QCDにおけるリノーマロン 克服のためのアプローチ

九州大学
高浦　大雅

目次

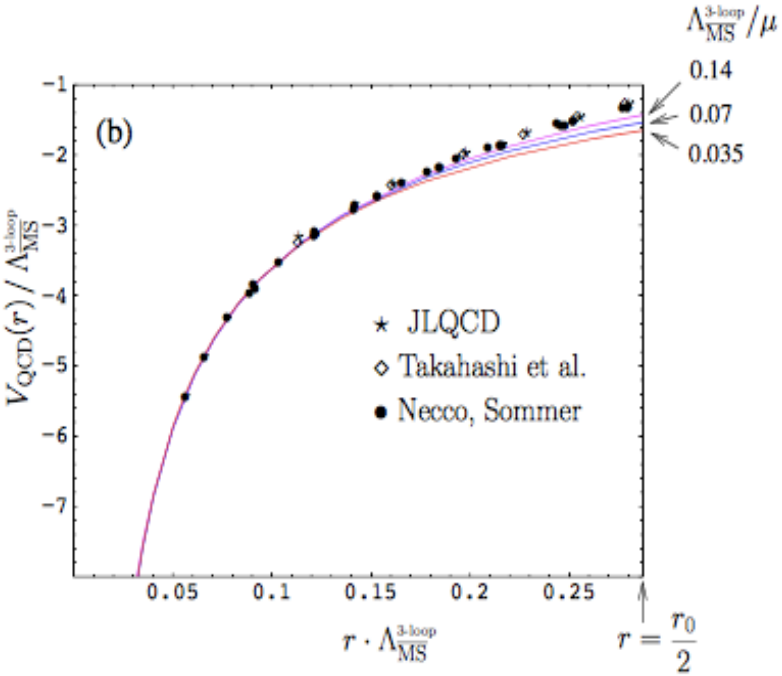
1. Introduction
2. リノーマロン誤差を除いた摂動計算法
3. グルーオン凝縮の定義の提唱
4. まとめ

摂動QCD

現在の摂動QCD

‘09 Static QCD potential: α_s^4 (3-loops)

Anzai, Kiyo, Sumino
Smirnov, Smirnov, Steinhauser



‘12 R-ratio ($e^+ e^- \to$hadrons):
α_s^4 (5-loops)

Baikov, Chetyrkin, Kuhn, Ritteiger

’17 Beta function: α_s^6 (5-loops)

Baikov, Chetyrkin, Kuhn
Herzog, Ruiji, Ueda, Vermaseren, Vogt

摂動予言はより正確になっている

摂動級数の発散

Observable Xに対する摂動級数

$$X(Q^2) = \sum_{n\geq 0} d_n \alpha_s^{n+1}$$

X: dimensionless

$Q^2 \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}^2$

高次に行くほど正確な予言が得られるか？

摂動級数の発散

Observable Xに対する摂動級数

$$X(Q^2) = \sum_{n \geq 0} d_n \alpha_s^{n+1}$$

X: dimensionless

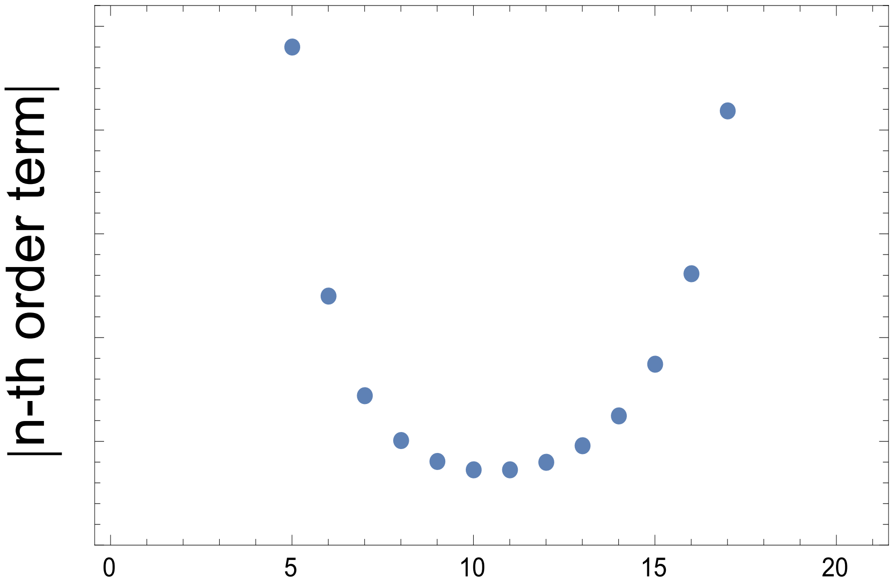
$Q^2 \gg \Lambda_{\rm QCD}^2$

高次に行くほど正確な予言が得られるか？→NO

$$|d_n| \sim n! v^n \quad (n \gg 1)$$

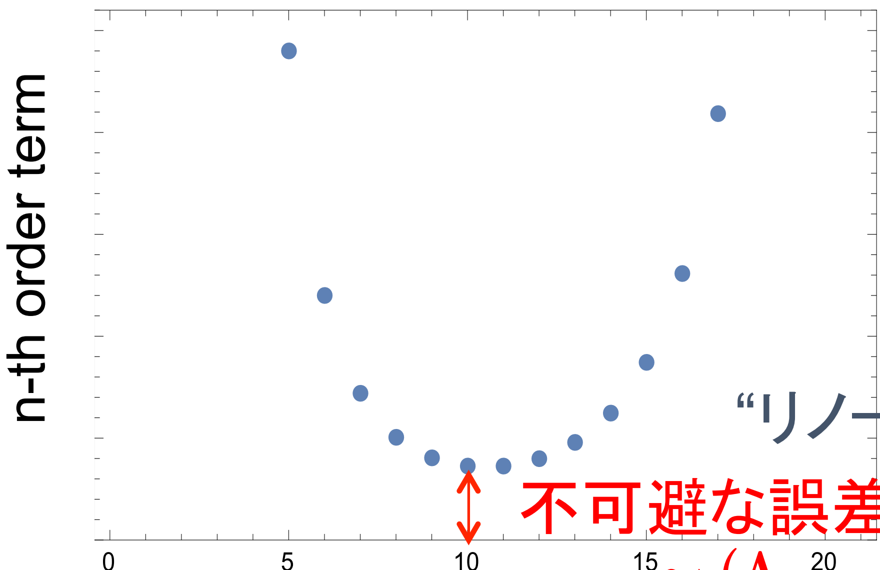
摂動級数は発散する
(for any α_s)

→NOT Taylor series



摂動論の限界

摂動論の予言精度には限界がある！



't Hooft

"リノーマロン誤差"

不可避な誤差

$\sim (\Lambda_{\mathrm{QCD}}/Q)^n$

摂動論はリノーマロン誤差を超える精度の予言を与えられない

リノーマロンと現象論

リノーマロン誤差 $\sim (\Lambda_{\rm QCD}/Q)^n$ with $\mathbf{\Lambda_{QCD} \sim 0.3\ GeV}$

α_s determination with lattice result $\boldsymbol{Q \simeq 1\ \mathrm{GeV}}$

Charm, bottom physics $\boldsymbol{Q \simeq 1-4\ \mathrm{GeV}}$

$\longrightarrow$ これらの解析はヒッグスの物理を調べるにも精密化が必要

リノーマロンの問題は現象論的にも重要になっている

リノーマロン克服のキー

非摂動効果を考えることが必要 → 演算子積展開(OPE)

1/Q展開： Lorentz不変、ゲージ不変な演算子による展開

$$X(Q) = C_1^X(Q) + C_{FF}^X(Q)\frac{\langle 0|F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle}{Q^4} + \mathcal{O}((\Lambda_{\mathrm{QCD}}/Q)^6)$$ General form

リノーマロン克服のキー

非摂動効果を考えることが必要 → 演算子積展開(OPE)

1/Q展開： Lorentz不変、ゲージ不変な演算子による展開

$$X(Q) = \underline{C_1^X(Q)} + \underline{C_{FF}^X(Q)}\,\underline{\frac{\langle 0|F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle}{Q^4}} + \mathcal{O}((\Lambda_{\rm QCD}/Q)^6)$$

General form

摂動論　　非摂動効果 $\sim \Lambda^4_{\rm QCD}/Q^4$

$\Lambda_{\rm QCD} = \mu e^{-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu)}}$ は
α_sで展開するとall-orderで0

$C_1^X(Q)$の摂動評価にはリノーマロン誤差 $\sim \Lambda^4_{\rm QCD}/Q^4$ 　1985 Muller

グルーオン凝縮 $\langle 0|F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle$ の理解がリノーマロン克服のキー

素朴な発想

グルーオン凝縮と物理量の関係はOPEを通じて与えられる

$$X(Q) = C_1^X(Q) + C_{FF}^X(Q)\frac{\langle 0|F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle}{Q^4} + \mathcal{O}((\Lambda_{\mathrm{QCD}}/Q)^6)$$

摂動計算

測定

素朴な発想

グルーオン凝縮と物理量の関係はOPEを通じて与えられる

$$X(Q) = \underbrace{C_1^X(Q)} + \underbrace{C_{FF}^X(Q)} \frac{\langle 0|F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle}{Q^4} + \mathcal{O}((\Lambda_{\mathrm{QCD}}/Q)^6)$$

摂動計算

測定

決定

一度 $\langle 0|F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle$ の値がわかれば、他のオブザーバブルXの1/Q^4項の「予言」ができる

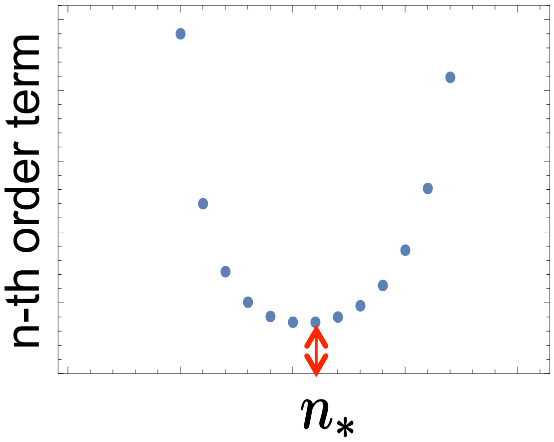
しかしそもそも $C_1^X(Q)$ の摂動計算は発散する

→ 何かしらの正則化が必要

これまでの取り扱い

よく用いられる処方箋

$$C_1^X(Q)|_{\text{reg.}} = \sum_{n=0}^{n_*} d_n \alpha_s^{n+1}$$



問題点

1. $C_1^X(Q)|_{\text{reg.}} = \sum_{n=0}^{n_*} d_n \alpha_s^{n+1}$ は繰り込み点に依る $[n_* \sim 1/\alpha_s(\mu)]$

2. この $C_1^X(Q)|_{\text{reg.}}$ を用いて定義されるグルーオン凝縮は
他のXに対するグルーオン凝縮の値と同じと保証されない

→他のオブザーバブルXにおけるOPEのinputとして使えるか疑問

Our work

改善した摂動計算をOPEと組み合わせることにより、
リノーマロン克服のキーであるグルーオン凝縮を定義

くりこみ点に依らない
オブザーバブルに依らない
ユニバーサルな量として定義する

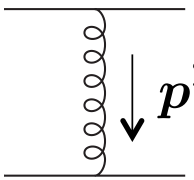
但し今回の話は摂動級数を”LL”のモデルで扱う

目次

All–order perturbative series in "LL" approximation

Brodsky, Lepage, Mackenzie,
Beneke, Braun

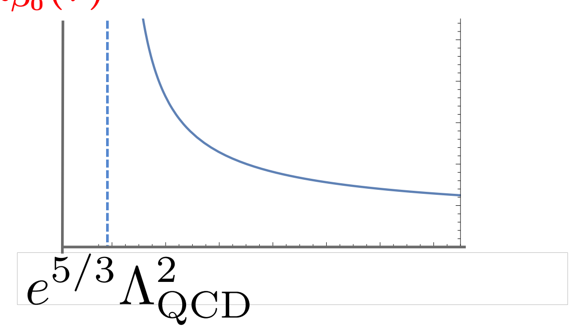
LO $$\int_0^\infty \frac{d\tau}{2\pi\tau} w_X(\tau/Q^2)\alpha_s(\mu)$$



"LL" $$\int_0^\infty \frac{d\tau}{2\pi\tau} w_X(\tau/Q^2)\alpha_{\beta_0}(\tau)$$

$$\alpha_{\beta_0}(\tau) = \frac{4\pi}{\beta_0}\frac{1}{\log(\tau/(e^{5/3}\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2))}$$

- LL accuracy
- リノーマロンを持つ全次数

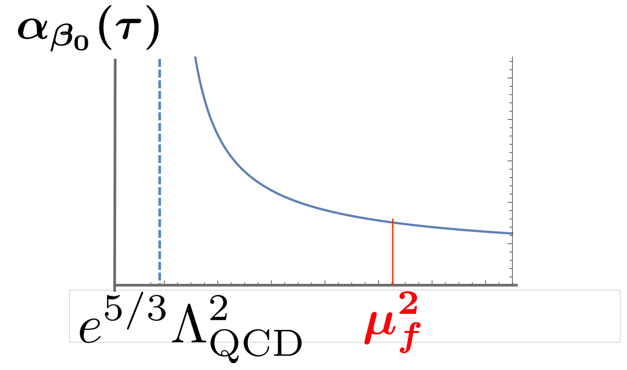


Cutoffを用いた$C_1^X(Q)|_{\mathrm{reg.}}$の定義

$$C_1^X(Q) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\pi\tau} w_X(\tau/Q^2)\alpha_{\beta_0}(\tau)$$

正則化

$$C_1^X(Q;\mu_f) = \int_{\mu_f^2}^\infty \frac{d\tau}{2\pi\tau} w_X(\tau/Q^2)\alpha_{\beta_0}(\tau)$$



正則化パラメータに依らない部分を抜き出す $[n_* \leftrightarrow \mu_f]$

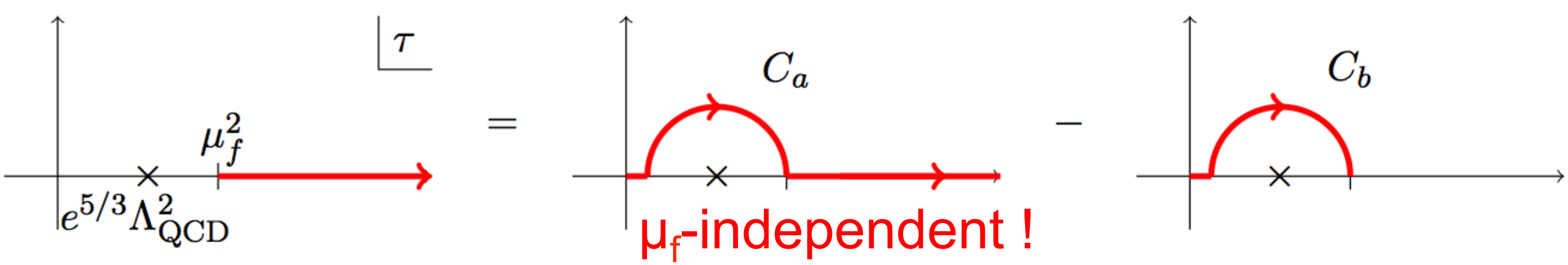
Cutoff非依存部分

2016 Mishima, Sumino, HT

$$C_1^X(Q;\mu_f) = \int_{\mu_f^2}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi\tau} w_X\left(\frac{\tau}{Q^2}\right) \alpha_{\beta_0}(\tau)$$

Method

- 解析関数W_Xを考える　$2\mathrm{Im}W_X(x) = w_X(x)$ for $x > 0$
- 複素平面で積分路を変形



Cutoff非依存部分

2016 Mishima, Sumino, HT

$$C_1^X(Q;\mu_f) = \boxed{C_1^{X,\mathrm{RF}}(Q)} - \mathrm{Im}\int_{C_b} \frac{d\tau}{2\pi\tau} i b_{2,X} \left(\frac{\tau}{Q^2}\right)^2 \alpha_{\beta_0}(\tau)$$

μ_f indep.

$$= \mathcal{O}(\mu_f^4/Q^4)$$

目次

1. Introduction
2. リノーマロン誤差を除いた摂動計算法
3. グルーオン凝縮の定義の提唱
4. まとめ

How is the result used in OPE?

$$X(Q) = C_1^X(Q;\mu_f) + C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}|0\rangle|_{k<\mu_f}}{Q^4} + \dots$$

IR cutoff

$k > \mu_f$

UV cutoff

$k < \mu_f$

第一項

$$\longrightarrow \quad C_1^X(Q;\mu_f) = C_1^{X,\mathrm{RF}}(Q) - \mathrm{Im}\int_{C_b} \frac{d\tau}{2\pi\tau} i b_{2,X} \left(\frac{\tau}{Q^2}\right)^2 \alpha_{\beta_0}(\tau)$$

第二項

$\langle 0|F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}|0\rangle|_{k<\mu_f}$ に注目

How is the result used in OPE?

$$X(Q) = C_1^X(Q;\mu_f) + C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle|_{k<\mu_f}}{Q^4} + \dots$$

IR cutoff

$k > \mu_f$

UV cutoff

$k < \mu_f$

第一項のcutoff dependence

$$-\frac{b_{2,X}}{2}\mathrm{Im}\int_{C_b}\frac{d\tau}{\pi\tau} i \left(\frac{\tau}{Q^2}\right)^2 \alpha_{\beta_0}(\tau)$$

第二項のcutoff dependence

$$C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle|_{k<\mu_f}}{Q^4} \underset{\mu_f \text{ dep.}}{\sim} C_{FF}^X \frac{3(N_c^2-1)}{8\pi^2}\int^{\mu_f^2}\frac{d\tau}{\pi\tau}\left(\frac{\tau}{Q^2}\right)^2 \alpha_{\beta_0}(\tau)$$

Cancellation of cutoff dependence

2018 H. Suzuki, HT

$$\frac{b_{2,X}}{2} = C^X_{FF} \frac{3(N_c^2 - 1)}{8\pi^2} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Cutoffはキャンセル}$$

以下のXで実際に成立

- Current-current correlator (Adler fn.)
- Static QCD potential　　2017 HT
- Energy density operator defined in gradient flow

OPEの第一項と第二項でcutoff dependenceはキャンセルする

Rearrangement of OPE

2018 H. Suzuki, HT

$$X(Q) = C_1^X(Q;\mu_f) + C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle|_{k<\mu_f}}{Q^4} + \dots$$

μ_f dependenceのキャンセル

$$X(Q) = C_1^{X,\mathrm{RF}}(Q) + C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle^{\mathrm{RF}}}{Q^4} + \dots$$

グルーオン凝縮の定義

$$\frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle^{\mathrm{RF}}}{Q^4} \equiv \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}|0\rangle|_{k<\mu_f}}{Q^4} - \frac{3(N_c^2-1)}{8\pi^2}\mathrm{Im}\int_{C_b} i\frac{d\tau}{\pi\tau}\left(\frac{\tau}{Q^2}\right)^2 \alpha_{\beta_0}(\tau)$$

Cutoff scale μ_f、くりこみ点、オブザーバブルに依らない

リノーマロン克服のシナリオ

2018 H. Suzuki, HT

$$X(Q) = C_1^{X,\mathrm{RF}}(Q) + C_{FF}^{X}\frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle^{\mathrm{RF}}}{Q^4} + \dots$$

理論計算できない唯一の部分 $\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle^{\mathrm{RF}}$ をXに依らない量に

リノーマロン克服のシナリオ

- あるXから $\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle^{\mathrm{RF}}$ を決定
- 他のXでは $C_1^{X,\mathrm{RF}}, C_{FF}^{X}$ を計算し、
  inputとして $\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle^{\mathrm{RF}}$ を用いる
- 摂動論だけでは決められなかった $\Lambda_{\mathrm{QCD}}^4/Q^4$-項が確定!

まとめ

- 摂動QCDではリノーマロン誤差が生じ、これへの対処は現象論的にも重要になっている

- リノーマロンを克服するにはOPE、特にグルーオン凝縮がキーとなる

- OPEを正則化パラメータ非依存に用いる手法を提案

$$X(Q) = C_1^X(Q;\mu_f) + C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle|_{k<\mu_f}}{Q^4} + \dots$$

$$\downarrow$$

$$X(Q) = C_1^{X,\mathrm{RF}}(Q) + C_{FF}^X \frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a|0\rangle^{\mathrm{RF}}}{Q^4} + \dots$$

- リノーマロン克服のためのパラメータをユニバーサルな一つの量に帰着

克服可能に!

教訓と課題

- 今回の摂動級数の取り扱いはモデル的近似を含む

  → より体系的な近似法に移行する必要

- 摂動論、およびグルーオン凝縮に適切な正則化をし、
  そのパラメータ非依存部分を抜き出すことが重要

非摂動効果を種々の不安定性（繰り込み点、cutoff、オブザーバブル）を持たないように定義

Back up

Attempt of numerical estimate of gluon condensate