = \sum_{\alpha,\alpha'} f_\alpha f^*_{\alpha'} \underline{e^{-N^{\beta,\beta'}_{\alpha,\alpha'}}} S^{\mathrm{hard}}_{\beta,\alpha} S^{\mathrm{hard}\dagger}_{\alpha',\beta'}$

重ね合わされてる状態が同じセクターにいるなら、 $N^{\beta,\beta'}_{\alpha,\alpha'}$ は有限.

そうでなければ、$N^{\beta,\beta'}_{\alpha,\alpha'} \to \infty \quad (\lambda \to 0)$. デコヒーレンス.

- ソフト光子をトレースアウトすることによるデコヒーレンスはすべて超選択則が原因.

この意味でソフトセクターは我々の観測には影響しない. 情報喪失の回復と無関係.

This conclusion seems to be consistent with [Bousso, Porrati (2017)], ’soft hair as a soft wig’.

Soft graviton

- 重力にも同様のIR問題

- ソフト重力子の適切なドレス状態を使えば赤外安全なS行列が得られるはず.

- 重力子のトレースアウトによるデコヒーレンスでもって重力の量子性を検証しようという提案がなされているが注意が必要.

- QEDのときと同様に理論的解析でのデコヒーレンスはただの超選択則であるかもしれない.

Conclusion

Quantum IR relation

[平井, 杉下 (2023)]

Dress Code $\longleftrightarrow$ **Asymptotic Symmetry**

- ドレスコードはメモリー効果の量子論における実現.
  古典的にはメモリー効果は漸近対称性の保存則.

Conservation law $\longleftrightarrow$ **Symmetry**

- 正確には、ドレスコードは漸近対称性の超選択則.

Future problems 1

- Subleading computations (work in progress)　　[深田, 平井, 杉下]
  - ドレス状態で赤外発散が消えることはわかった. 残った有限部分は?
  - ソフト光子近似を超えた解析が必要. Subleading dressも寄与.

$$C_i = -R_{\alpha_i} + C + o(k^{-1})$$

  - Subleading soft theoremが変更を受ける可能性がある.

Celestial holographyの観点から重要.

argued that sub graviton soft thrm is the conf WT id in celestial CFT.

Future problems 2

- 重力への拡張.
  - 線形近似レベルではQEDとほぼ同じ.
    赤外発散のcancelだけなら、このレベルで十分(なはず).
- QCD. 有限温度QED. massless QED (colinear発散の制御).
- ドレス状態を使った計算のさらなる整備 (e.g. ドレス波束)
  - 実験で使うビームは何をしている?
- SSB, 赤外発散, (漸近)対称性の関係のより深い理解. 光子, 重力子はNGボソン?

cf. 1-form sym or large gauge?

[Ferrari, Picasso (1971), Nakanishi, Ojima (1979), Hata (1982)]

- ホログラフィーへの示唆.

THANK YOU

Large gauge transformation

- Lorenz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$

- Residual gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \epsilon$

  $\Box \epsilon = 0$

- Large gauge transformation

$$\epsilon(x) = \int d^2\Omega' \sqrt{\gamma\left(\Omega'\right)} G\left(x;\Omega'\right) \epsilon^{(0)}\left(\Omega'\right),$$

$$G\left(x;\Omega'\right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{x^\mu x_\mu}{\left(q^\mu x_\mu\right)^2} \quad \text{with} \quad q^\mu = \left(1, \hat{q}\left(\Omega'\right)\right)$$

Kulish-Faddeevのドレス状態

[Kulish & Faddeev (1970)]

- 彼らはChungのドレス状態を導出しようと試みた.

彼らの仮定: 漸近領域で相互作用を少し残す.
(soft photon近似~電子のアイコナール近似と同じ).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^{\mu}_{\mathrm{pp}}A_{\mu}$$

この相互作用を取り入れた漸近状態 $|\psi(t)\rangle_I = e^{R_{\mathrm{KF}}(t)}|\psi\rangle_{\mathrm{GB}}$　　$k^{\mu}a_{\mu}|\psi\rangle_{\mathrm{GB}} = 0$

Gupta-Bleuler

$$R_{KF}(t) := \sum_n \int_{\mathrm{soft}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{e_n p_n^{\mu}}{p_n \cdot k}\left[a_{\mu}(\vec{k})e^{i\frac{p_n\cdot k}{E_n}t} - a_{\mu}^{\dagger}(\vec{k})e^{-i\frac{p_n\cdot k}{E_n}t}\right]$$

- 彼らの間違い: このドレス状態は $k^{\mu}a_{\mu}|\psi\rangle_I = 0$ を満たさないので良くない.

満たすように手で係数を修正...

Physical state condition

- 相互作用を残すなら、その相互作用を考慮した物理状態条件を課すべき.

  九後-小嶋条件! $Q_B \left|\psi\right\rangle = 0$ [Kugo-Ojima (1978)]

  今の場合、 $\left[k^\mu a_\mu(\vec{k}) + e^{i\omega t} j^0_{\mathrm{pp}}(t,\vec{k})\right] \left|\psi(t)\right\rangle_I = 0$ in Feynman gauge

- 修正前のKF状態はこの条件の解.

  $$\left|\psi(t)\right\rangle_I = e^{R_{\mathrm{KF}}(t)} \left|\psi\right\rangle_{\mathrm{GB}} \qquad k^\mu a_\mu \left|\psi\right\rangle_{\mathrm{GB}} = 0$$

- Gauss law条件だけからドレス状態は出てくる. [平井, 杉下 (2019)]

  Kulish-Faddeevの行った修正は不要.

KF dress is not enough

- 修正前のKFドレスでも不十分

KFドレス状態は有限(だが十分大きい)時刻での状態

$$S_{\beta,\alpha}(t_f, t_i) = \ {}_{GB}\langle\beta|\, e^{-R_{KF}(t_f)} U_I(t_f, t_i) e^{R_{KF}(t_i)}\, |\alpha\rangle_{GB}$$

通常の$i\epsilon$処方を使うと、 $\simeq \ {}_{GB}\langle\beta|\, U_I(\infty, -\infty)\, |\alpha\rangle_{GB}$

$|\alpha\rangle_{GB}$, $|\beta\rangle_{GB}$ がFock状態なら普通のS行列要素 → 赤外発散

- 実際計算してみても赤外発散が消えていないことがわかる.

さらに漸近対称性の保存則も満たされていない. [平井, 杉下 (2019), (2021)]

物理条件 $k^\mu a_\mu \, |\psi\rangle_{\rm GB} = 0$ は $|\psi\rangle_{GB}$ がFock状態であることを要請していない.

まだ横波の光子をドレスする余地がある.