Is Symmetry Breaking into Special Subgroup Special?

京都大学 理学研究科 物理学第二教室
Department of Physics, Kyoto University
山津 直樹
Naoki Yamatsu

2019年7月29日(月)
素粒子物理学の進展2019
@ 京都大学 基礎物理学研究所, 京都

Ref. [1, T.Kugo, N.Y., PTEP(2019) in press (arXiv:1904.06857)]

今回の講演の目的

リー群の**特殊部分群**への破れは特別ではないことを説明したい．具体例として，四次元 $SU(N)$ **南部–Jona-Lasinio(NJL)模型** [2, 3, Y.Nambu,G.Jona-Lasinio'61] を用いた**力学的対称性の破れ**の解析結果を示す.

今回の講演内容

- リー群の**特殊部分群**への破れを用いた大統一理論
- **力学的対称性の破れ**を用いた**特殊部分群**への対称性の破れ

キーワード：リー群の{**(非)最大**}{**正則**, **特殊**} {**部分群**, **小群**}

標準理論を越える統一理論を考える動機

素粒子標準理論を見てみるといくつもの意味不明なことがある.

- なぜゲージ対称性は$G_{\mathrm{SM}} := SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$?
- なぜクォークとレプトンはG_{SM}の定義または自明な表現?
- なぜクォークとレプトンは三世代もあるのか?
- なぜクォークやレプトンの質量(湯川結合定数)は階層的?

$\cdots$

大統一理論を考える動機 [4, 5, R.Slansky'81;...]

標準理論の背後に大統一理論が隠れていると考えると,

- 標準理論のゲージボソンの統一
- 標準理論のワイルフェルミオンの統一
- 四次元の標準理論の量子異常の相殺
- クォークとレプトンの電荷の量子化

…

標準理論の場と表現：標準理論

場	表記	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$	$SL(2,\mathbb{C})$
クォーク二重項	Q_j	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, +1/6)$	$(1/2, 0)$
アップタイプ	u_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$	$(1/2, 0)$
ダウンタイプ	d_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, +1/3)$	$(1/2, 0)$
レプトン二重項	L_j	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$	$(1/2, 0)$
荷電レプトン	e_j^c	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, +1)$	$(1/2, 0)$
ヒッグス	ϕ	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2)$	$(0, 0)$
グルーオン	G_A	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \pm 0)$	(1/2,1/2)
ウィーク	W_I	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \pm 0)$	(1/2,1/2)
ハイパー	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \pm 0)$	(1/2,1/2)

標準理論の場と表現：大統一

場	表記	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$	$SL(2,\mathbb{C})$
クォーク二重項	Q_j	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, +1/6)$	$(1/2, 0)$
アップタイプ	u_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$	$(1/2, 0)$
ダウンタイプ	d_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, +1/3)$	$(1/2, 0)$
レプトン二重項	L_j	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$	$(1/2, 0)$
荷電レプトン	e_j^c	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, +1)$	$(1/2, 0)$
ヒッグス	ϕ	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2)$	$(0, 0)$
グルーオン	G_A	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \pm 0)$	(1/2,1/2)
ウィーク	W_I	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \pm 0)$	(1/2,1/2)
ハイパー	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \pm 0)$	(1/2,1/2)

大統一ゲージ群とその部分群への破れ

四次元大統一理論

$SU(5)$ [6, H.Georgi,S.L.Glashow'74] $SU(6)$ [7, K.Inoue,A.Kakuto,Y.Nakano'77]
$SO(10)$ [8, H.Fritzsch,P.Minkowski'75] E_6 [9, F.Gursey,P.Ramond,P.Sikivie'76]

五次元大統一理論

$SU(5)$ [10, 11, K.Kojima et al.'11;...] $SU(6)$ [12, 13, G.Burdman,Y.Nomura'03;...]
$SO(10)$ [14, 15, H.D.Kim,S.Raby'03;...] E_6 [16, 17, Y.Kawamura,T.Miura'13;...]
$SO(11)$ [18–23, Y.Hosotani,N.Y.'15;...].

通常大統一ゲージ理論では以下のような**正則部分群**を用いる：

$$E_8 \supset E_7 \supset E_6 \supset SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\rm SM}.$$

しかしながら，リー群には **特殊部分群** **(非正則部分群)** がある．

正則部分群と特殊部分群の例 [4, 5, 24–26, E.Dynkin'57;...]

リー群 $SU(3)$

正則部分群

$SU(2) \times U(1)$

表現分解

$$\mathbf{3} = (\mathbf{2})(1) \oplus (\mathbf{1})(-2)$$
$$\overline{\mathbf{3}} = (\mathbf{2})(-1) \oplus (\mathbf{1})(2)$$
$$\mathbf{8} = (\mathbf{3})(0) \oplus (\mathbf{2})(3) \oplus (\mathbf{2})(-3) \oplus (\mathbf{1})(0)$$

特殊部分群

$SO(3) \simeq SU(2)$

表現分解

$$\mathbf{3} = (\mathbf{3})$$
$$\overline{\mathbf{3}} = (\mathbf{3})$$
$$\mathbf{8} = (\mathbf{5}) \oplus (\mathbf{3})$$

$SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ (R) [4, 5, 24–26, E.Dynkin'57;...]

ゲルマン行列($SU(3)$ $\mathbf{3}$表現の生成子):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_j (j = 1, 2, 3)$ と λ_8 を $SU(2)$ と $U(1)$ の生成子と見なせる.

$SU(3) \supset SO(3) \simeq SU(2)$ (S) [4, 5, 24–26, E.Dynkin'57;...]

ゲルマン行列($SU(3)$ $\mathbf{3}$表現の生成子):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boxed{\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boxed{\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boxed{\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_j (j = 2, 5, 7)$ を $SO(3) \simeq SU(2)$ の生成子と見なせる.

大統一ゲージ群の候補とその部分群 [5, e.g.,N.Y.'15]

正則部分群だけを用いる場合の大統一ゲージ群の候補の例：

$$E_8 \supset E_7 \supset E_6 \supset SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\rm SM}.$$

特殊部分群も用いる場合の大統一ゲージ群の候補の例：

$$\begin{array}{ccccccccc}
SO(248) & & USp(56) & & SU(27) & & SU(16) & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
E_8 & \supset & E_7 & \supset & E_6 & \supset & SO(10) & \supset SU(5) \supset & G_{\rm SM}.
\end{array}$$

(注) 有限次元リー群に限定し，正則部分群の可換群$U(1)$は省略.

これまでに提唱した特殊大統一理論 [27–29, N.Y.'17-'18]

- $SU(16)$ **特殊大統一理論** [27, N.Y.'17]
  $SU(16)$ 最大特殊部分群 $SO(10)$ を用いた大統一理論を提唱した.
  ($SU(16) \supset SO(10)$ の表現分解 $\mathbf{16} = \mathbf{16}$, $\mathbf{255} = \mathbf{45} \oplus \mathbf{210}$.)
- $SO(32)$ **特殊大統一理論** [28, N.Y.'17]
  $SO(32)$ のヘテロ型超弦理論と関係づけられる可能性があるため $SO(32) \supset SU(16) \times U(1) \supset SO(10) \times U(1)$ を用いた大統一理論を提唱した. ($SO(32) \supset SO(10)$ の表現分解 $\mathbf{32} = \mathbf{16} \oplus \overline{\mathbf{16}}$.)
- $SU(19)$ **特殊大統一理論** [29, N.Y.'18]
  $SU(19) \supset SU(16) \times SU(3)_F \times U(1) \supset SO(10) \times SU(3)_F \times U(1)$ により三世代のSMフェルミオンを $SU(19)$ 既約表現に統一可能.

特殊大統一理論の講演時に受けた質問 [27–29, N.Y.,17-18]

- 特殊部分群など聞いたこともないものをなぜ考えるのか?
- 特殊部分群への破れなど見聞きしたことがないが実現可能か?
- $SU(16)$ を $SO(10)$ に破るスカラー場のゲージ群の表現が大き過ぎるため繰り込み群で発散するから意味がなくないか?
- $SU(16)$ $\mathbf{120}$ 表現(二階反対称テンソル表現)のフェルミオンは量子異常の相殺以外に何か意味はあるのか? (by 九後さん)
- フェルミオン凝縮で $SU(16)$ の $SO(10)$ への破れを起こす複合ヒッグス場を作れないか? (by 九後さん)

対称性とその破れ [4, 30, e.g.,L.Michel'80;R.Slansky'81]

場の理論での対称性の破れで最低限必要な知識は何か?

- リー群とその**部分群 (subgroup)** は何か?
- リー群の各表現の**小群 (little group)** は何か?
- リー群の変換の下で不変な作用は何か?

⇒ 有効ポテンシャルの最小で保たれる対称性は何か?

(注) 現時点で行われている余剰次元理論での境界条件による破れなどは自発的破れでないためポテンシャルを議論できない.

具体例：$SU(3)$ の場合 [4, 5, e.g.,R.Slansky'81;N.Y.'15]

- $SU(3)$ **の最大部分群**は何か?

  $SU(2) \times U(1)$(R) と $SO(3) \simeq SU(2)$(S) の二つである.

- $SU(3)$ **のある表現の最大小群**は何か?

  $SU(3)$ $\mathbf{3}$ の場合，$SU(2)$(R) である.

  $SU(3)$ $\mathbf{6}$ の場合，$SU(2)$(R) と $SO(3) \simeq SU(2)$(S) である.

  $SU(3)$ $\mathbf{8}$ の場合，$SU(2) \times U(1)$(R) である.

上記から定義･随伴表現では正則部分群への破れが起こりそうだが,
二階対称テンソル表現では特殊部分群への破れも起こりえそう.

$SU(n)$ ゲージ理論の解析結果 [31, L.-F.Li'74]

$SU(n)$ ゲージ理論でのヒッグス機構による対称性の破れのまとめ

スカラー場の表現	最小エネルギー状態での対称性
定義表現	$SU(n) \to SU(n-1)$(R)
二階対称テンソル	$SU(n) \to SU(n-1)$(R) or $SO(n)$(S)
二階反対称テンソル	$SU(n) \to SU(n-2)$(R) or $USp(2[n/2])$(S)
随伴表現	$SU(n) \to SU(m) \times SU(n-m) \times U(1)$(R)

あまり認識されていないようであるがすくなくとも45年前にはヒッグス機構での特殊部分群への破れの結果は一部で知られていた.

リー群の(特殊)部分群への破れの機構

- **スカラー凝縮(ヒッグス機構)**を用いた$SU(n)$の$SO(n)$特殊部分群などへの破れ [31,32, L.-F.Li'74;S.Meljanac,M.Milosevic,S.Pallua'82;...]
- **フェルミオン凝縮(力学的対称性の破れ)**を用いた$SU(n)$の$SO(n)$特殊部分群への破れやE_6のF_4やG_2への破れなど [2, 3, 33–35, Y.Nambu,G.Jona-Lasinio'61;L.Susskind'78;M.E.Peskin'80;T.Kugo,J.Sato'94;...].
- **オービフォールド境界条件**を用いた特殊部分群への破れ(例, $SU(n)$の$SO(n)$特殊部分群, E_6のF_4特殊部分群への破れなど) [36, A.Hebecker,J.March-Rusell'02;...].

今回の研究に関連の深い [35, T.Kugo,J.Sato'94] の議論を確認する.

E_6 大統一理論での対称性の破れ [35, T.Kugo,J.Sato'94]

E_6 対称性の望ましい破れは力学的対称性の破れで実現可能か?

- E_6 $\mathbf{27}$ フェルミオンのみ含まれるNJLタイプの有効模型を考える:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^I i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_I + \sum_{p=1}^{n_R} G_{\mathbf{R}_p} (\psi_I \psi_J)_{\mathbf{R}_p} (\bar{\psi}^I \bar{\psi}^J)_{\overline{\mathbf{R}}_p}$$

  $\psi = (\psi_I)$: あるリー群Gの次元dの既約表現Rとする.

- E_6 のテンソル積 $(\mathbf{27} \otimes \mathbf{27})_S = (\overline{\mathbf{351'}}) \oplus (\overline{\mathbf{27}})$ から複素スカラーの補助場として$\Phi_{\overline{\mathbf{351'}}}$と$\Phi_{\overline{\mathbf{27}}}$の二つを導入し，1-ループの有効ポテンシャルの範囲で解析する.

E_6 の最大部分群と最大小群 [4, 5, R.Slansky'81;N.Y.'15]

- E_6 **の最大部分群**は何か?

  $SO(10) \times U(1), SU(6) \times SU(2), SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$(R);

  $F_4, SU(3) \times G_2, USp(8), G_2, SU(3)$(S).

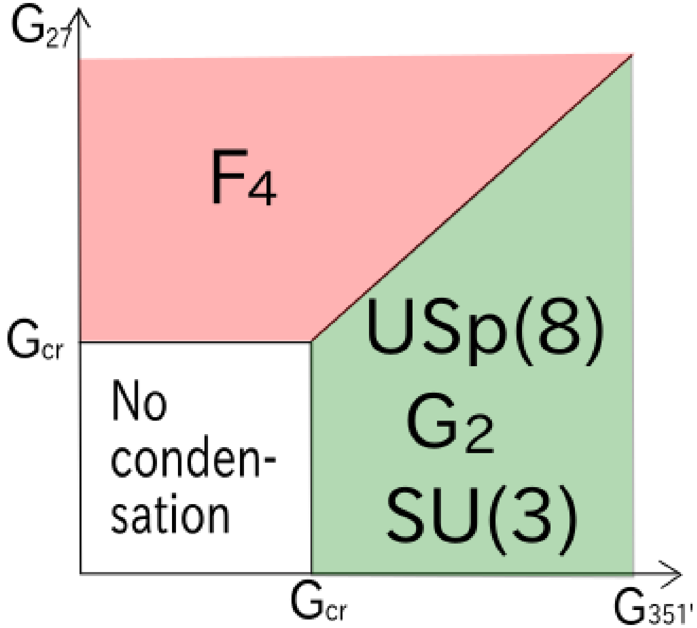
- E_6 **の $\mathbf{27}$ と $\mathbf{351'}$ 表現の最大小群**は何か?

  $\mathbf{27}$ の場合，$SO(10)$(R); F_4(S)

  $\mathbf{351'}$ の場合，$SO(10)$(R); $F_4, USp(8), G_2, SU(3), SU(4) \times SU(2)$(S).

上記の場合，$SO(10)$ を除くと最大小群は全て特殊部分群である.

E_6 のNJL有効模型での解析結果 [35, T.Kugo,J.Sato'94]



(注) G_{27} と $G_{351'}$ はNJLタイプの相互作用の結合定数とする.

NJL有効模型の近似解析の限りでは E_6 は特殊部分群へしか破れないという結果となっている.

$SU(n)$ 対称性の破れ [1, 34, e.g.,M.E.Peskin'80;T.Kugo,N.Y.'19]

$SU(n)$ 群の力学的対称性の破れでは何の対称性が実現されるか?

- $SU(n)$ $\square$ (定義表現) フェルミオンのみ含まれるNJLタイプの有効模型を考える.
- $SU(n)$ のテンソル積 $(\square \otimes \square)_S = \square\square$ から複素スカラーの補助場として $\Phi_{\square\square}$ を導入し, 1-ループの有効ポテンシャルの範囲で解析する.

(注) $\square$, $\square\square$ はヤング図である.

$SU(n)$ の最大部分群と最大小群 [5, N.Y.'15]

- $SU(n)$ **の最大部分群**は何か?

  $SU(m) \times SU(n-m) \times U(1) (m < n)$(R);

  偶数の n ：$SO(n), USp(n)$(S); 奇数の n ：$SO(n)$(S);

  その他にも特定の n に対して，$SU(2), SU(3), ...$(S) がある.

- $SU(n)$ **の** $\square\square$ **表現の最大小群**は何か?

  $\square\square$ の場合，$SU(n-1)$(R); $SO(n)$(S).

$SU(n)$ のNJL有効模型での解析結果 [1, e.g.,T.Kugo,N.Y.'19]

$SU(n)$ □ のフェルミオンによる力学的対称性の破れのまとめ

表現	最小エネルギー状態での対称性
□□	$SU(n) \to SO(n)$(S)

NJL有効模型の近似解析の限りでは $SU(n)$ は特殊部分群 $SO(n)$ へしか破れないという結果となった.

次に特殊大統一理論 [27–29, N.Yamatsu,17-18] で必要とされている $SU(16) \to SO(10)$ の破れを起こしうる二階反対称テンソルの場合を見る.

$SU(n)$大統一理論での対称性の破れ [1, T.Kugo,N.Y.'19]

$SU(n)$群の力学的対称性の破れでは何の対称性が実現されるか?

- $SU(n)$ $\ydiagram{1,1}$ (二階反対称テンソル表現) フェルミオンのみ含まれるNJLタイプの有効模型を考える.
- $SU(n)$のテンソル積 $\left(\ydiagram{1,1} \otimes \ydiagram{1,1}\right)_S = \ydiagram{2,2} \oplus \ydiagram{1,1,1,1}$ から複素スカラーの補助場として$\Phi_{\ydiagram{2,2}}$と$\Phi_{\ydiagram{1,1,1,1}}$の二つを導入し，1-ループの有効ポテンシャルの範囲で解析する.

(注) $\ydiagram{1,1}$, $\ydiagram{2,2}$, $\ydiagram{1,1,1,1}$ はヤング図である.

$SU(n)$の最大部分群と最大小群 [5, N.Y.'15]

- $SU(n)$**の最大部分群**は何か?

  $SU(m) \times SU(n-m) \times U(1) (m < n)$(R);

  偶数のn：$SO(n), USp(n)$(S); 奇数のn：$SO(n)$(S);

  その他にも特定のnに対して，$SU(2), SU(3), ...$(S)がある.

- $SU(n)$**の** $\ydiagram{2,2}$ **と** $\ydiagram{1,1,1,1}$ **表現の最大小群**は何か?

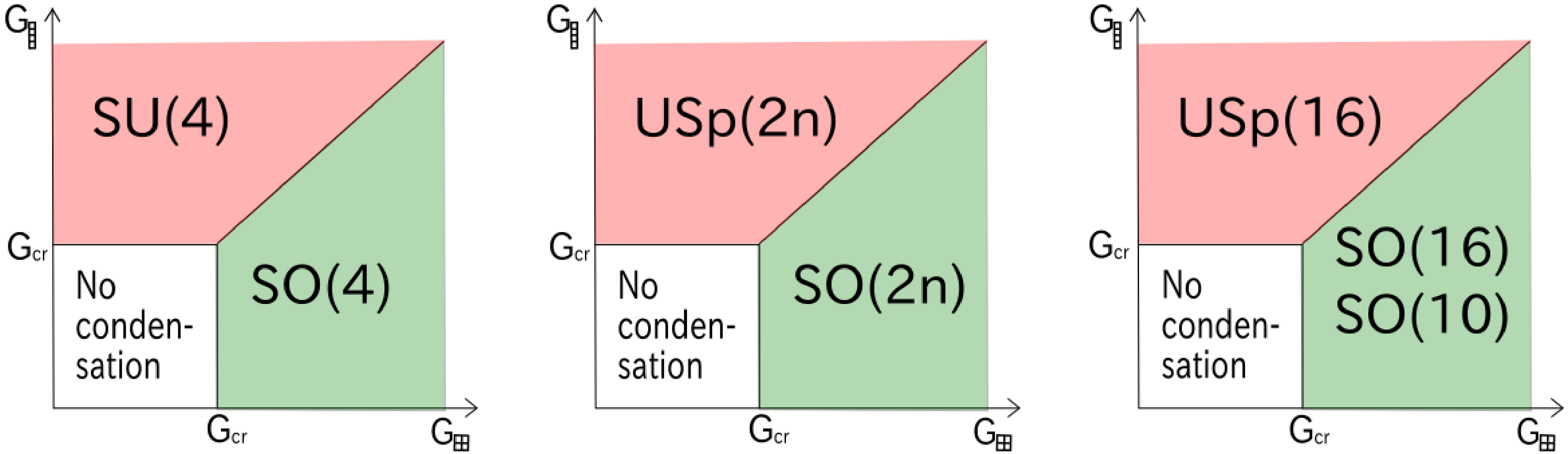
  $\ydiagram{2,2}$ の場合，$SU(2) \times SU(n-2)$(R); $SO(n), USp(2[n/2]), ...$(S)

  $\ydiagram{1,1,1,1}$ の場合，$SU(4) \times SU(n-4)$(R); $USp(2[n/2]), ...$(S).

$SU(N)$ のNJL有効模型での解析結果 [1, T.Kugo,N.Y.'19]

偶数の $N=2n(n\geq 2)$ の場合の $SU(N)$ の対称性の破れ

$n=2$ の場合　　$n\geq 3(n\neq 8)$ の場合　　$n=8$ の場合

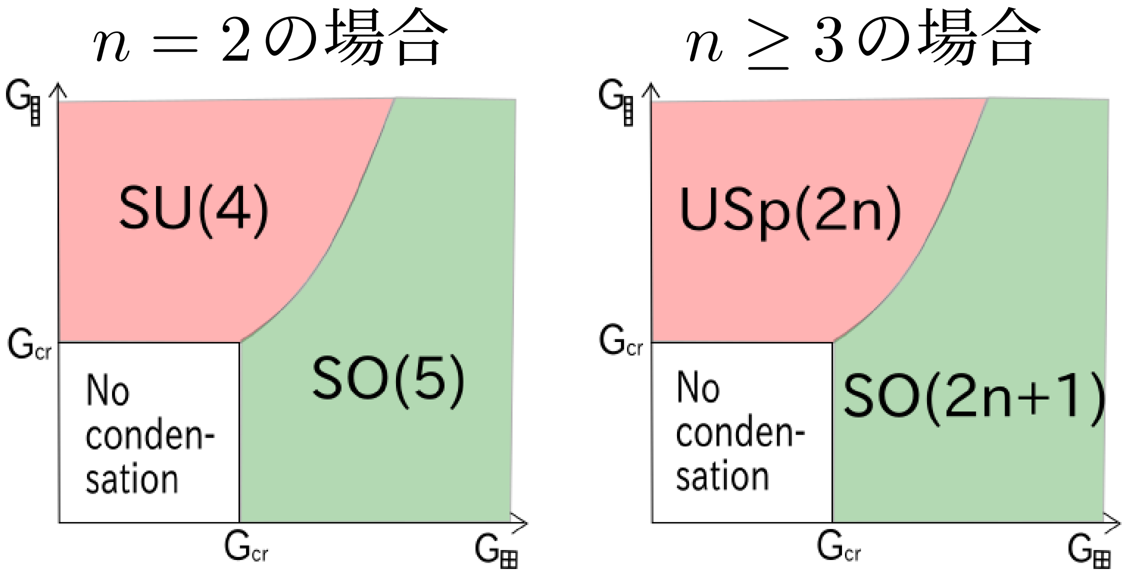


(注) $G_{\boxplus}$ と $G_{\text{▯}}$ は各々 $SU(N)$ の ⊞ と ▯ のNJLタイプの結合定数.

$SU(N)$ のNJL有効模型での解析結果 [1, T.Kugo,N.Y.'19]

奇数の $N=2n+1(n\geq 2)$ の場合の $SU(N)$ の対称性の破れ

$n=2$ の場合 $n\geq 3$ の場合



(注) $G_{\boxplus}$ と $G_{\text{(4-box column)}}$ は各々 $SU(N)$ の ⊞ と (縦4箱) のNJLタイプの結合定数.

まとめ

リー群の **特殊部分群** への破れは特別なことではないことを，NJL タイプの有効相互作用を用いた解析結果で示した.

$SU(n)$□ フェルミオンでの有効模型の解析結果

- すくなくとも NJL 有効模型の近似解析の限りでは $n = 5$ の場合以外 $SU(n)$ は特殊部分群に破れる.

$\Rightarrow$ 対称性の特殊部分群への破れは全く特別なことではない.

$\Rightarrow$ 標準理論を越える模型構築などでは真面目に考慮するべきことと考えられる.

いくつかのコメント

- $SU(n)$ の定義・随伴表現のスカラー場での対称性の破れは正則部分群しか最大小群が存在しない特別な例である.

$\Rightarrow$ 他の表現や複合スカラー場の場合にこれらと同様に正則部分群への破れしか起こらないと考えるのは止めた方が良い.

- 単一のスカラー場だけであればほとんどの場合 (Michel 予想 [30, L.Michel'80] の通りに) 最大小群に破れるが，複数のスカラー場があると最大でない小群に破れうる.

References

[1] T. Kugo and N. Yamatsu, "Is Symmetry Breaking into Special Subgroup Special?," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2019** (2019) in press, `arXiv:1904.06857 [hep-ph]`.

[2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I," *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.

[3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II," *Phys. Rev.* **124** (1961) 246–254.

[4] R. Slansky, "Group Theory for Unified Model Building," *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.

[5] N. Yamatsu, "Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building," `arXiv:1511.08771 [hep-ph]`.

[6] H. Georgi and S. L. Glashow, "Unity of All Elementary Particle Forces," *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438–441.

[7] K. Inoue, A. Kakuto, and Y. Nakano, "Unification of the Lepton-Quark World by the Gauge Group SU(6)," *Prog.Theor.Phys.* **58** (1977) 630.

[8] H. Fritzsch and P. Minkowski, "Unified Interactions of Leptons and Hadrons," *Ann. Phys.* **93** (1975) 193–266.

[9] F. Gursey, P. Ramond, and P. Sikivie, "A Universal Gauge Theory Model Based on E_6," *Phys. Lett.* **B60** (1976) 177.

[10] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, "Grand Gauge-Higgs Unification," *Phys. Rev.* **D84** (2011) 051701, arXiv:1103.1234 [hep-ph].

[11] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, "Gauge Symmetry Breaking Patterns in an SU(5) Grand Gauge-Higgs Unification Model," *Phys. Rev.* **D95** no. 1, (2017) 015021, arXiv:1608.05496 [hep-ph].

[12] G. Burdman and Y. Nomura, "Unification of Higgs and Gauge Fields in Five-Dimensions," *Nucl. Phys.* **B656** (2003) 3–22, arXiv:hep-ph/0210257 [hep-ph].

[13] C. Lim and N. Maru, "Towards a Realistic Grand Gauge-Higgs Unification," *Phys.Lett.* **B653** (2007) 320–324, arXiv:0706.1397 [hep-ph].

[14] H. D. Kim and S. Raby, "Unification in 5-D SO(10)," *JHEP* **01** (2003) 056, arXiv:hep-ph/0212348 [hep-ph].

[15] T. Fukuyama and N. Okada, "A Simple SO(10) GUT in Five Dimensions," *Phys. Rev.* **D78** (2008) 015005, arXiv:0803.1758 [hep-ph].

[16] Y. Kawamura and T. Miura, "Classification of Standard Model Particles in E_6 Orbifold Grand Unified Theories," *Int. J. Mod. Phys.* **A28** (2013) 1350055, `arXiv:1301.7469 [hep-ph]`.

[17] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, "The Standard Model Gauge Symmetry from Higher-Rank Unified Groups in Grand Gauge-Higgs Unification Models," *JHEP* **06** (2017) 018, `arXiv:1704.04840 [hep-ph]`.

[18] Y. Hosotani and N. Yamatsu, "Gauge-Higgs Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01, `arXiv:1504.03817 [hep-ph]`.

[19] Y. Hosotani and N. Yamatsu, "Gauge-Higgs Grand Unification," *PoS* **PLANCK2015** (2015) 058, `arXiv:1511.01674 [hep-ph]`.

[20] N. Yamatsu, "Gauge Coupling Unification in Gauge-Higgs Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 043B02, `arXiv:1512.05559 [hep-ph]`.

[21] A. Furui, Y. Hosotani, and N. Yamatsu, "Toward Realistic Gauge-Higgs Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 093B01, `arXiv:1606.07222 [hep-ph]`.

[22] Y. Hosotani and N. Yamatsu, "Gauge-Higgs Seesaw Mechanism in 6-Dimensional Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** no. 9, (2017) 091B01, `arXiv:1706.03503 [hep-ph]`.

[23] Y. Hosotani and N. Yamatsu, "Electroweak Symmetry Breaking and Mass Spectra in Six-Dimensional Gauge-Higgs Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2018** no. 2, (2018) 023B05, `arXiv:1710.04811 [hep-ph]`.

[24] E. Dynkin, "Maximal Subgroups of the Classical Groups," *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957) 245.

[25] E. Dynkin, "Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras," *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957) 111.

[26] R. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. Benjamin-Cummings Publishing Company, 1985.

[27] N. Yamatsu, "Special Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** no. 6, (2017) 061B01, `arXiv:1704.08827 [hep-ph]`.

[28] N. Yamatsu, "String-Inspired Special Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** no. 10, (2017) 101B01, `arXiv:1708.02078 [hep-ph]`.

[29] N. Yamatsu, "Family Unification in Special Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2018** no. 9, (2018) 091B01, `arXiv:1807.10855 [hep-ph]`.

[30] L. Michel, "Symmetry Defects and Broken Symmetry. Configurations Hidden Symmetry," *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 617–651.

[31] L.-F. Li, "Group Theory of the Spontaneously Broken Gauge Symmetries," *Phys. Rev.* **D9** (1974) 1723–1739.

[32] S. Meljanac, M. Milosevic, and S. Pallua, "Extrema of Higgs Potential and Higher Representations," *Phys. Rev.* **D26** (1982) 2936–2939.

[33] L. Susskind, "Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking in the Weinberg- Salam Theory," *Phys. Rev.* **D20** (1979) 2619–2625.

[34] M. E. Peskin, "The Alignment of the Vacuum in Theories of Technicolor," *Nucl.Phys.* **B175** (1980) 197–233.

[35] T. Kugo and J. Sato, "Dynamical Symmetry Breaking in an E(6) GUT Model," *Prog. Theor. Phys.* **91** (1994) 1217–1238, `arXiv:hep-ph/9402357 [hep-ph]`.

[36] A. Hebecker and J. March-Russell, "The Structure of GUT Breaking by Orbifolding," *Nucl. Phys.* **B625** (2002) 128–150, `arXiv:hep-ph/0107039 [hep-ph]`.