

ヤンミルズ理論における分数インスタントン

伊藤 悦子 (慶應義塾大学/高知大学/ 大阪大学 RCNP)

JHEP 1905 (2019) 093

What's new

ゼロ温度のpure SU(3)ゲージ理論の弱結合領域に分数インスタントンをモンテカルロ計算で見つけました

時空構造 $\mathbb{T}_{L_s}^3 \times S_{L_\tau}^1$ ただし、 $L_s \ll L_\tau$

空間2方向(x,y)に中心対称性によるツイスト境界条件

B.C. for (x,y,z, τ)=(TBC,TBC,PBC,PBC)

分数インスタントン配位は、

$\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ 上の $Q=1/Nc$ を持つ古典解の持つ性質を(ほぼ)満たす
(Polyakov loop, size moduli)

Witten, NPB202(1982)253 (section7)

Motivation

リサーチジェンス構造: 不定虚部が相殺し物理量が不定性なく決まる

摂動級数展開を複素に拡張して
ボレルresumしても現れる特異
点を避けることによる不定虚部

$$B(g^2) = \text{Re}B \pm i\pi \frac{1}{\beta_0} e^{\frac{8\pi}{\beta_0 g^2(\mu)}} \sim e^{-2nS_I/N}$$

整数inst.作用の1/Nの重み

Q=1/Nのインスタントン背景
周りからの寄与

Yang-Mills 理論の弱結合領域に分数インスタントンはいるのか？

Argeres and Unsal, Phys.Rev.Lett.109(2012) 121601

$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^1$ (低次元有効モデルでは $\mathbb{R} \times S^1$ でうまくいく例多数)

慶応グループなど

Motivation

Yang-Mills 理論の弱結合領域に分数インスタントンはいるのか？

- (1) 弱結合に注目したい (α_s の計算を思い出す)
- (2) 繰り込みスケール ($\sim 1/L_s$) が大きい。つまり L_s が小さい
- (3) 周期的境界条件では摂動論真空につながらない (toron問題)
非自明な境界条件が必要 (Schroedinger functional, twist)
- (4) 弱結合では「境界条件」「時空構造」に古典解は依存
twisted b.c. にしないと YM 方程式の自己双対解がない
(強結合では古典解は境界条件によらないので測定できてる)

良い境界条件？ 2-dim. twisted b.c.

良い時空構造？ 非等方性 (小さい L_s , 大きい L_τ : $T=0$)

cf.) IR cutoff を入れないと YM の場合 trans-series exp. が破綻

Classical solution on $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ with twist

摂動論の古典解とゲージ変換で繋がる解

Witten, NPB202(1982)253 (section7)

ツイスト境界条件を保つゲージ変換 $U_\mu(n) \rightarrow \Lambda(n)U_\mu(n)\Lambda^\dagger(n + \hat{\mu})$

z方向(コンパクト、周期的境界条件)

$$U_\mu = e^{igA_\mu}$$

$$\Lambda(n + \hat{z}N_s) = e^{2\pi i l_z / N_c} \Lambda(n)$$
$$l_z = 0, 1, \dots, N_c - 1$$

\mathbb{Z}_{N_c} のゲージ変換も許す

Topological charge

$$Q = \frac{1}{8\pi^2} \int \text{Tr}(F \wedge F)$$
$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr}(\Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}d\Lambda)$$
$$= \frac{l_z n'}{N_c} + \text{integer}$$

Polyakov loop in z-direction

$$P_z = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \exp \left[i \int A_z dx \right]$$

Gauge transf. $A_z \rightarrow \Lambda^{-1} A_z \Lambda - i \Lambda^{-1} (\partial_z \Lambda)$

$$P_z \rightarrow \frac{1}{N_c} \text{Tr} \exp \left[i \int A_z dx + 2\pi l_z / N_c + 2\pi n \right]$$
$$= e^{2\pi i l_z / N_c} P_z$$

(性質 I) l_z が N_c の倍数ではない場合 Q は分数になりえる

その時同時に P_z が複素平面上で回転する

Property of classical solution(II)

4次元インスタントンのモジュライ・パラメータ: $4QN_c$

$$Q=1 \text{ の解 } A_\nu(x) = \frac{(x - X)_\nu \eta_{\mu\nu}}{(x - X)^2 + \rho^2}$$

X : 4 自由度(trans. moduli)

ρ : 1 自由度 (size moduli)

η : $4N_c - 5$

$Q = 1/N_c$ の時: 4 自由度

Yamazaki-Yonekura(JHEP 1707, 088 (2017))

(y, τ) 方向のtranslational moduli 2 自由度

$\langle P_z \rangle$ の値 (定数の複素数) 2 自由度

Size moduliがなくなる

(性質2) 分数インスタントンは同じ大きさを持つ

そのサイズはコンパクトな方向の半径

(サイズが大きくなる事はtwisted b.c.によるIR cutoffより禁止)

サイズが小さくなると、分数インスタントンは整数インスタントンに戻ってしまい分数で無くなる)

Lattice setup

Lattice action:

Wilson-Plaquette gauge action

Lattice parameter: $\beta=16.0$, $N_s=12$, $N_\tau=60$

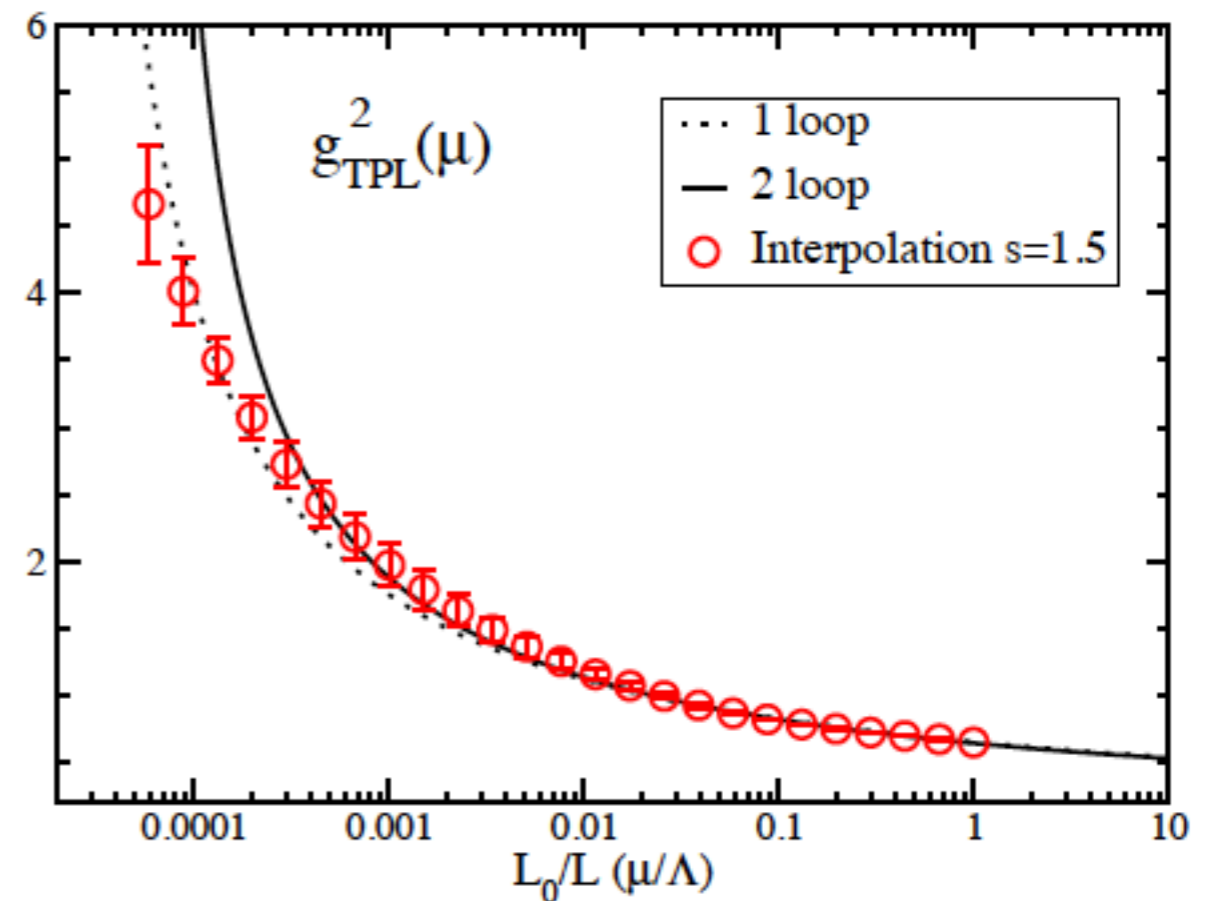
$g^2(1/L_s) \approx 0.7$ TPL scheme: 1-loop consistent

$$L_s \Lambda \approx 1.5^{-24}$$

$$\Lambda = 200[\text{MeV}]$$

$$a \approx 5.0 \times 10^{-6}[\text{fm}]$$

長いautocorrelationが予想
トポロジーは固定される？



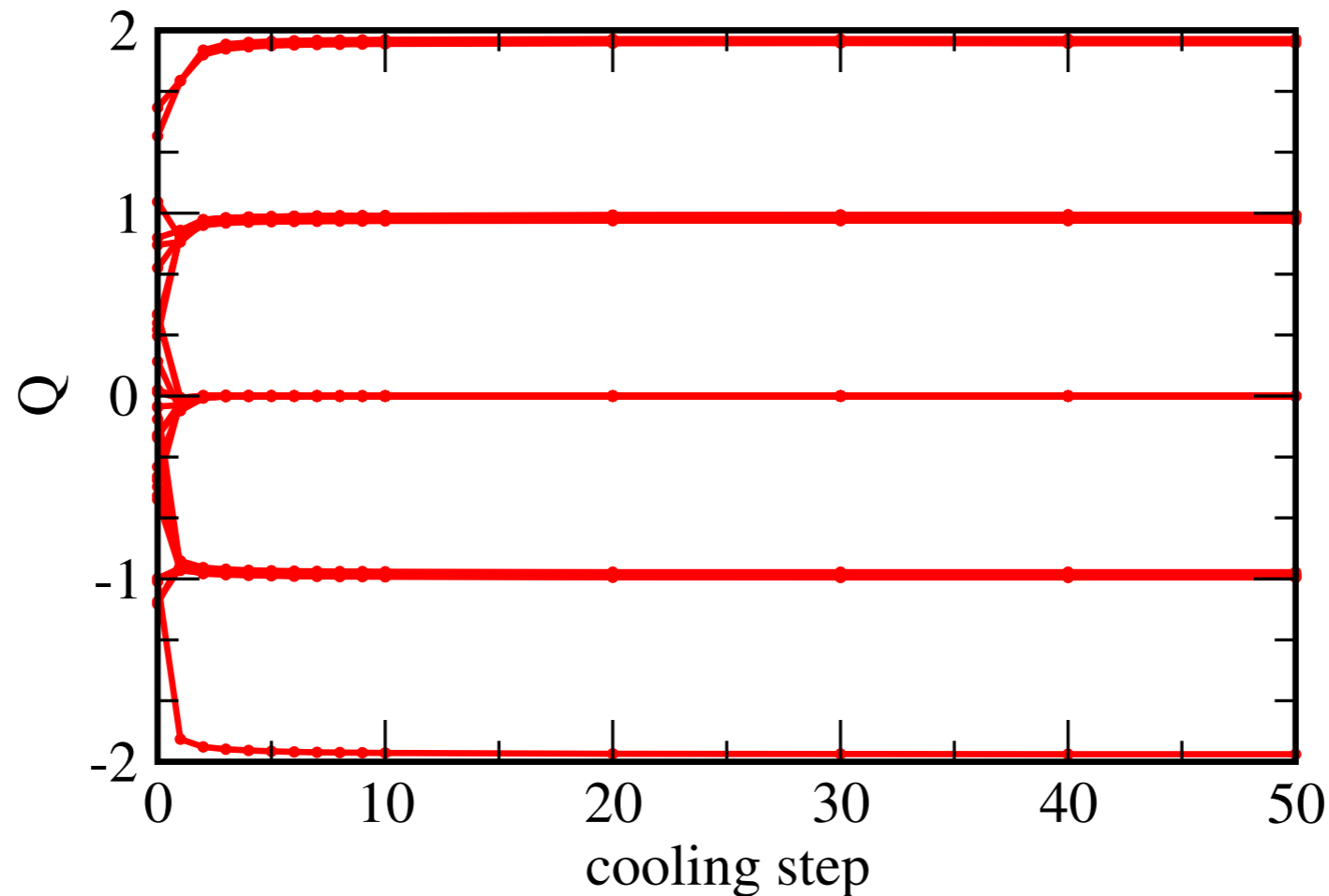
E.I. PTEP(2013) no.8, 083B01

サンプリング法も工夫

Results

cooling法による測定

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$



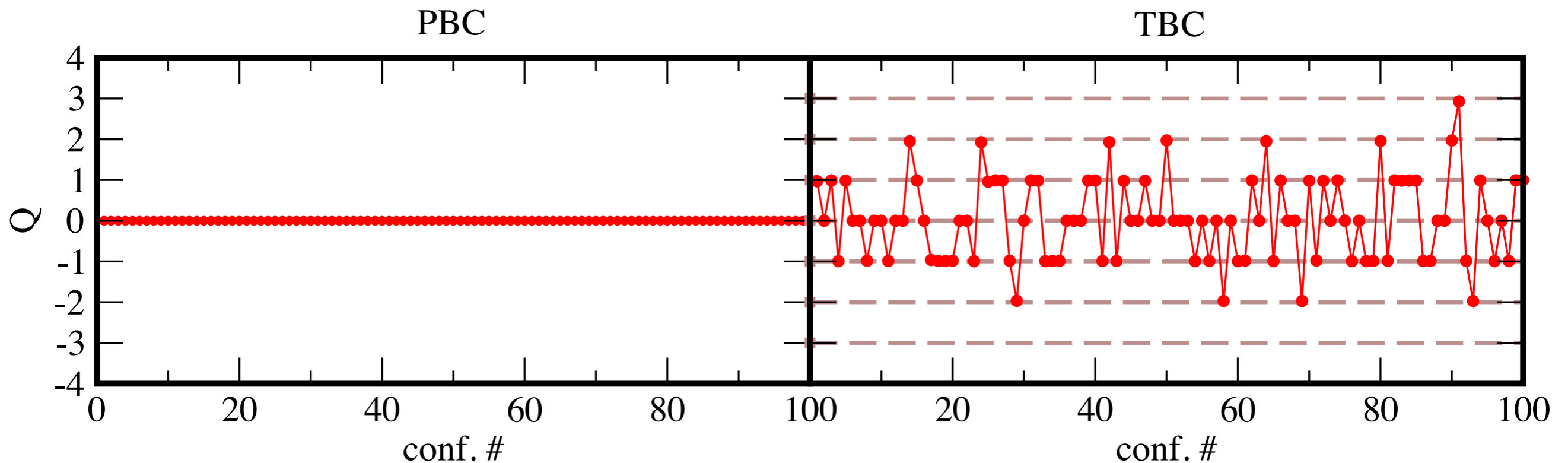
モンテカルロ法で作ったゲージ場はUVゆらぎにより整数の電荷にならない
平均化(smearing)してlow modeだけ取り出す

$\Delta Q/Q \approx 0.04$ の系統誤差は無視してプラトーの値をQ(整数とする)

Total charge(Q)

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

beta=16.0, Ns=12, N τ =60



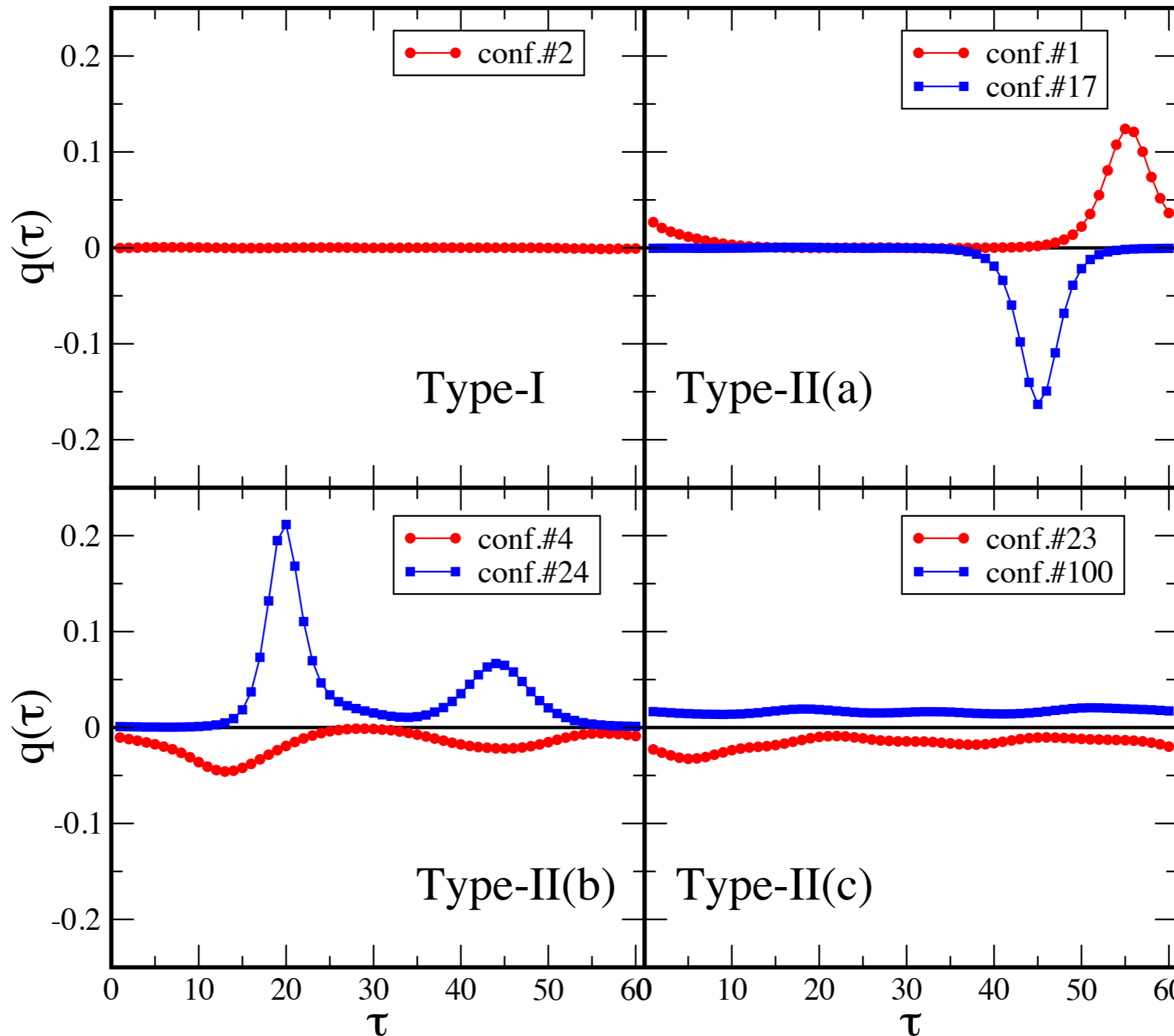
B.C. for $(x,y,z, \tau) = (\text{PBC}, \text{PBC}, \text{PBC}, \text{PBC})$

B.C. for $(x,y,z, \tau) = (\text{TBC}, \text{TBC}, \text{PBC}, \text{PBC})$

Local charge(q)

$$q(\tau) = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{x,y,z} \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x, y, z, \tau)$$

Q=0



Q: 整数

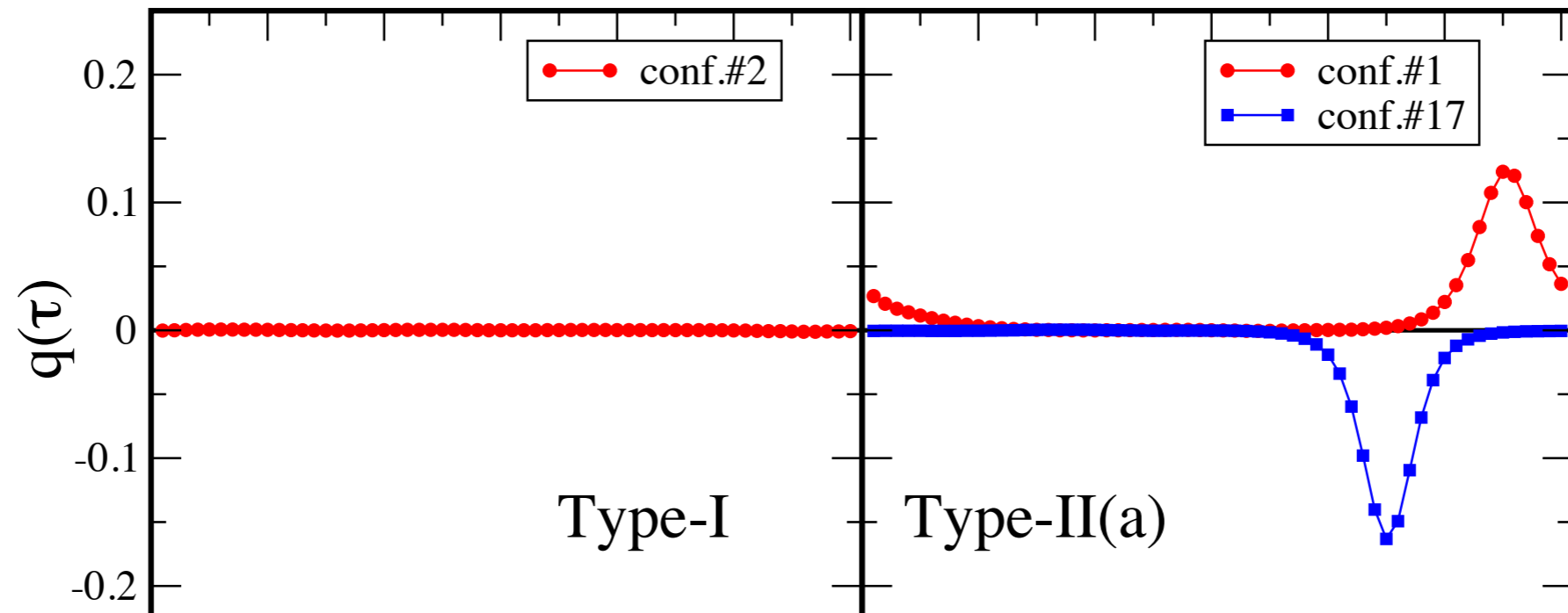
Q: 整数

Q: 整数

Local charge(q)

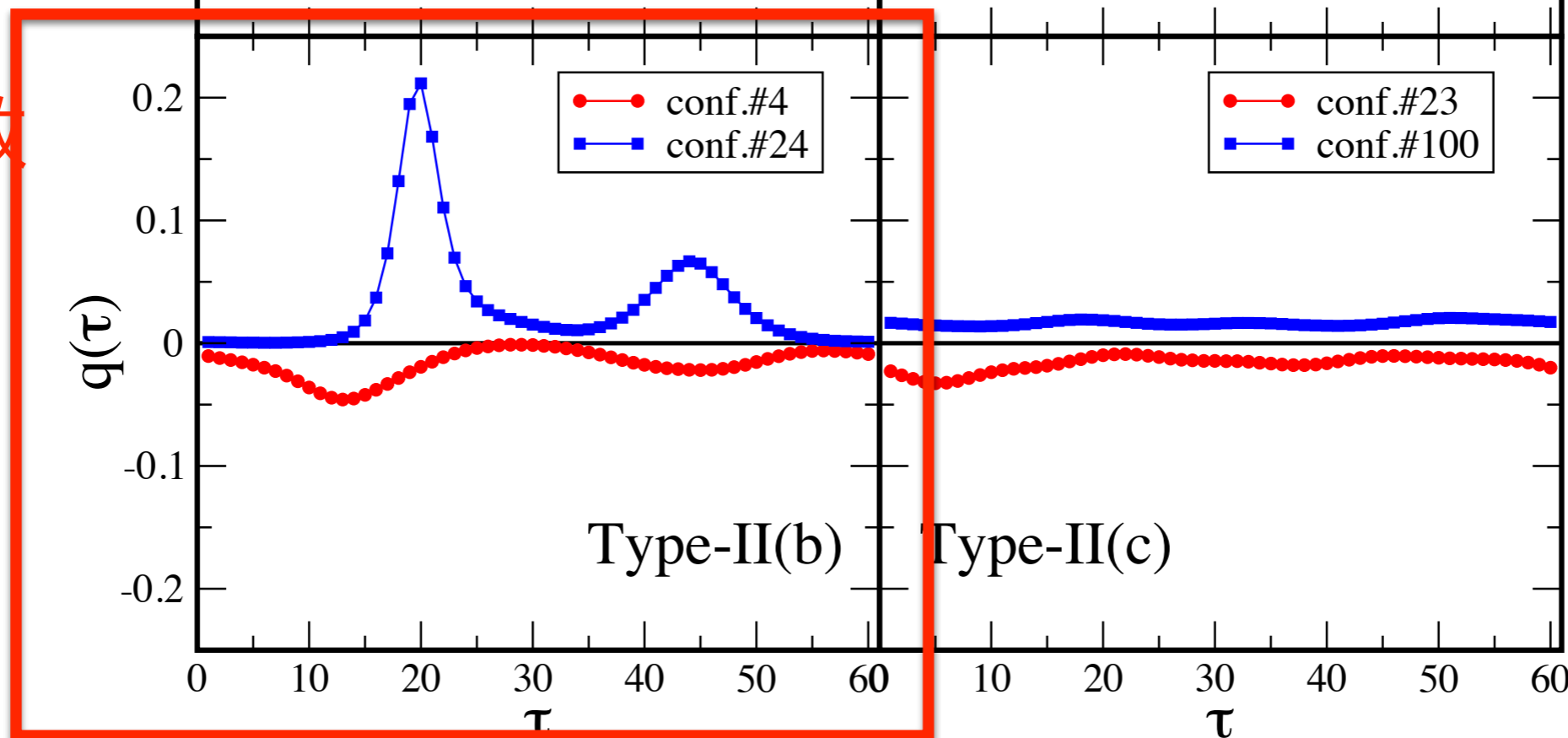
$$q(\tau) = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{x,y,z} \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x, y, z, \tau)$$

Q=0



Q: 整数

Q: 整数

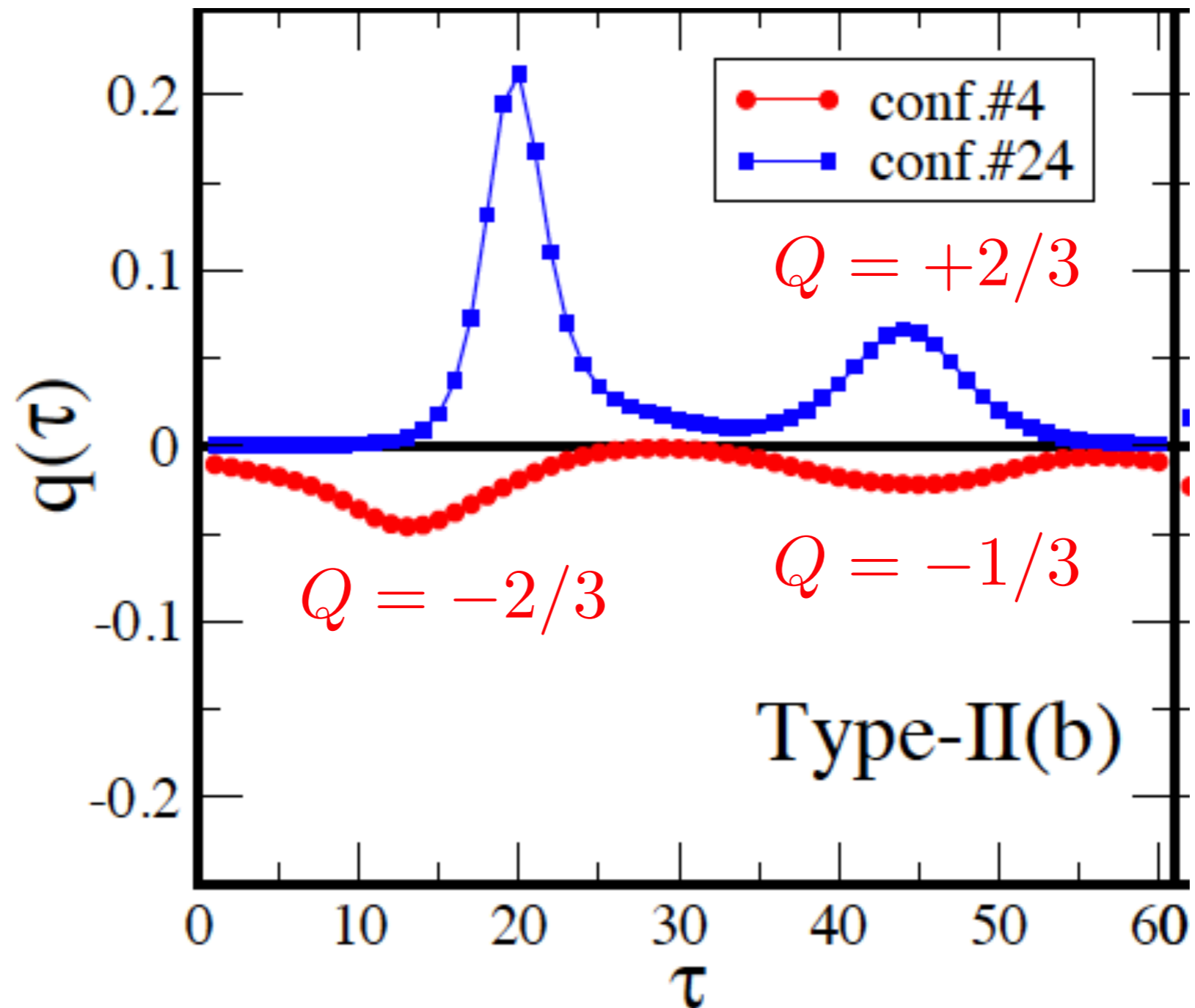


Q: 整数

Local charge(q)

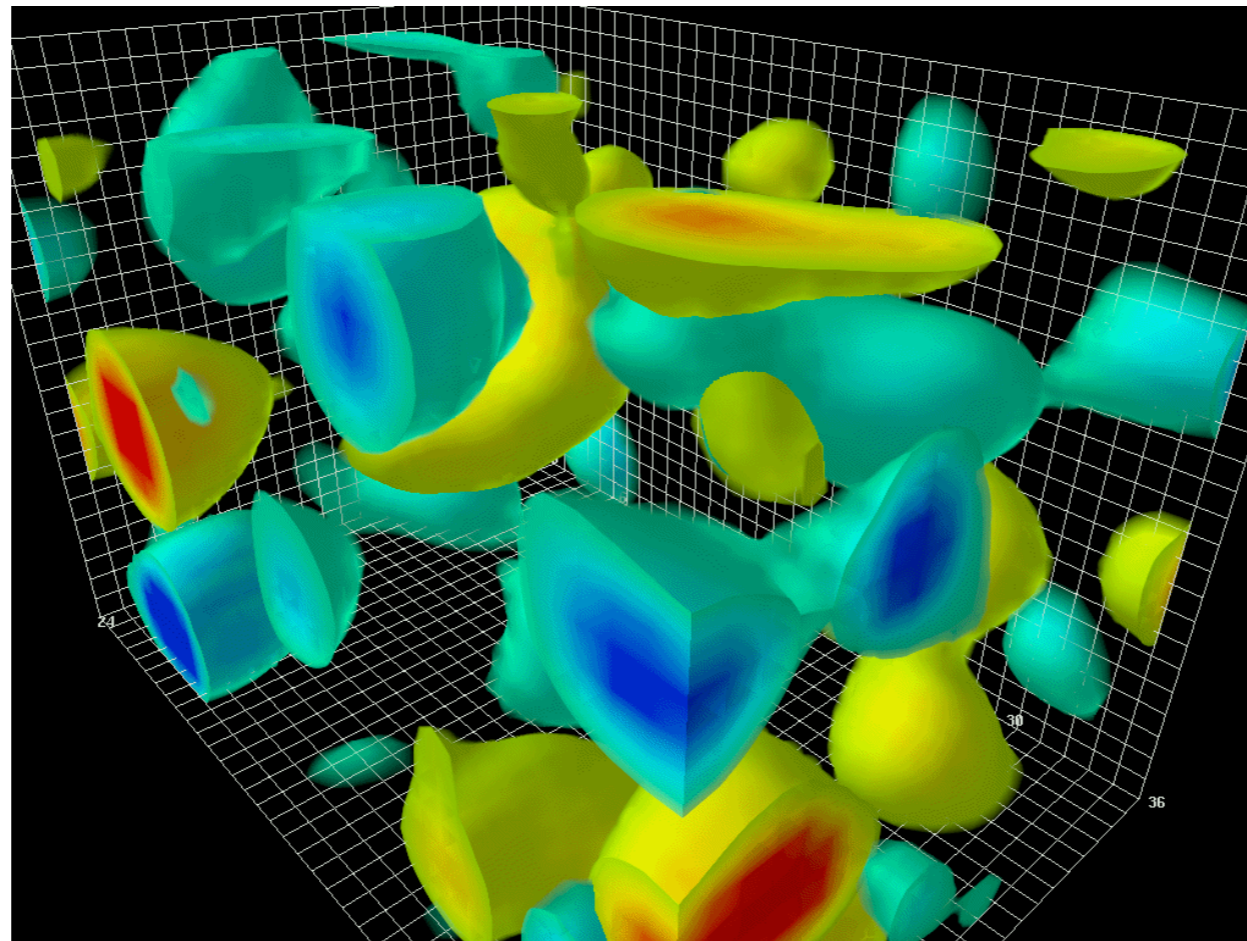
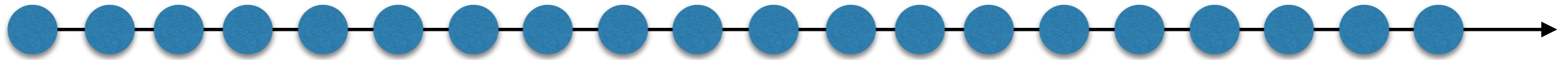
$$q(\tau) = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{x,y,z} \text{Tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x, y, z, \tau)$$

$$Q = +4/3$$



Monte Carlo step dependence

Monte Carlo step (ordinary case)

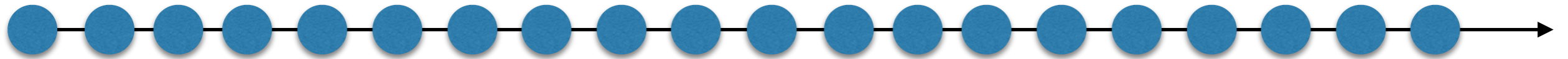


<http://www.physics.adelaide.edu.au/theory/staff/leinweber/VisualQCD/Nobel/index.html>

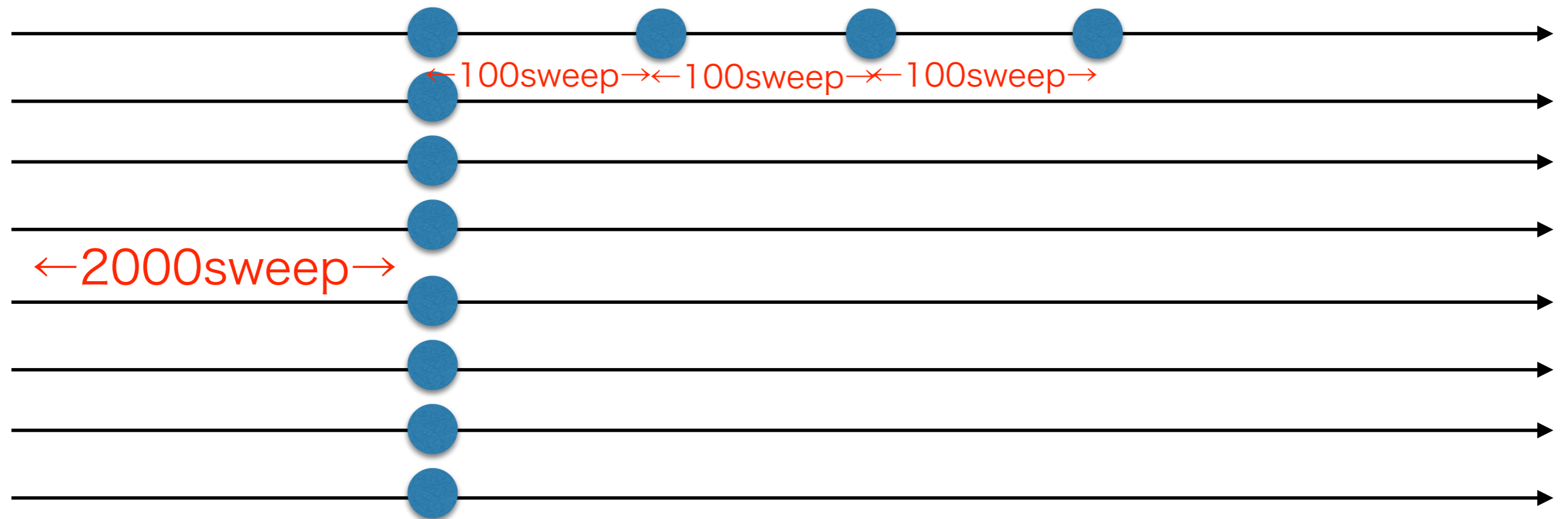
普通はMCstepでトポロジー(Q)が変化
分数インスタントンは？

Monte Carlo step dependence

Monte Carlo step (ordinary case)

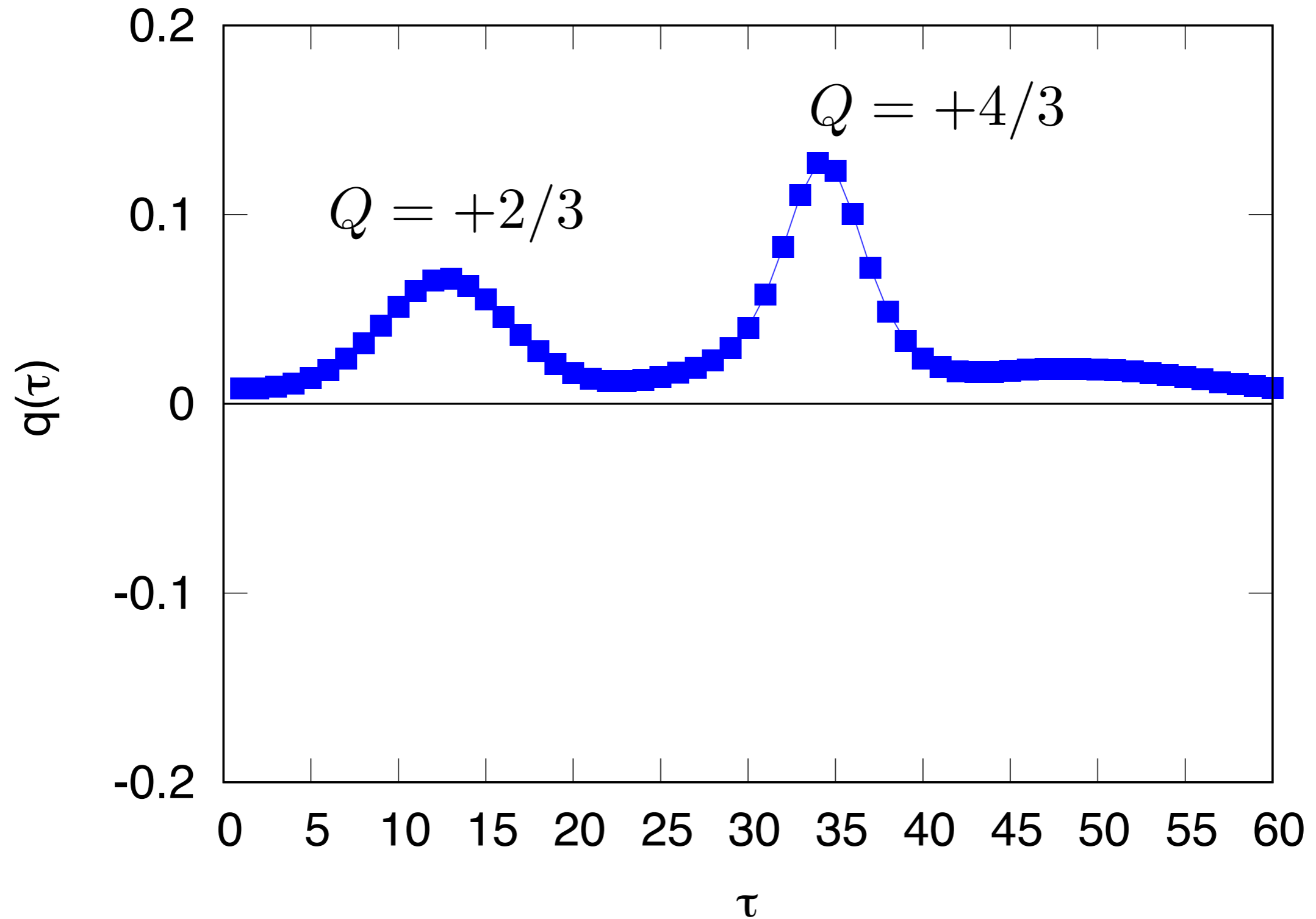


Monte Carlo step (this work)

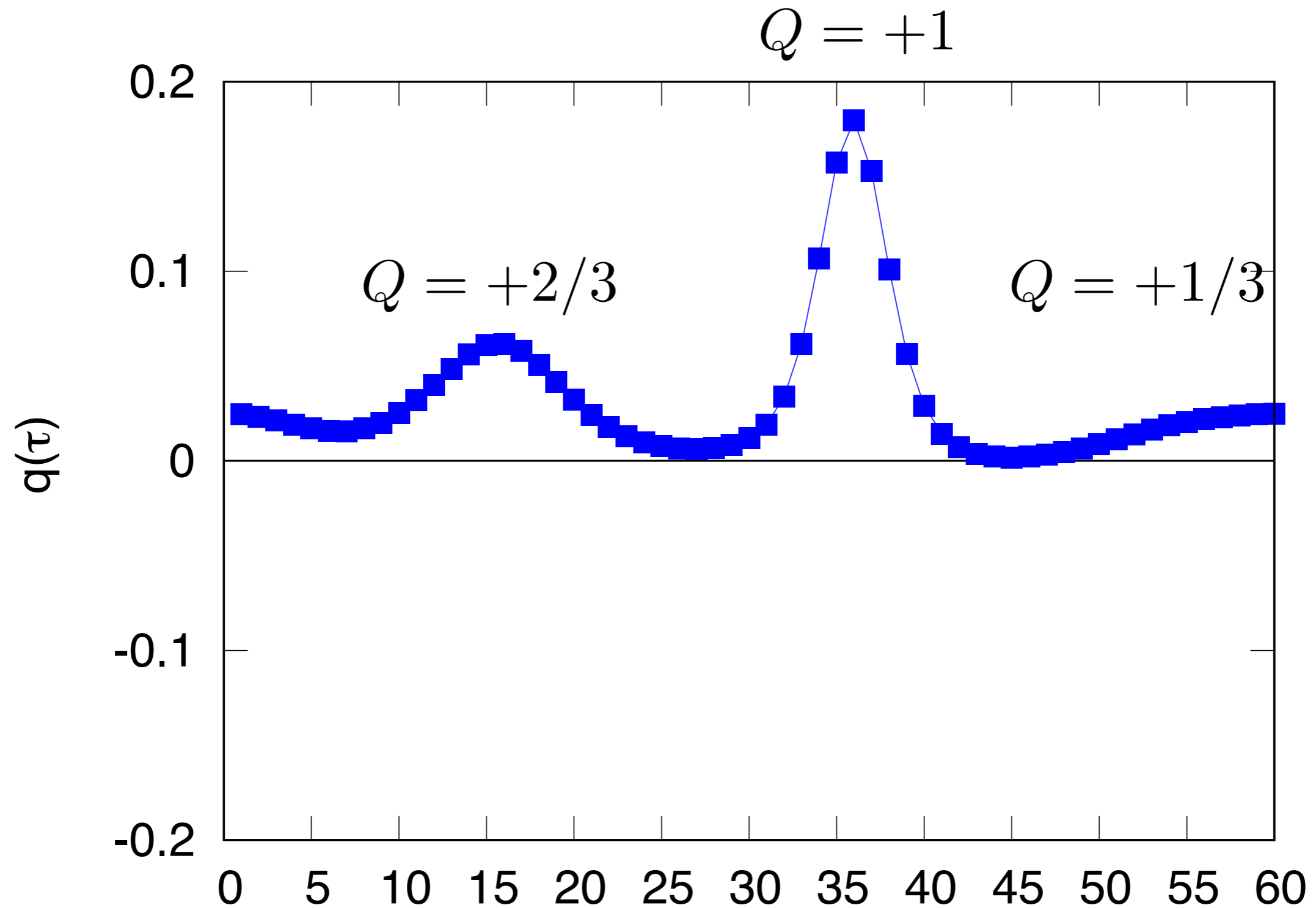


普通はMCstepでトポロジー(Q)が変化
分数インスタントンは？

Monte Carlo step dependence

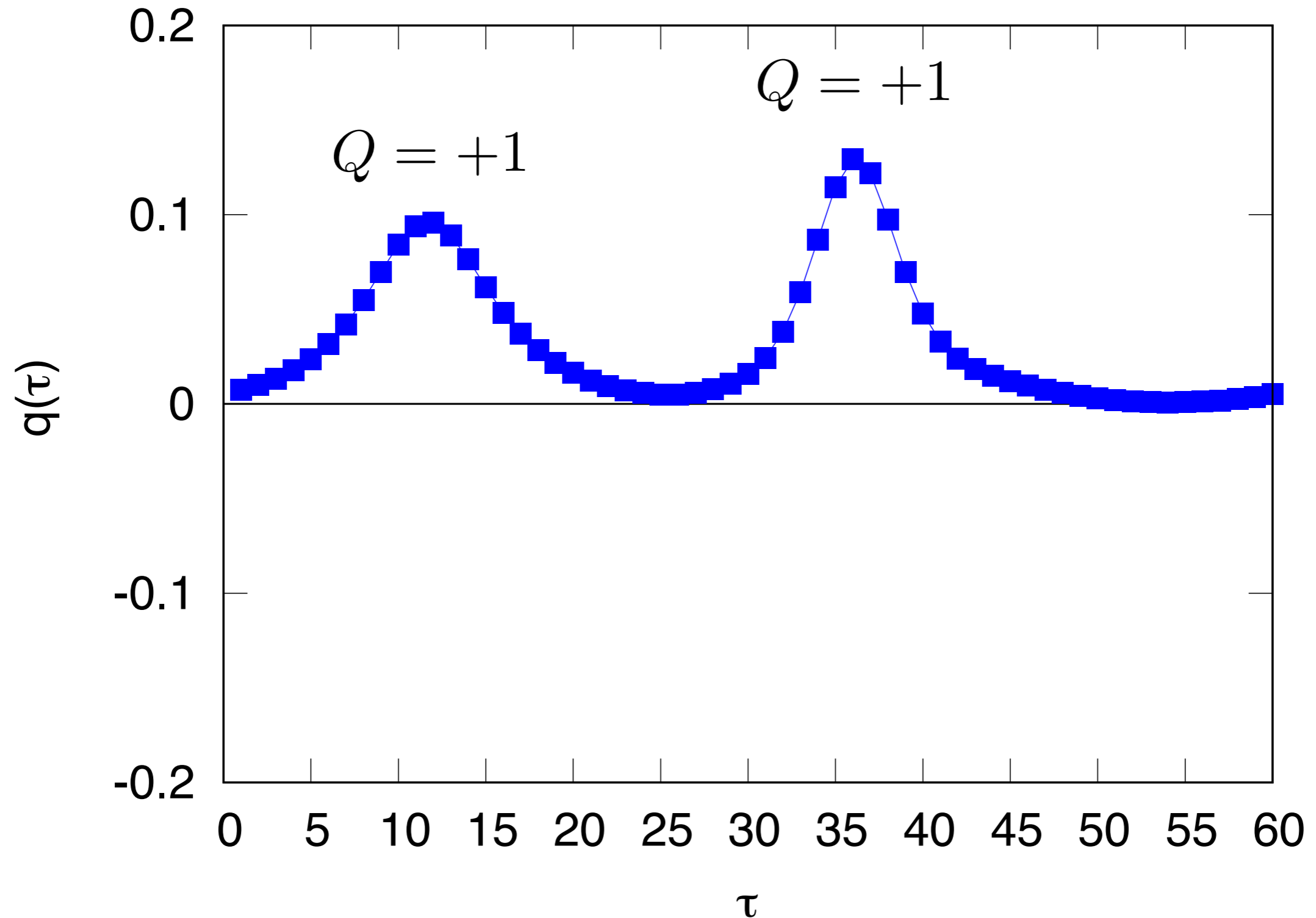


Monte Carlo step dependence



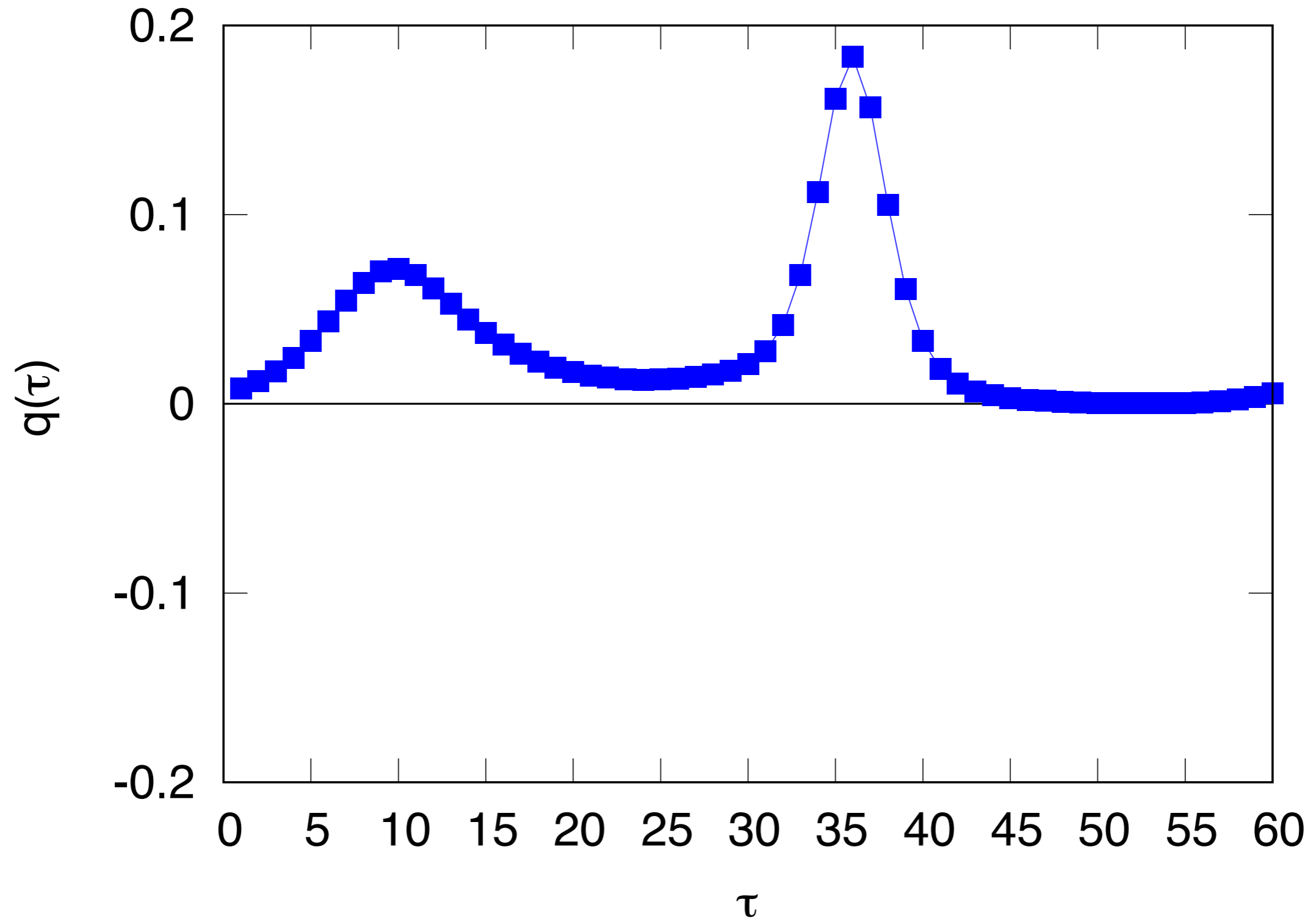
1つの分数インスタントンが
整数インスタントンと分数インスタントンになった

Monte Carlo step dependence

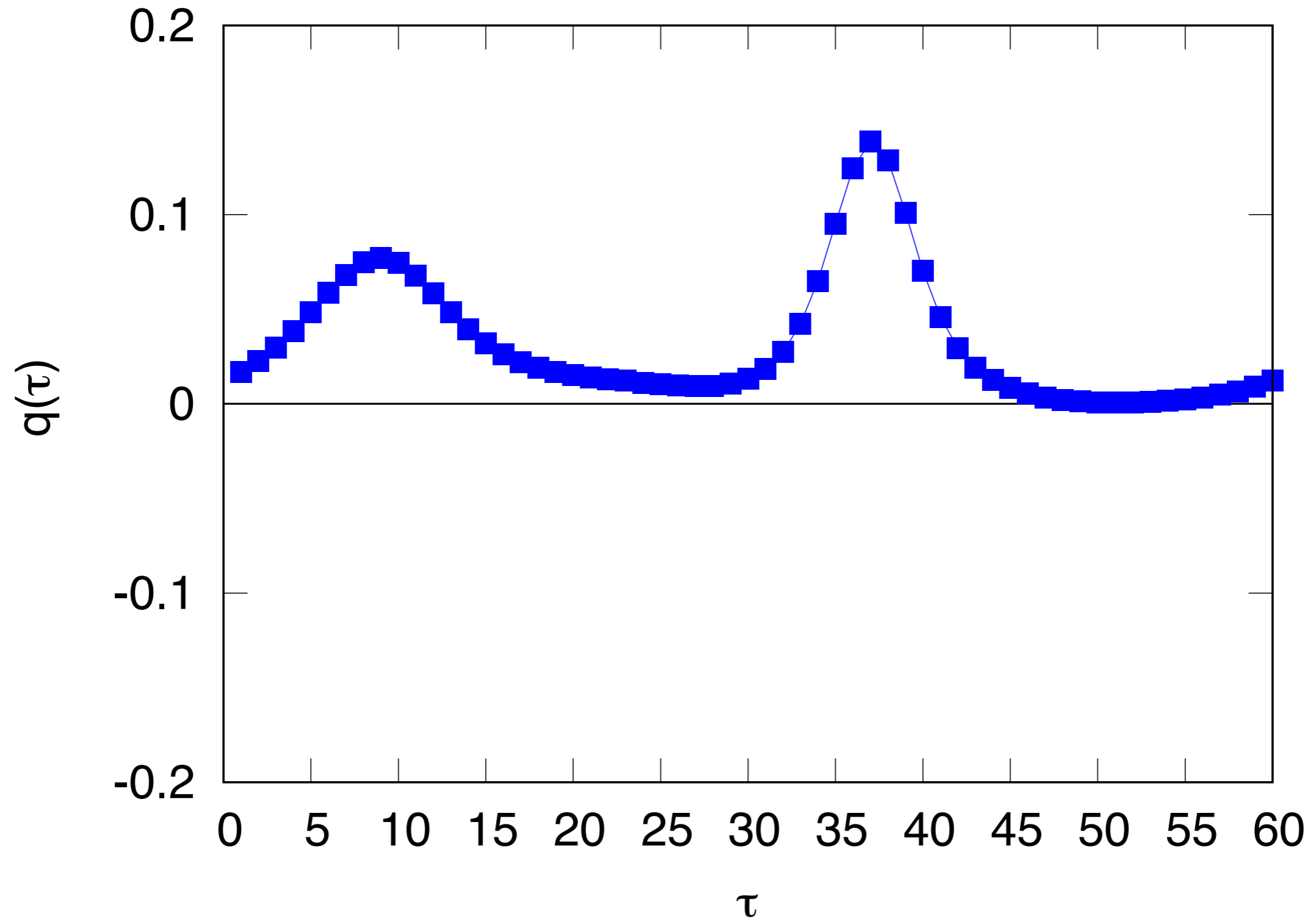


2つの分数インスタントンが整数インスタントンになった

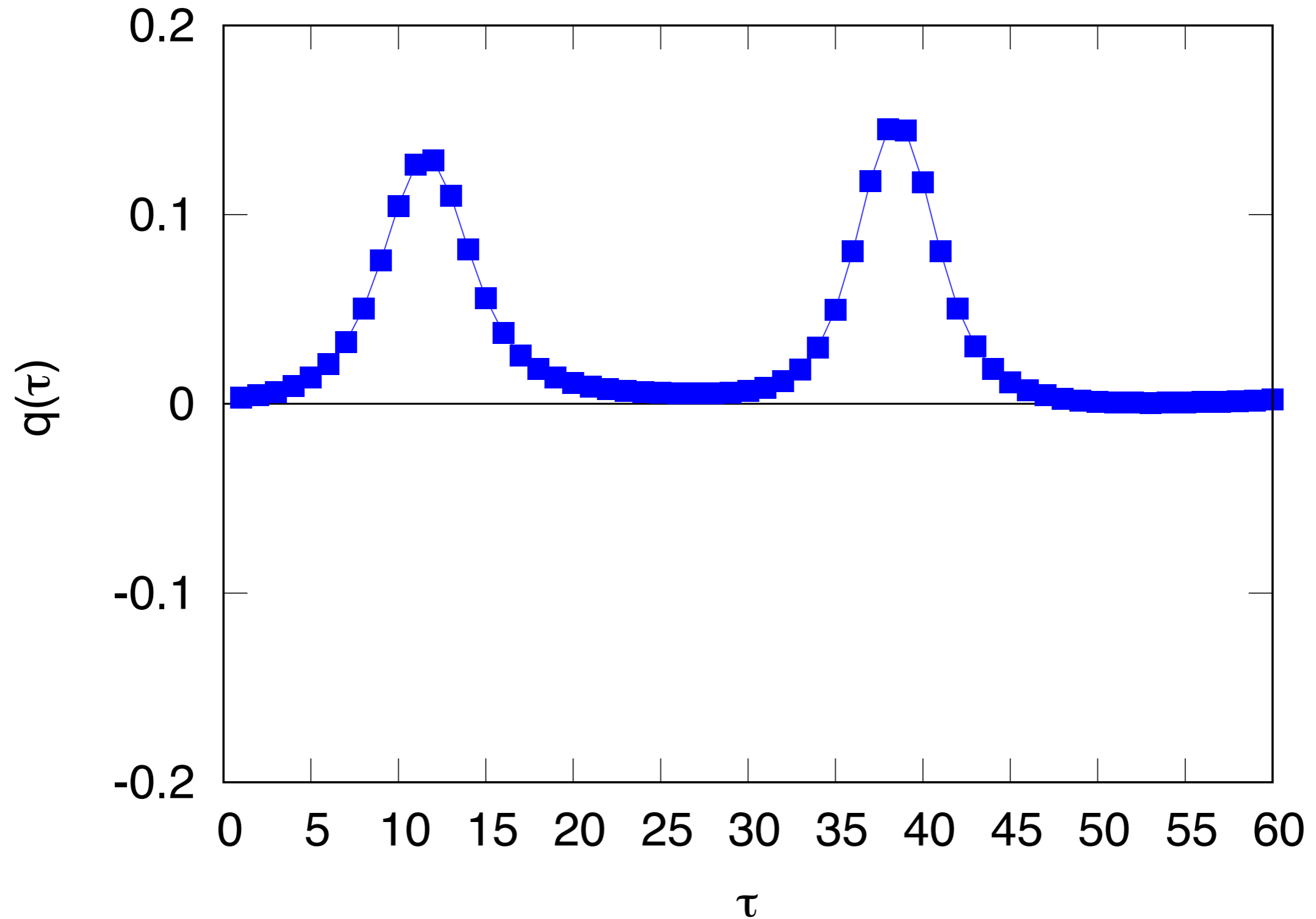
Monte Carlo step dependence



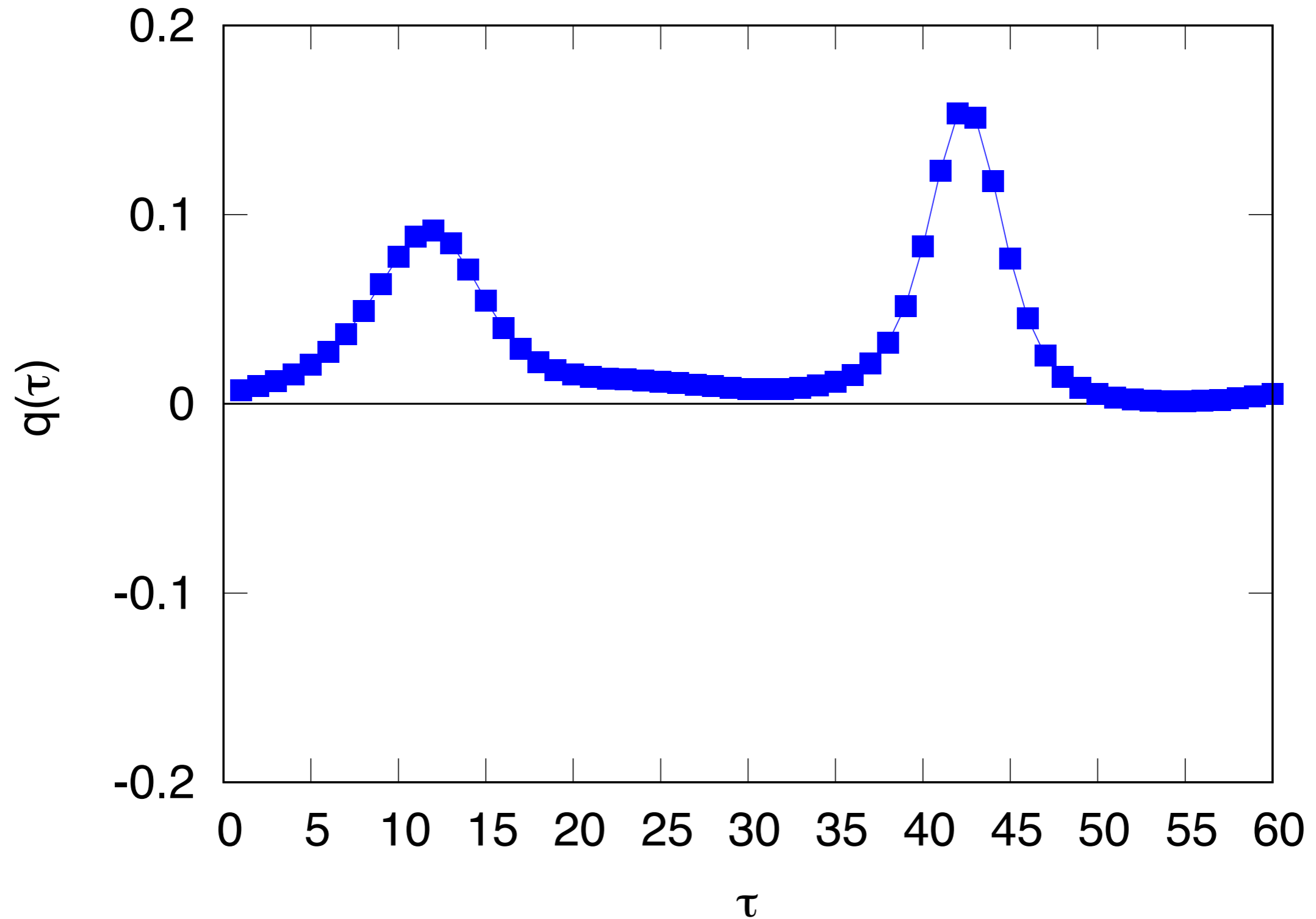
Monte Carlo step dependence



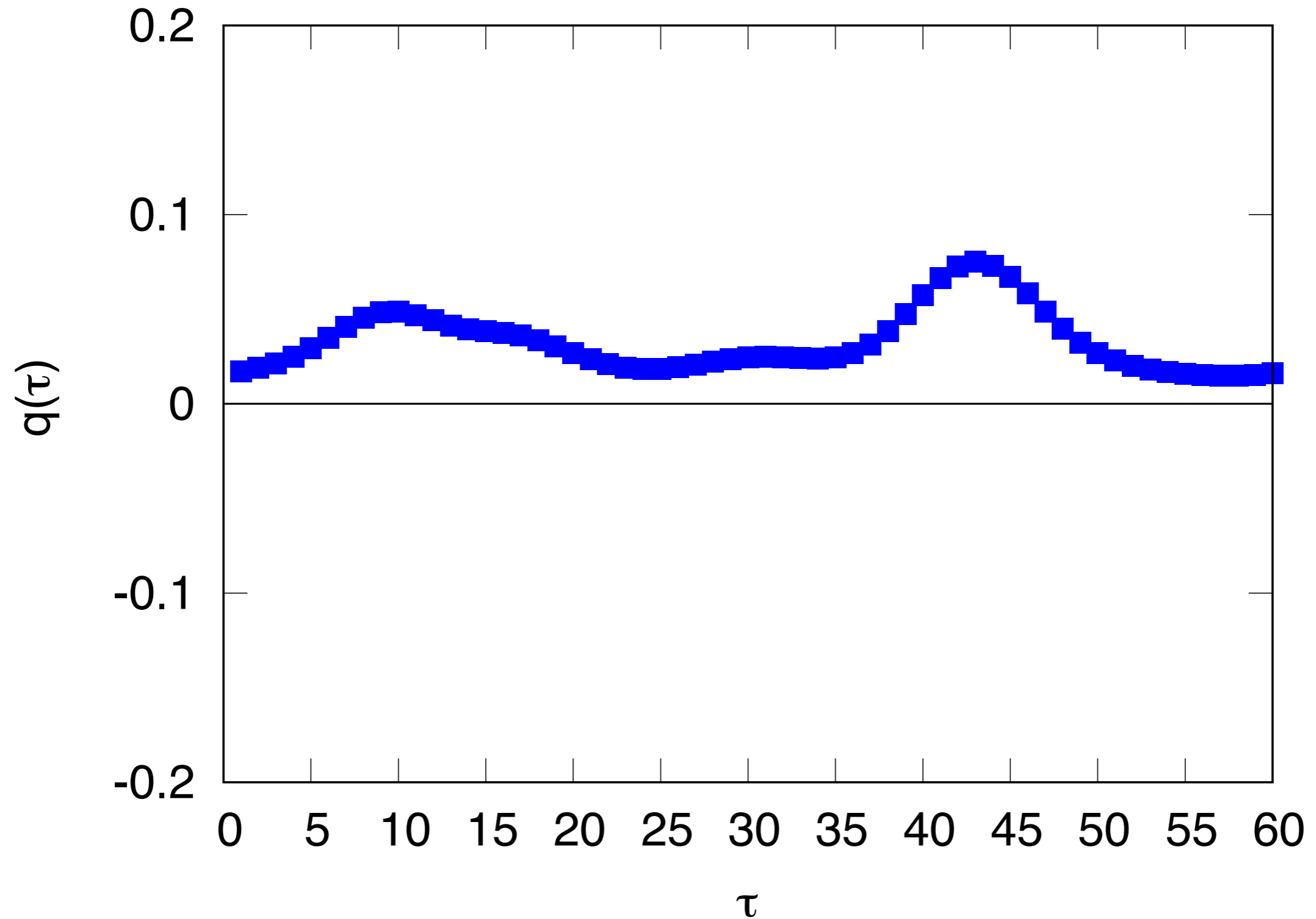
Monte Carlo step dependence



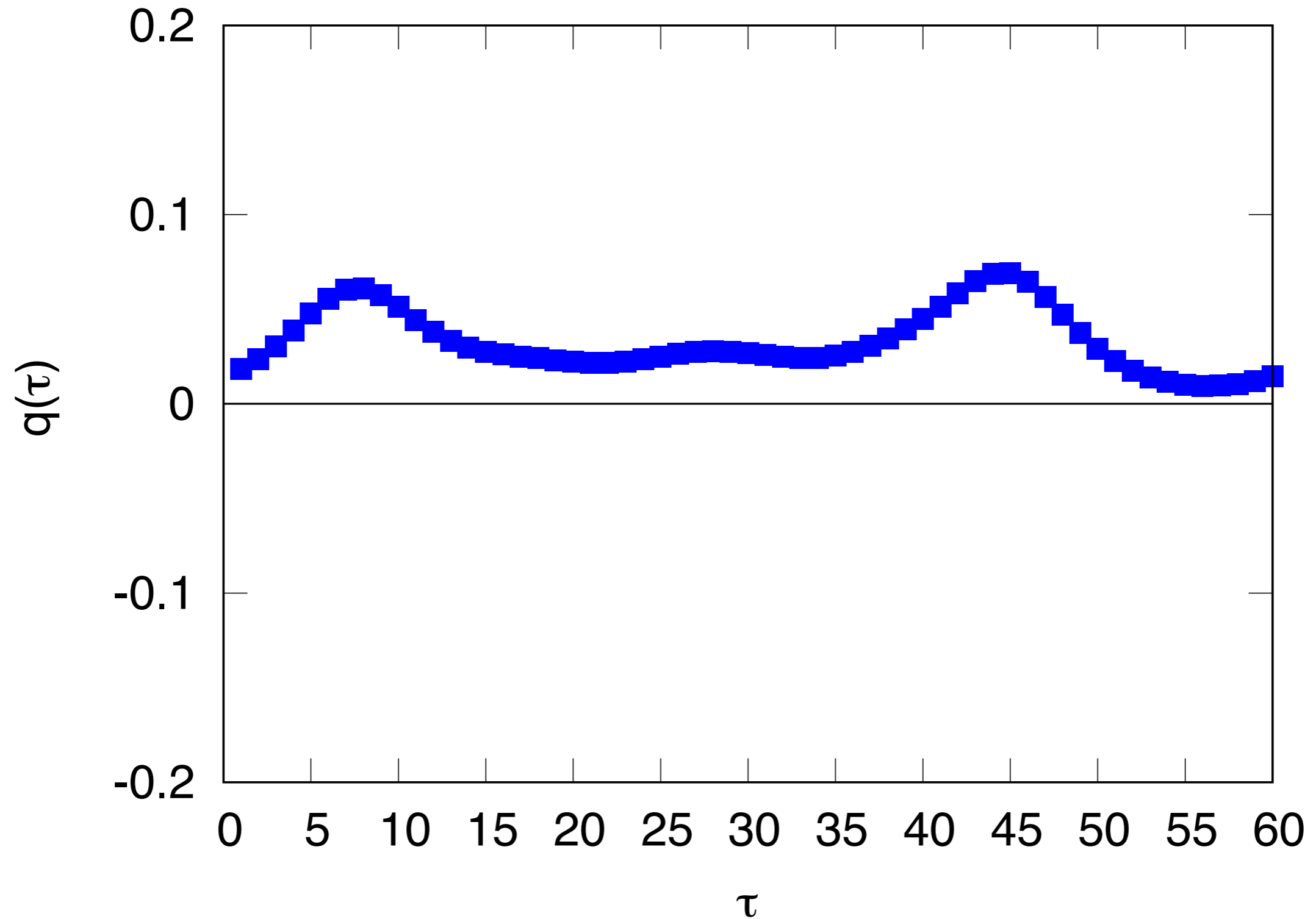
Monte Carlo step dependence



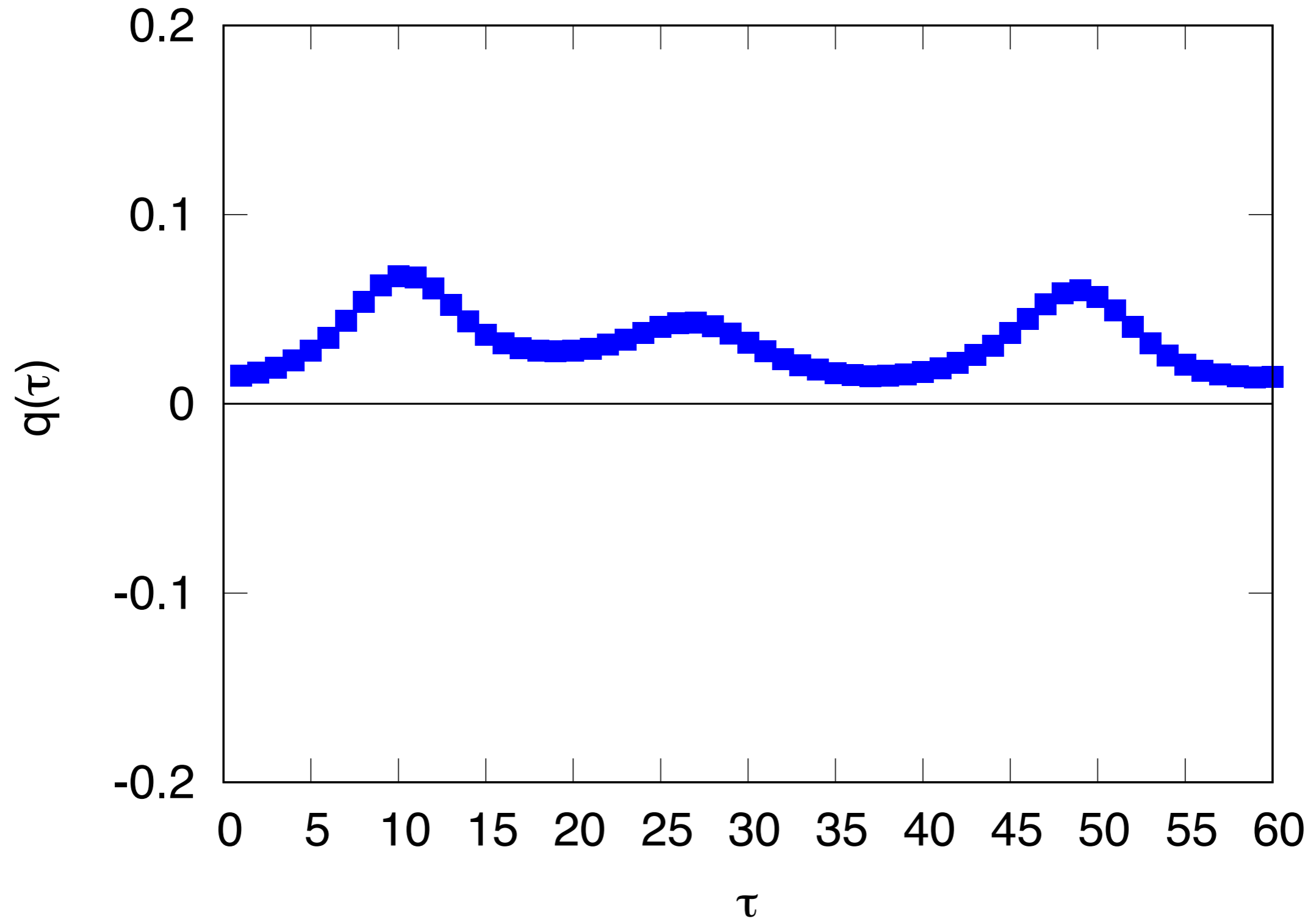
Monte Carlo step dependence



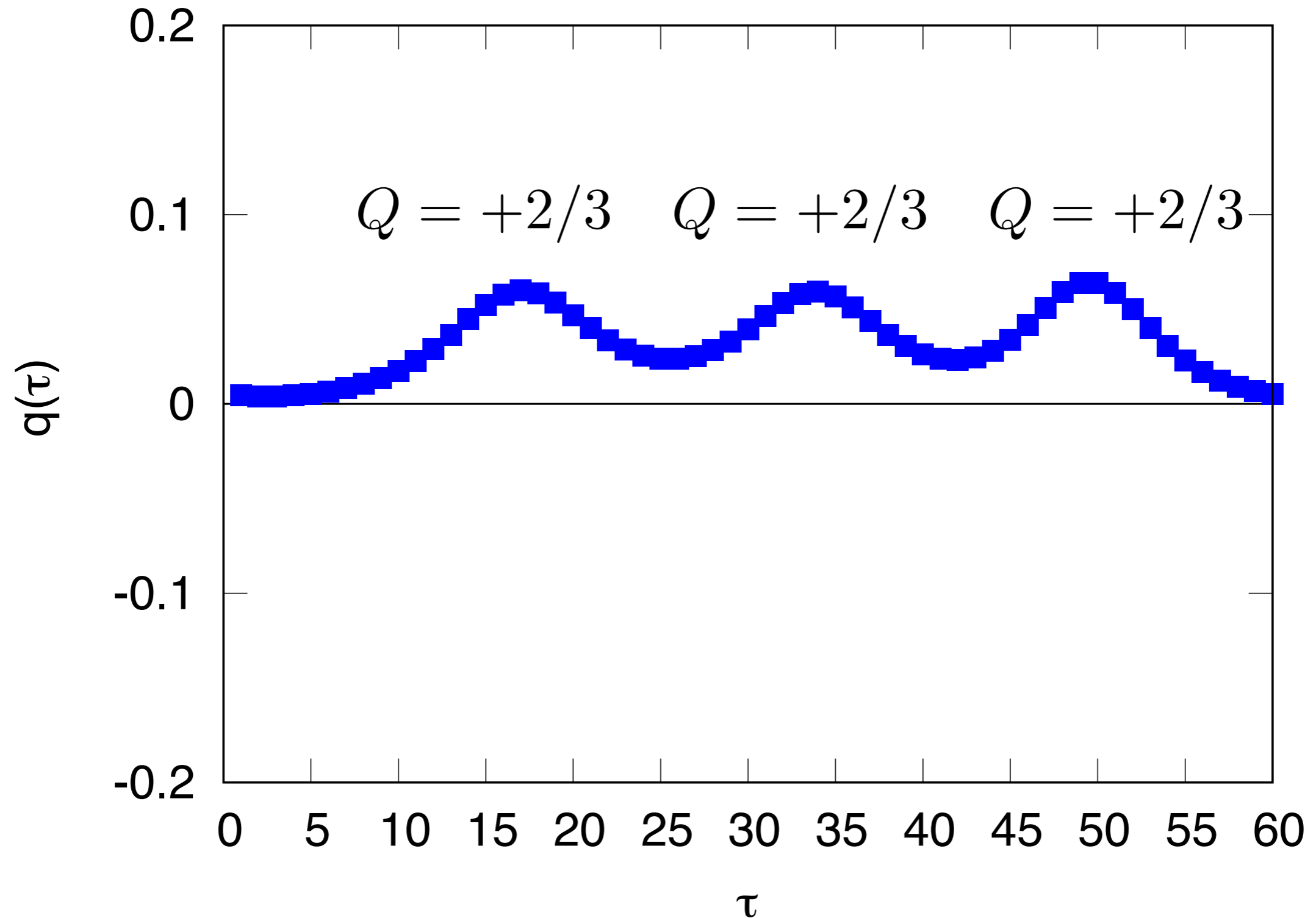
Monte Carlo step dependence



Monte Carlo step dependence

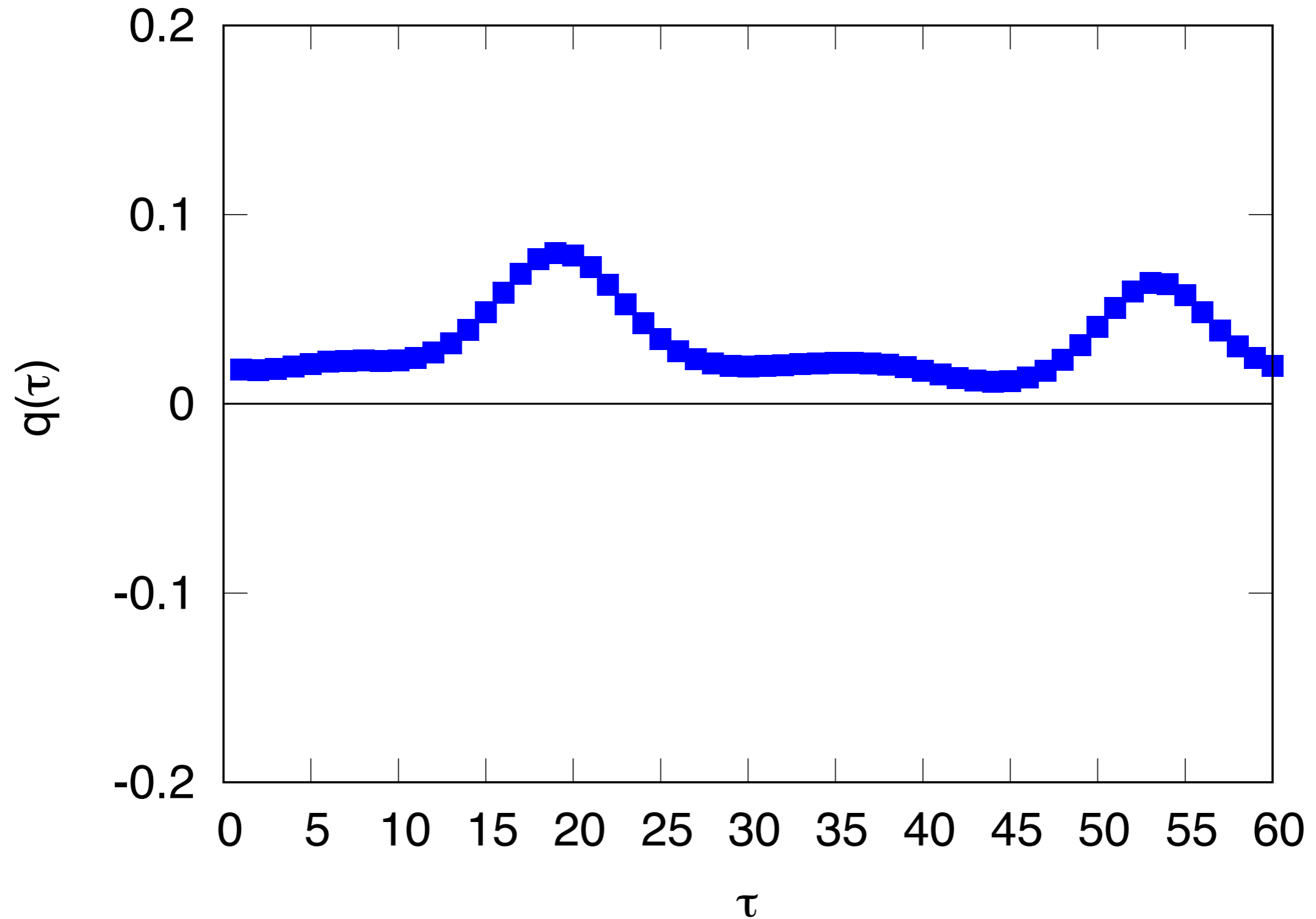


Monte Carlo step dependence

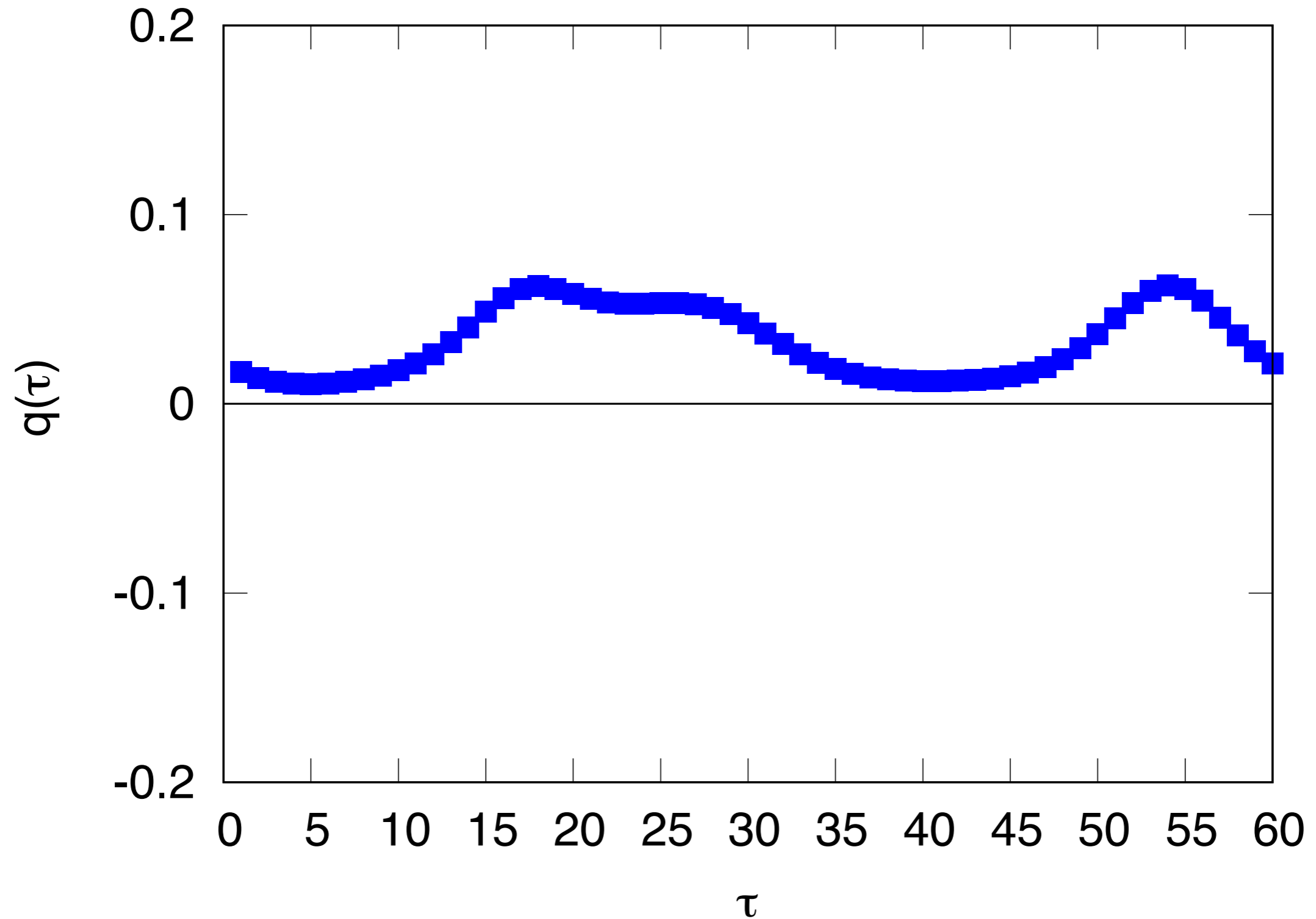


3つの分数インスタントンになった

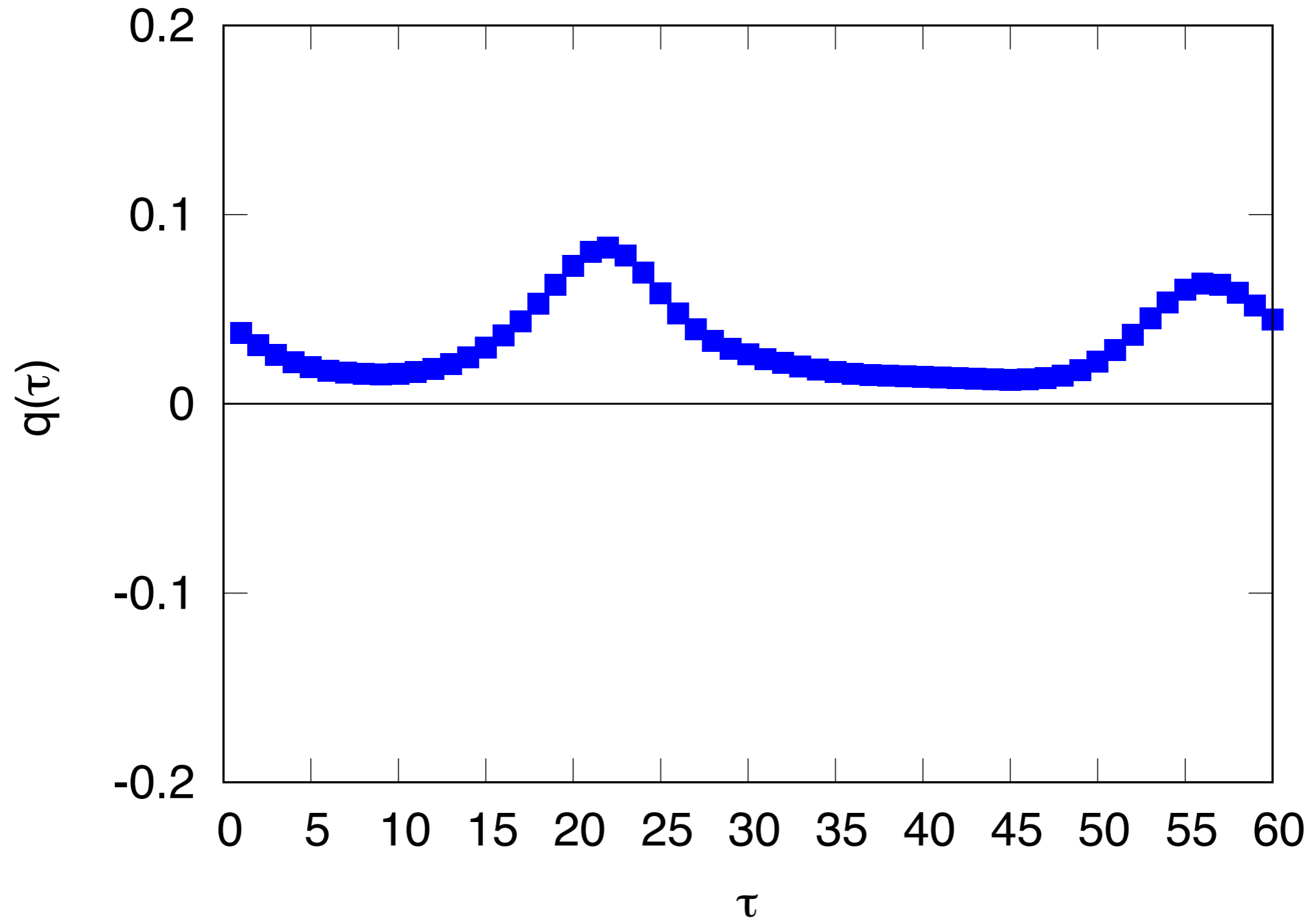
Monte Carlo step dependence



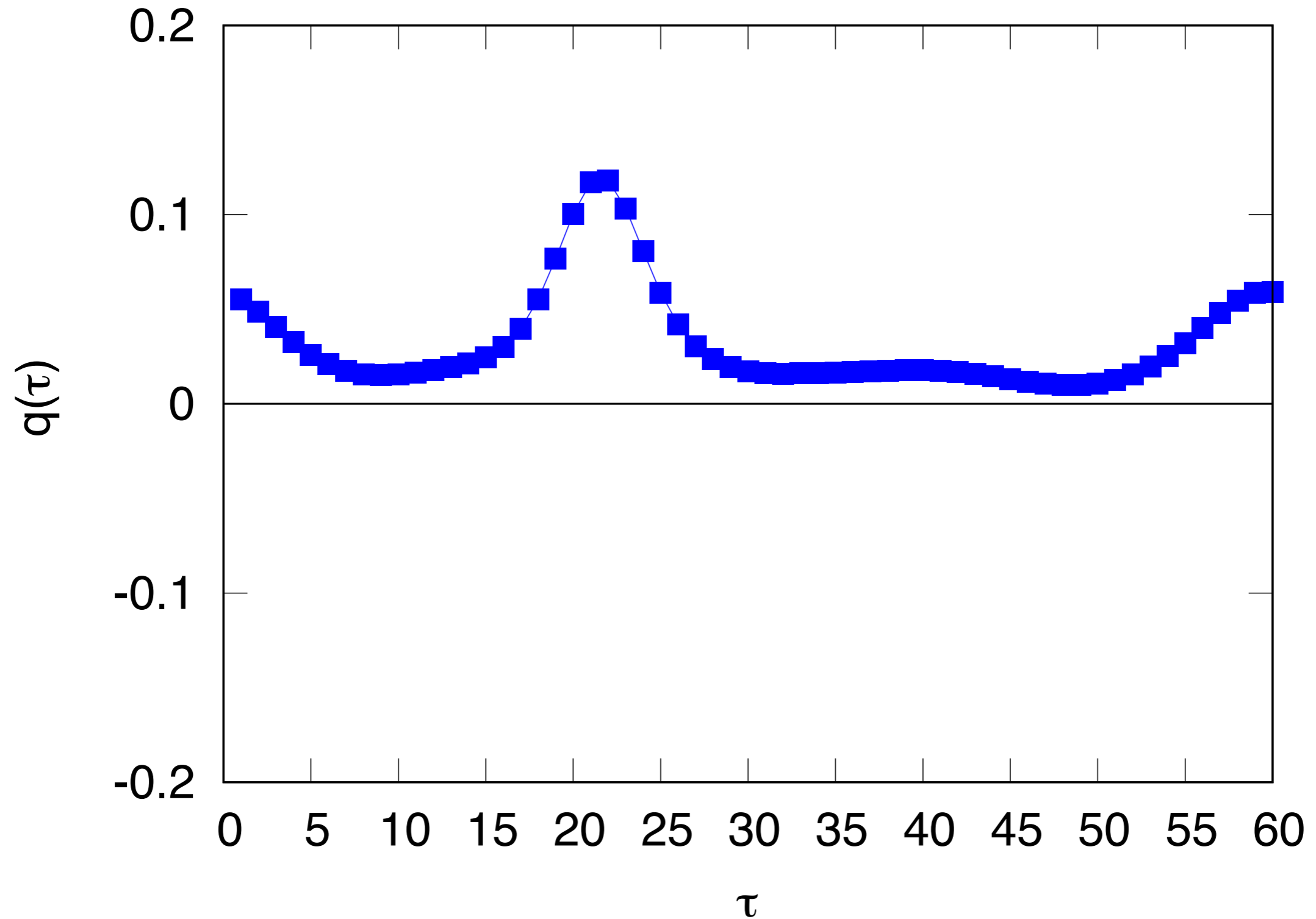
Monte Carlo step dependence



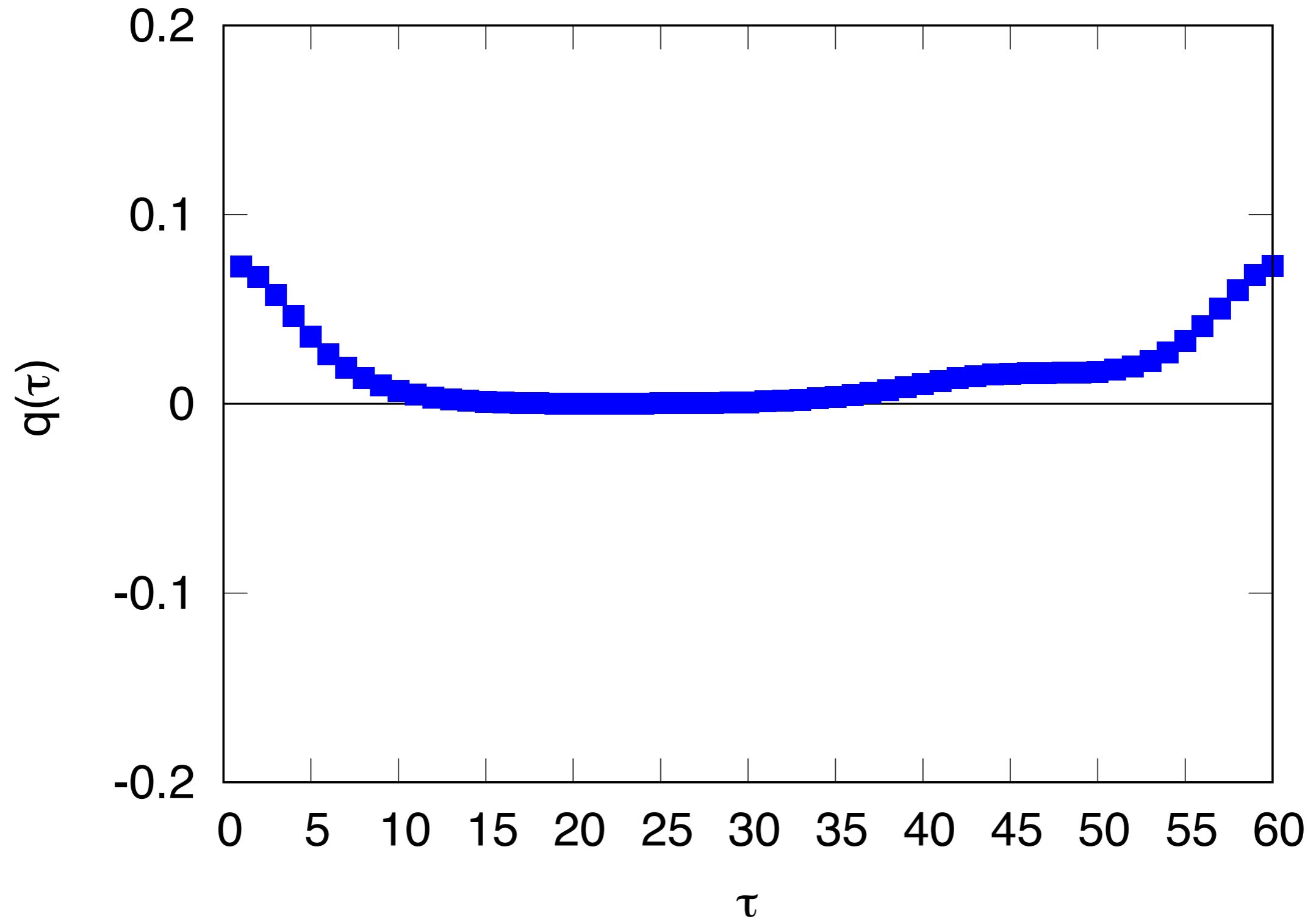
Monte Carlo step dependence



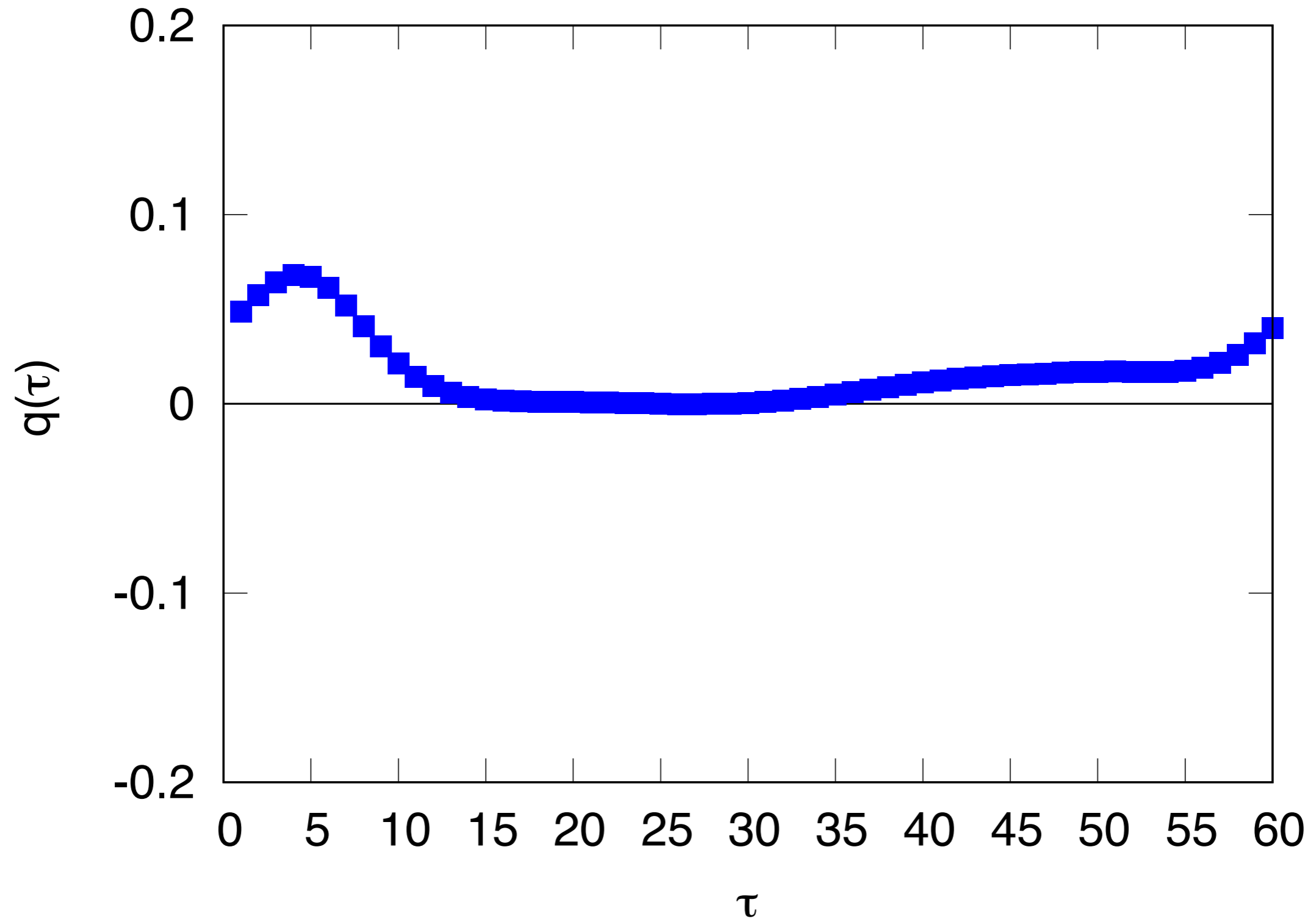
Monte Carlo step dependence



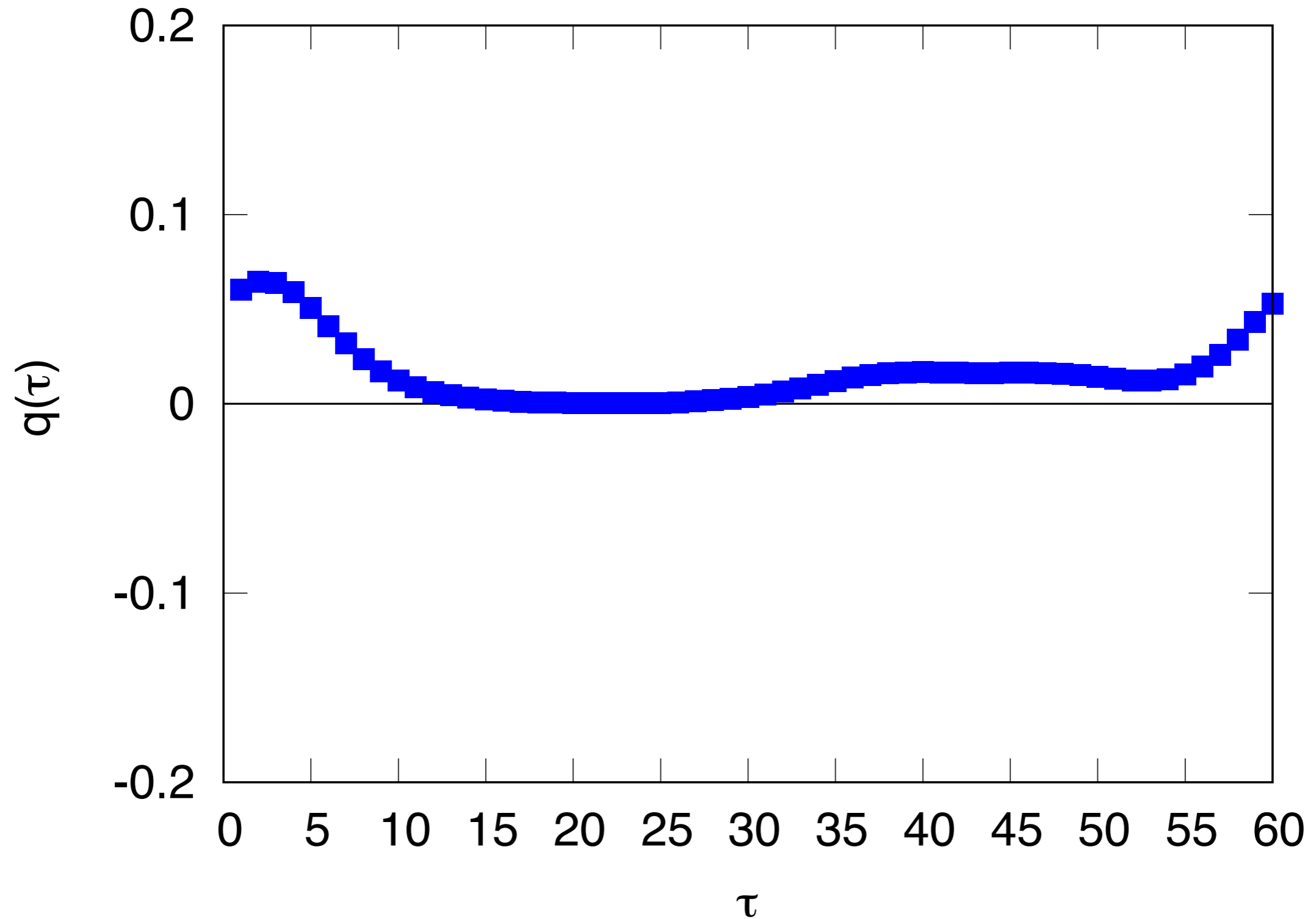
Monte Carlo step dependence



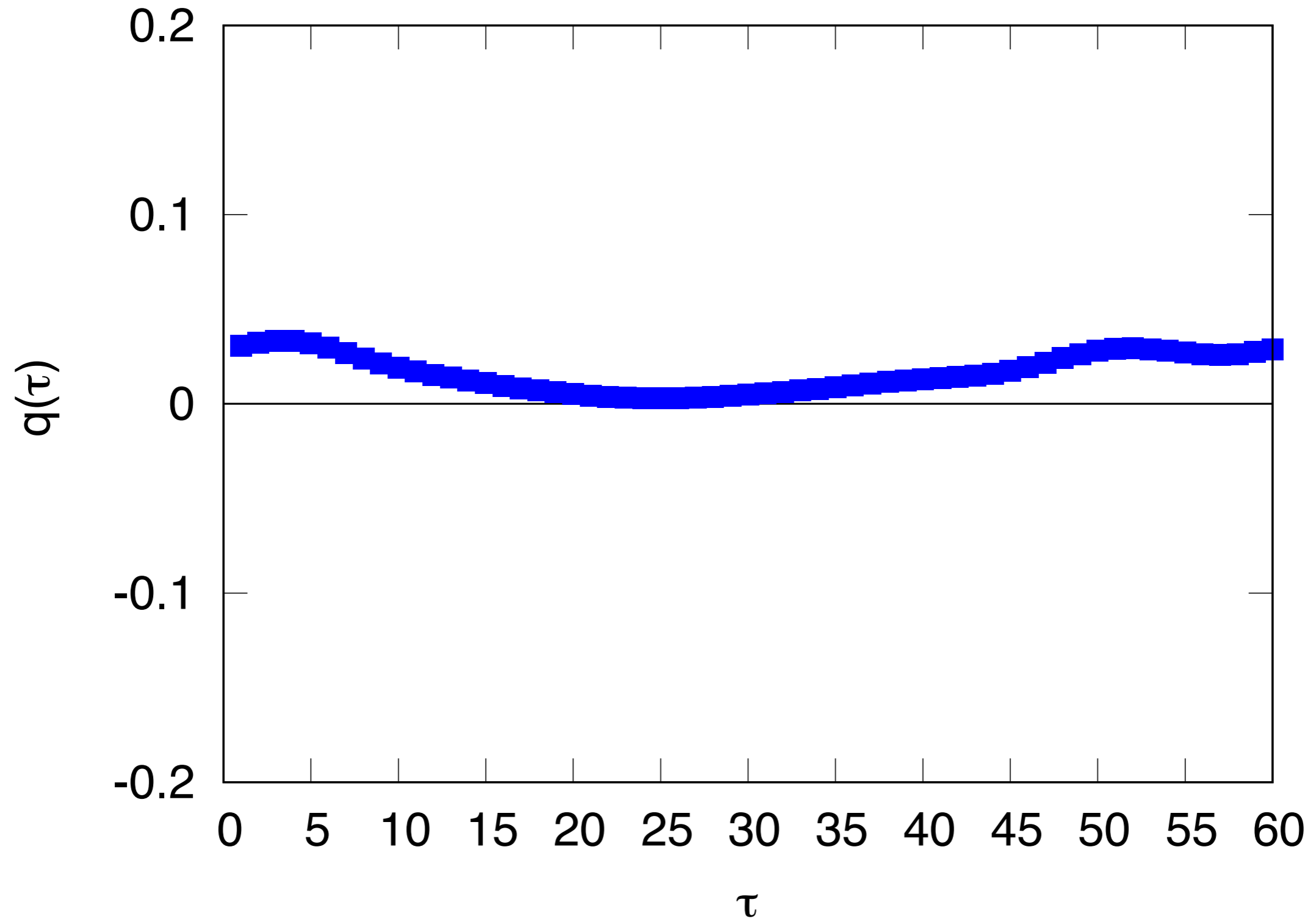
Monte Carlo step dependence



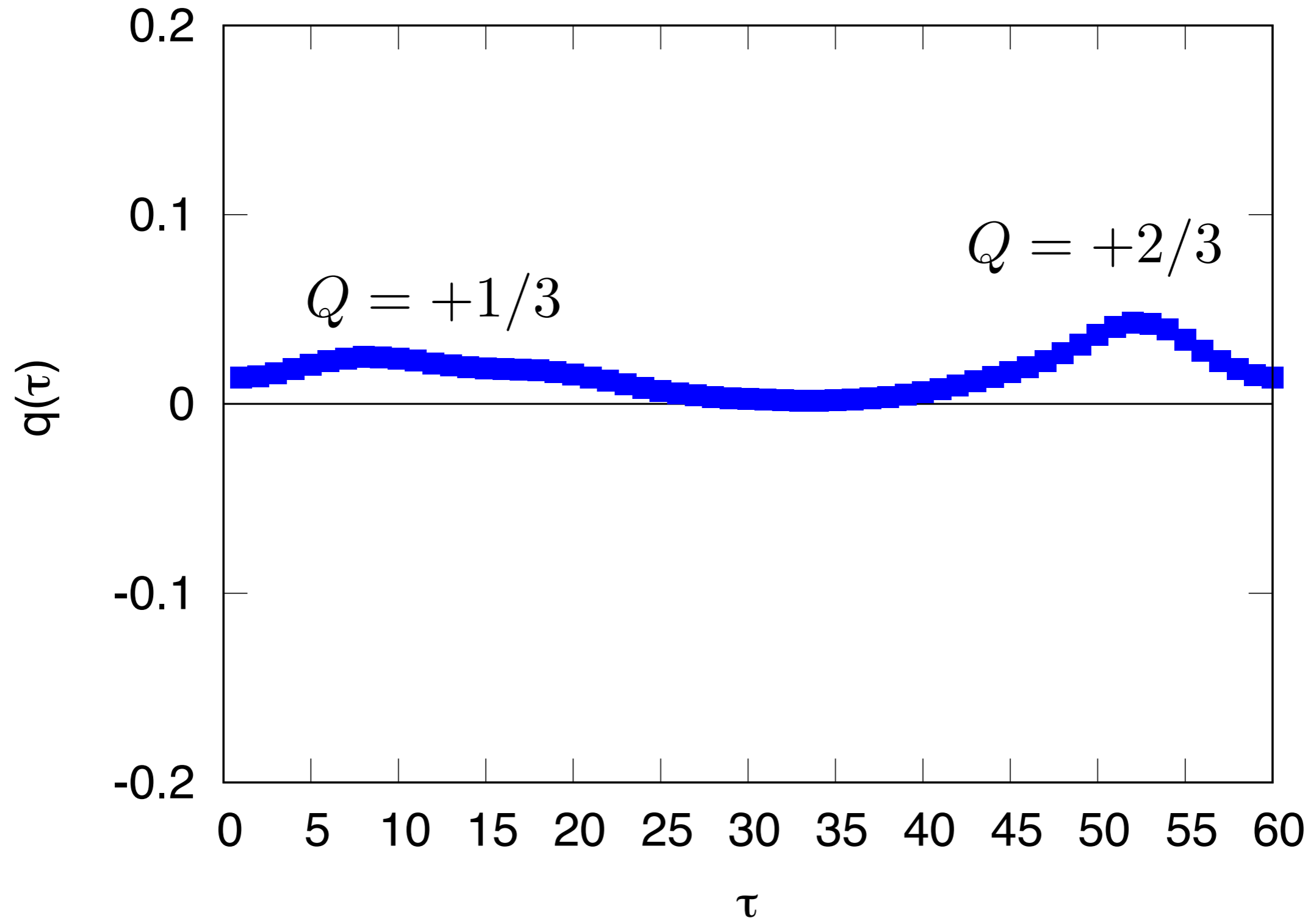
Monte Carlo step dependence



Monte Carlo step dependence

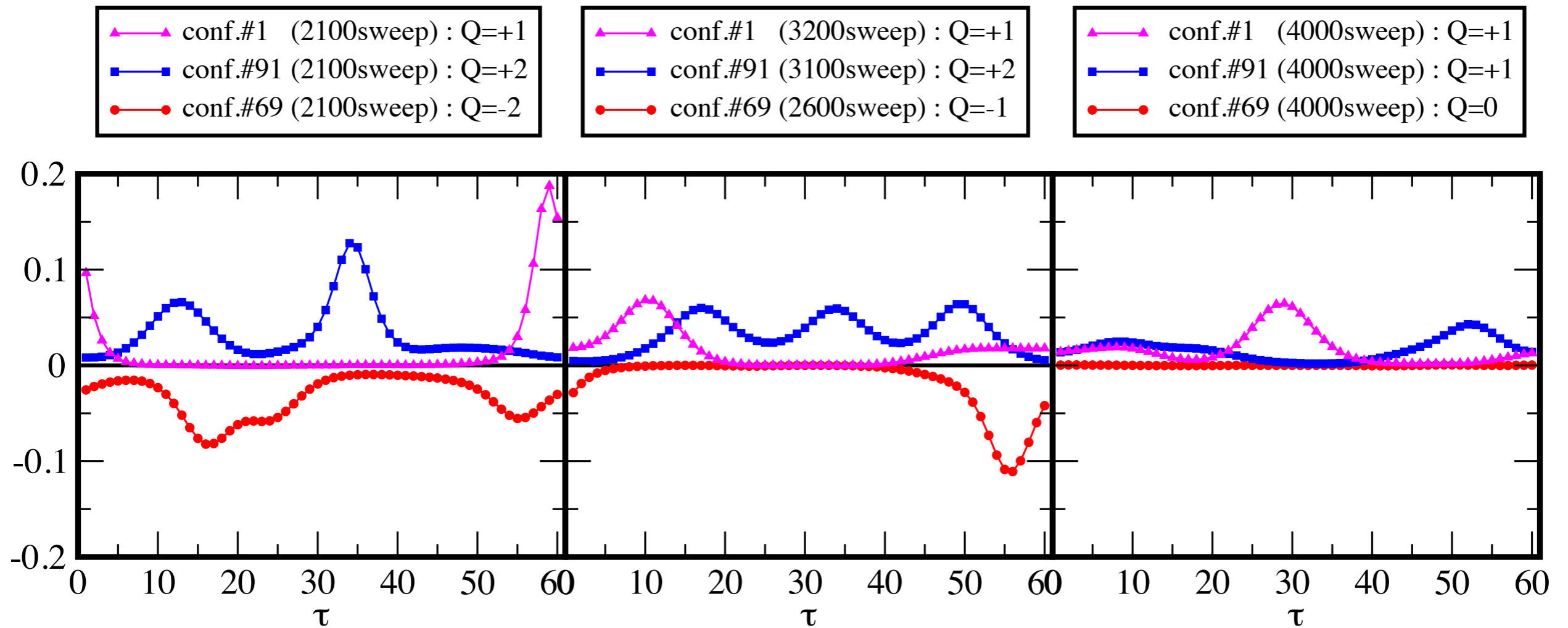


Monte Carlo step dependence



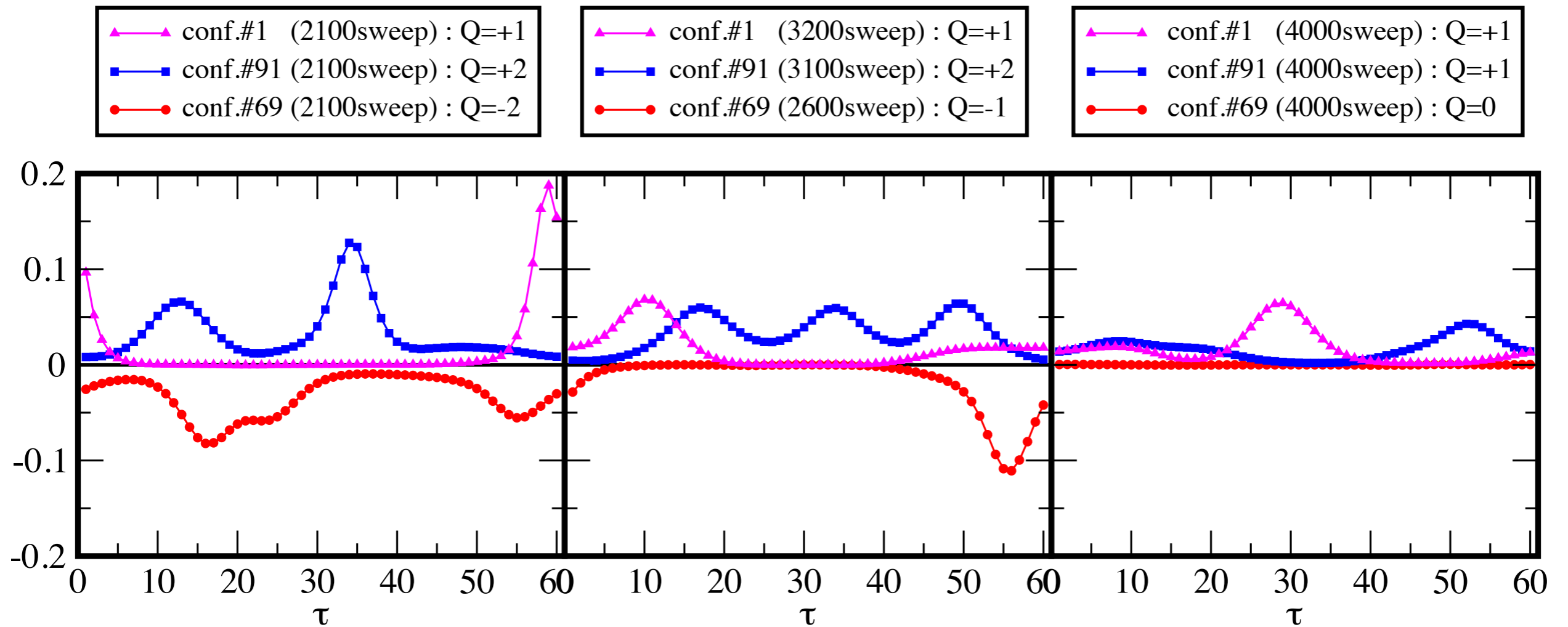
全体のインスタント数が+2から+1になった

Monte Carlo step dependence



整数inst.は分数inst.は互いに移り変わる
それに伴い全体のインスタント数も変化する

Monte Carlo step dependence



(性質2)分数インスタントンは同じ大きさを持つ？

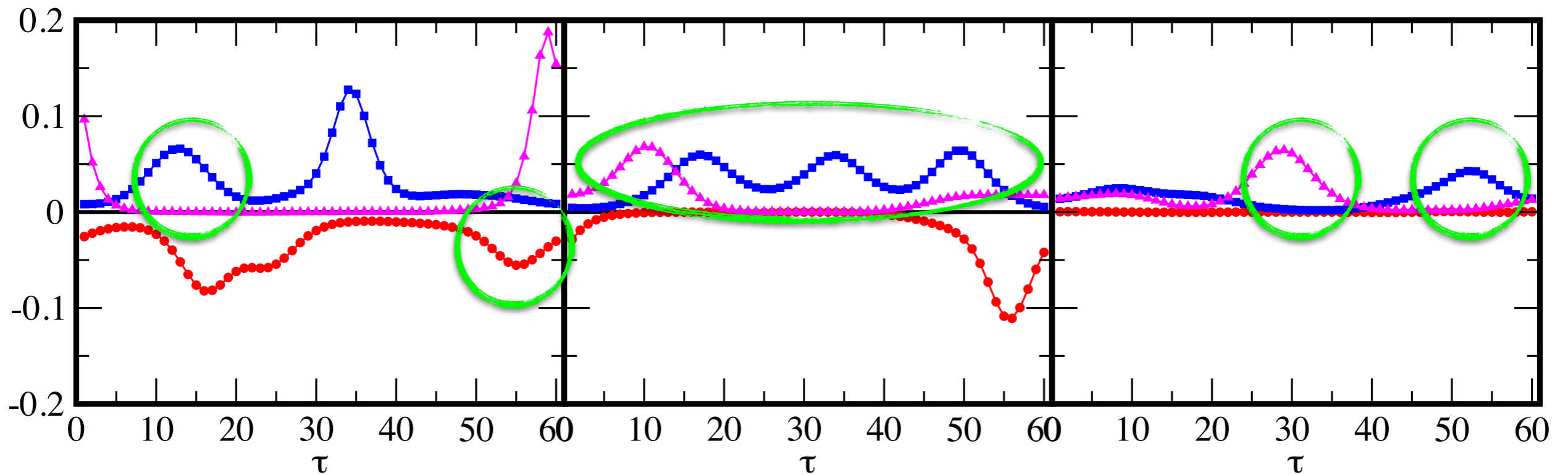
Monte Carlo step dependence

$|Q| = 2/3$ の 8 個に注目

▲ conf.#1 (2100sweep) : $Q=+1$
■ conf.#91 (2100sweep) : $Q=+2$
● conf.#69 (2100sweep) : $Q=-2$

▲ conf.#1 (3200sweep) : $Q=+1$
■ conf.#91 (3100sweep) : $Q=+2$
● conf.#69 (2600sweep) : $Q=-1$

▲ conf.#1 (4000sweep) : $Q=+1$
■ conf.#91 (4000sweep) : $Q=+1$
● conf.#69 (4000sweep) : $Q=0$

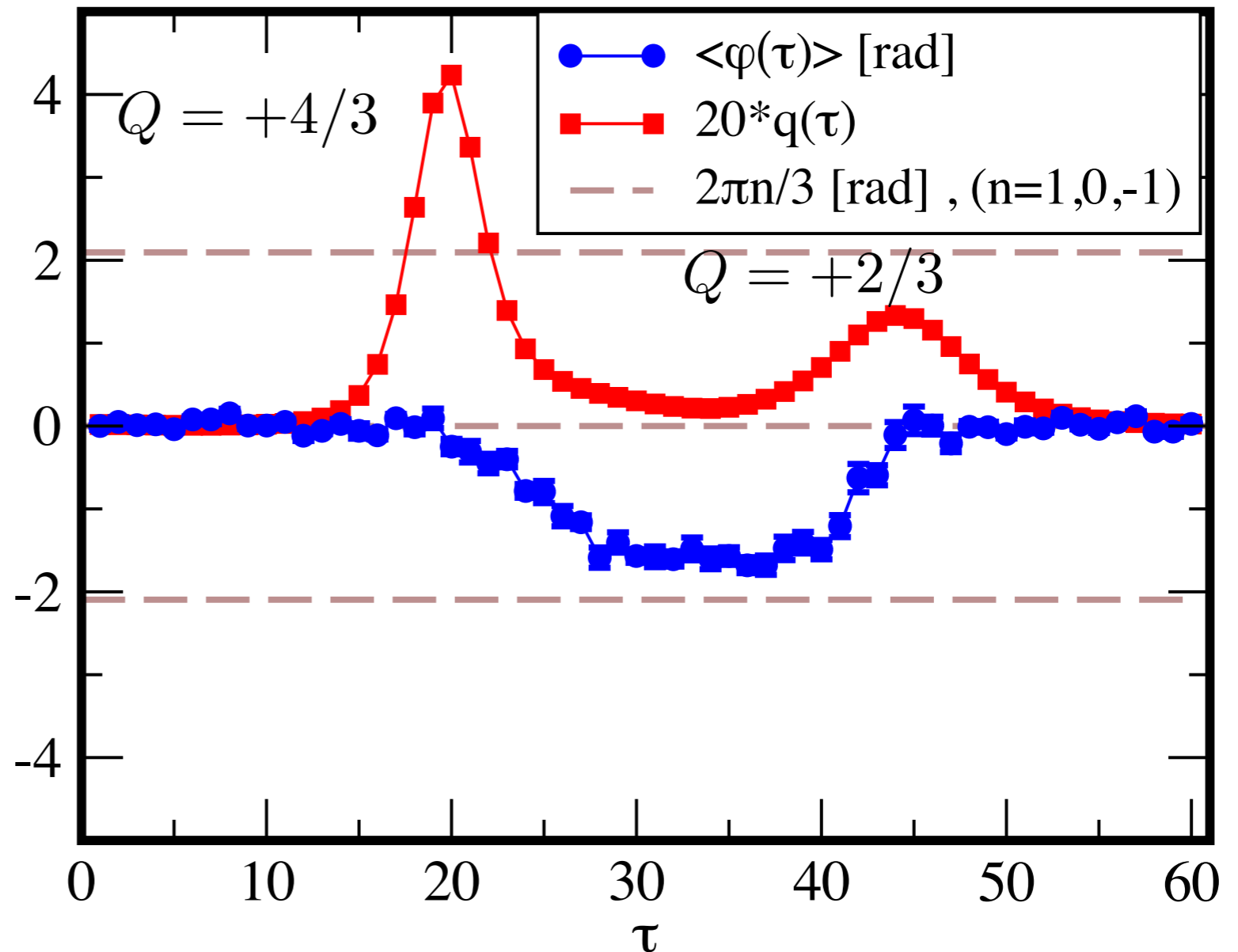
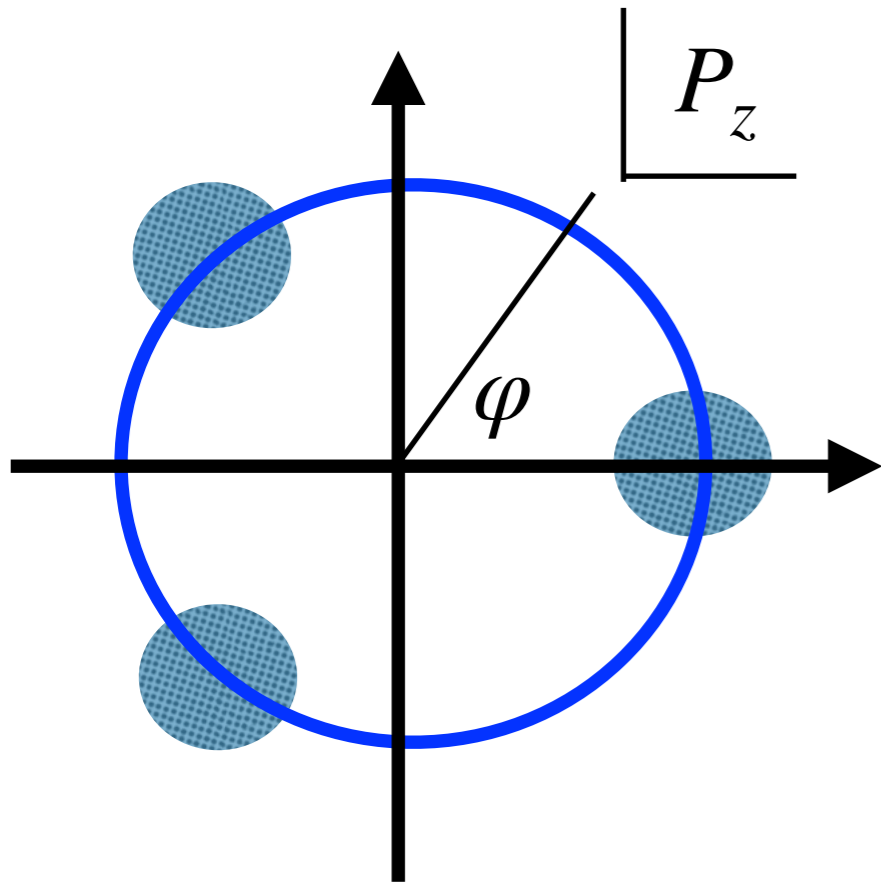


(性質2) 分数インスタントンは同じ大きさを持つ
ピークの高さ: $\Delta Q/Q = 0.04$ の誤差の範囲で同じ
width もほぼ同じ (width ~ 12 (=Ns))

Polyakov loop

Polyakov loop and fractional instanton

(性質1) 分数インスタントンが現れるとPzの位相が回転する?



$$\tilde{P}_z(x, y, \tau) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left[\prod_j U_z(x, y, z = j, \tau) \right]$$

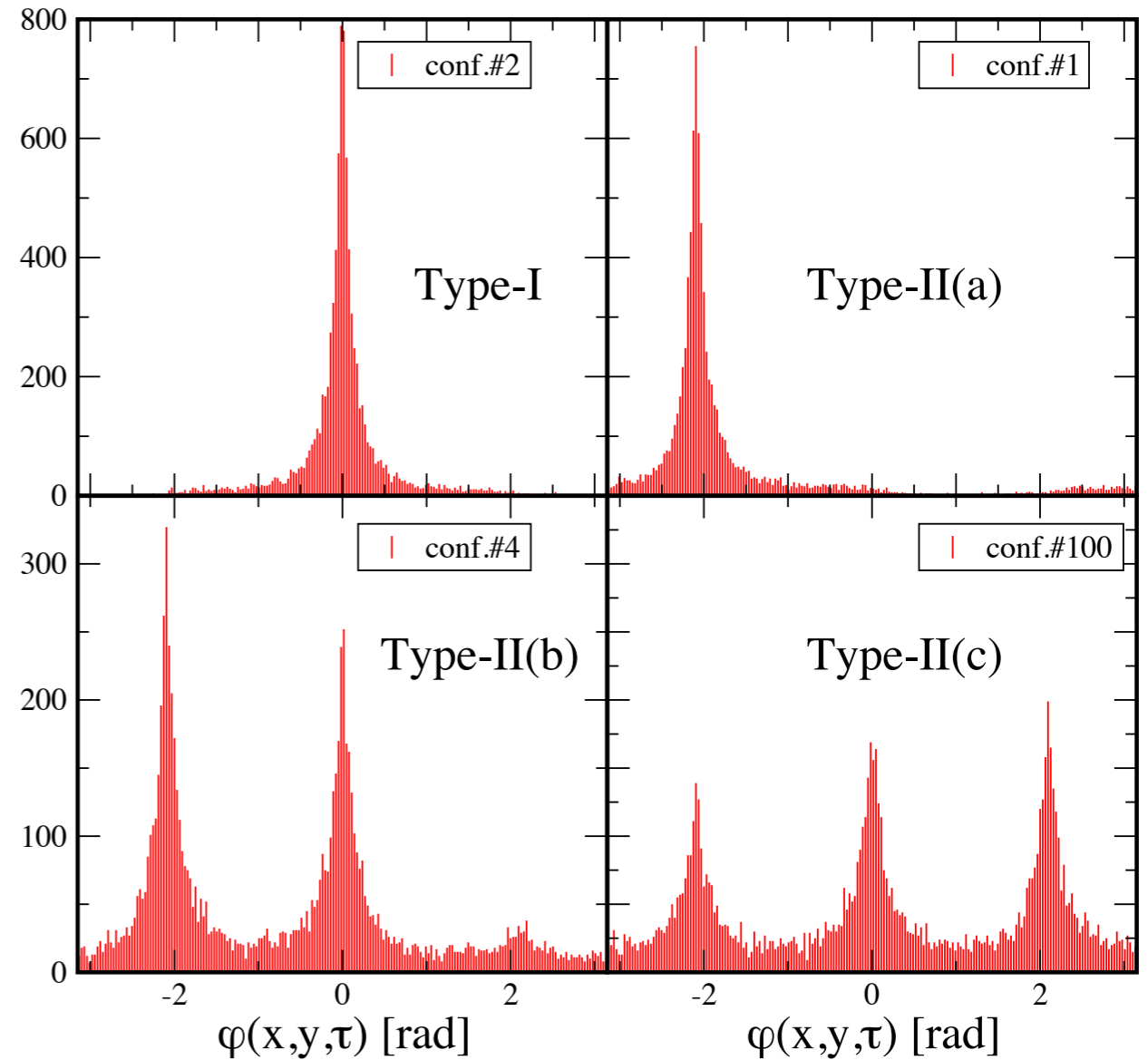
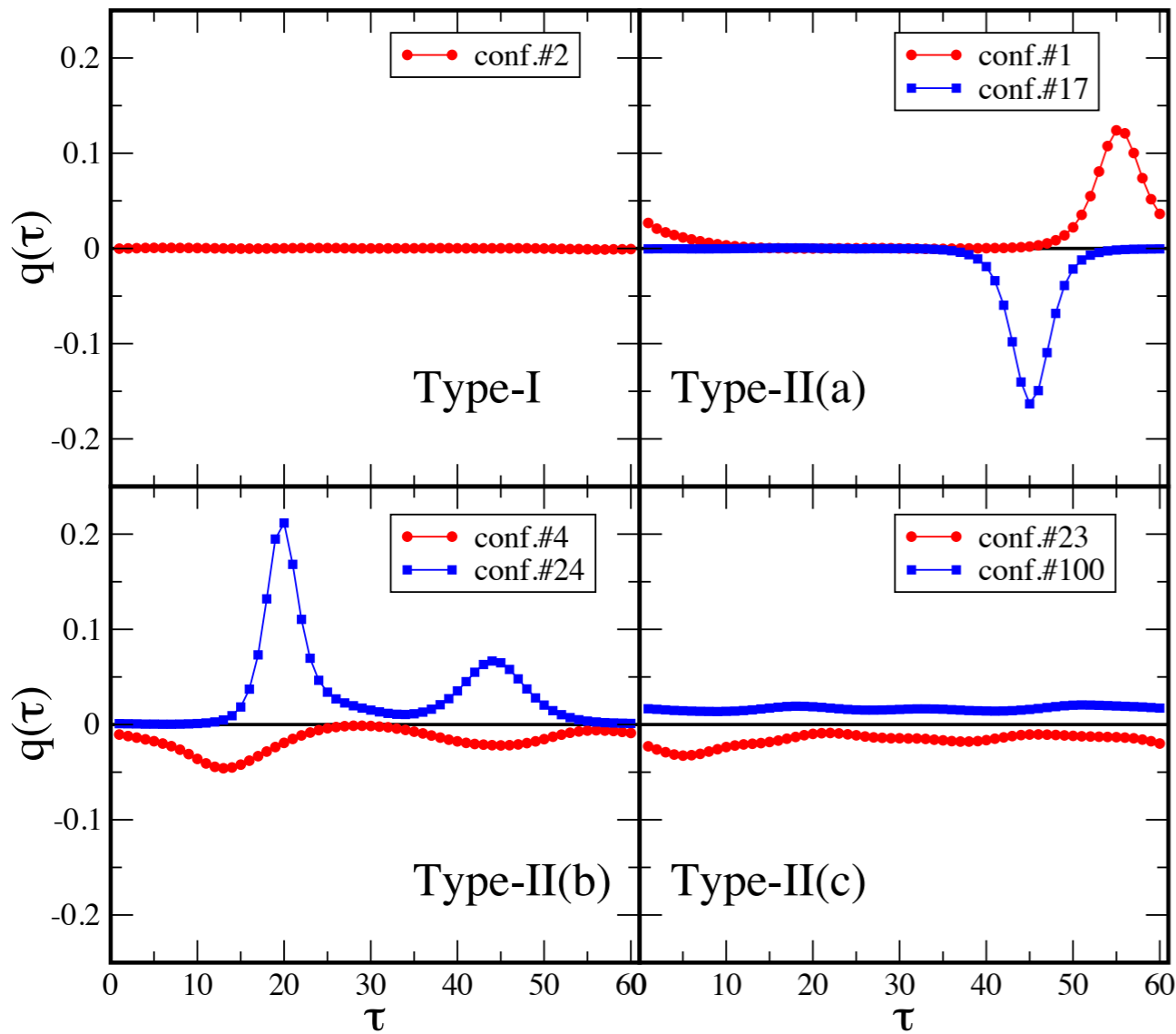
$$\equiv |\tilde{P}_z(x, y, \tau)| e^{i\varphi(x, y, \tau)}$$

(x,y)方向は和をとって τ の関数にした

$$\langle \varphi(\tau) \rangle = \sum_{x, y} \varphi(x, y, \tau)$$

Histogram of complex phase

Local charge(q)



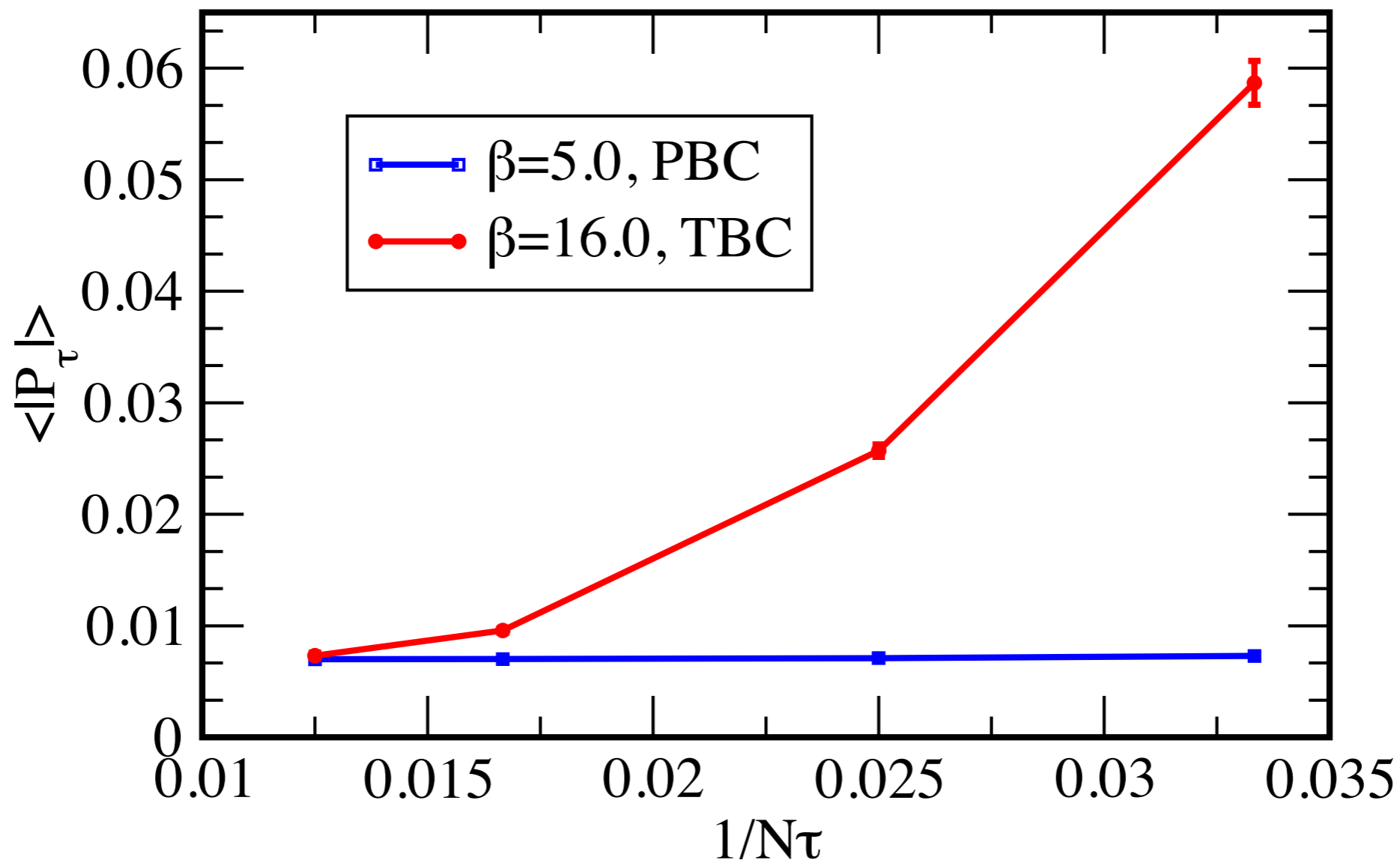
localな電荷のタイプとPzの振る舞いが強く関係

Center symmetry and confinement

Polyakov loopの分布をみると中心対称性が(部分的に)回復している

一方で、Polyakov loopはprobeとしてのquarkの自由エネルギーと関係

$\langle P_\tau \rangle \sim e^{-F_q/T} = e^{-F_q N_\tau}$ ナイーブには 中心対称 ($P e^{2\pi i n/N_c} = P$) ならば“閉じ込め”



$\langle |P| \rangle$ は小さいが非閉じ込め(漸近自由)な振る舞いを示す

Summary

- (1) 摂動領域の古典解を数値的に調べた。中心対称性でツイストしたコンパクトな方向を持つ時空中では弱結合で分数インスタントンが現れる
- (2) その配位は、 $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ 上の $Q=1/Nc$ を持つ古典解の持つ性質を満たす (Polyakov loop, size moduli)
ただし、温度方向もコンパクトなため、totalのQは常に整数
- (3) 中心対称性は(部分的に)回復している (断熱的連続性が有望?)
- (4) Polyakov loopのスケーリング則から「非閉じ込め」の性質を持つ

SU(3) gauge theory on \mathbb{R}^4 or \mathbb{T}^4 (T=0) in weak coupling regime
(Q: trivial, perturbative exp. not to converge)

T=0 (weak coupling)
 $\mathbb{T}^3 \times S^1$ Lattice
with $L_s \ll L_\tau$, TBC
(Q: integer,
locally fractional,
resurgent?)

(1)物理量に対する分数インスタントンの寄与
(2)摂動級数のrenormalonによる寄与とキャンセルするか？

★ Bali et al, α 35次までの計算,
Phys. Rev. D 89, 054505 (2014)

★ Lefschetz thimble毎に(数値的)経路積分

(3)Adiabatic continuity

SU(3) gauge theory on \mathbb{R}^4 or \mathbb{T}^4 (T=0) in strong coupling regime
(Q: integer)