K → ππ 崩壊における

ε′ の格子計算

富井　正明 (コネチカット大学)

arXiv:2004.09440 (RBC & UKQCD Collaborations) will be published in PRD

Co-authors: R. Abbott, T. Blum, P.A. Boyle, M. Bruno, N.H. Christ, D. Hoying, C. Jung,
C. Kelly, C. Lehner, R.D. Mawhinney, D.J. Murphy, C.T. Sachrajda, A. Soni, T. Wang

UCONN
UNIVERSITY OF CONNECTICUT

The RBC & UKQCD collaborations

BNL and BNL/RBRC

Yasumichi Aoki (KEK)
Peter Boyle (Edinburgh)
Taku Izubuchi
Yong-Chull Jang
Chulwoo Jung
Christopher Kelly
Meifeng Lin
Aaron Meyer
Hiroshi Ohki
Shigemi Ohta (KEK)
Amarjit Soni

UC Boulder

Oliver Witzel

CERN

Mattia Bruno

Columbia University

Ryan Abbot
Norman Christ
Duo Guo
Bob Mawhinney
Bigeng Wang
Tianle Wang
Yidi Zhao

University of Connecticut

Tom Blum
Dan Hoying (BNL)
Luchang Jin (RBRC)
Cheng Tu
Masaaki Tomii

Edinburgh University

Luigi Del Debbio
Felix Erben
Vera Gülpers
Tadeusz Janowski
Julia Kettle
Michael Marshall
Fionn Ó hÓgáin
Antonin Portelli
Tobias Tsang
Andrew Yong
Azusa Yamaguchi

UAM Madrid

Julien Frison

University of Liverpool

Nicolas Garron

MIT

David Murphy

Peking University

Xu Feng

University of Regensburg

Christoph Lehner (BNL)

University of Southampton

Nils Asmussen
Jonathan Flynn
Ryan Hill
Andreas Jüttner
James Richings
Chris Sachrajda

Stony Brook University

Jun-Sik Yoo
Sergey Syritsyn (RBRC)

内容

- イントロ
  - K → ππ における CP の破れと ΔI = 1/2 則
  - 計算方法の概略
  - 前回の結果（RBC/UKQCD, 2015）
- K → ππ 行列要素
- 非摂動繰り込みと結果
- 今後の課題

K → ππ における CP の破れ

CP odd CP even

$|K_L\rangle = |K_2\rangle + \varepsilon |K_1\rangle$

ε′ direct CPV

ε indirect CPV

$\langle \pi\pi|$

CP even

$$\eta_{00} \equiv \frac{A(K_L \to \pi^0\pi^0)}{A(K_S \to \pi^0\pi^0)}$$

$$\eta_{+-} \equiv \frac{A(K_L \to \pi^+\pi^-)}{A(K_S \to \pi^+\pi^-)}$$

- K_L → ππ: CP 極限で禁止
- ε′ vs ε
  - Re $(\varepsilon'/\varepsilon)_{exp}$ = 16.6(2.3) x 10^{-4} (2000年頃)
  - SM で説明可能か?

$$\epsilon = \frac{\eta_{00} + 2\eta_{+-}}{3}$$

$$\epsilon' = \frac{\eta_{+-} - \eta_{00}}{3}$$

I = 0 & I = 2 崩壊モード

$$\langle(\pi\pi)_{I=0}| = \sqrt{1/3}\langle\pi^0\pi^0| + \sqrt{2/3}\langle\pi^+\pi^-|, \quad \langle(\pi\pi)^{I_3=0}_{I=2}| = -\sqrt{2/3}\langle\pi^0\pi^0| + \sqrt{1/3}\langle\pi^+\pi^-|$$

- アイソスピン固有状態への振幅

  $A_I = \langle(\pi\pi)_I|H_W|K\rangle$

- アイソスピン極限で計算する場合に便利

- A_2 : 高精度に計算可能 (PRL108 (2012) 141601, PRD91 (2015) 074502)
  - 2つの格子間隔: 2.36 GeV, 1.73 GeV → 連続極限
  - Re A_2 = 1.50(4)$_{stat}$(14)$_{sys}$ x 10^{-8} GeV, Im A_2 = -6.99(20)$_{stat}$(84)$_{sys}$ x 10^{-13} GeV

    cf: (Re A_2)$_{exp}$ = 1.479(4) x 10^{-8} GeV

- ε': A_0 & A_2 の両方必要

ΔI = 1/2 則

- 実験事実

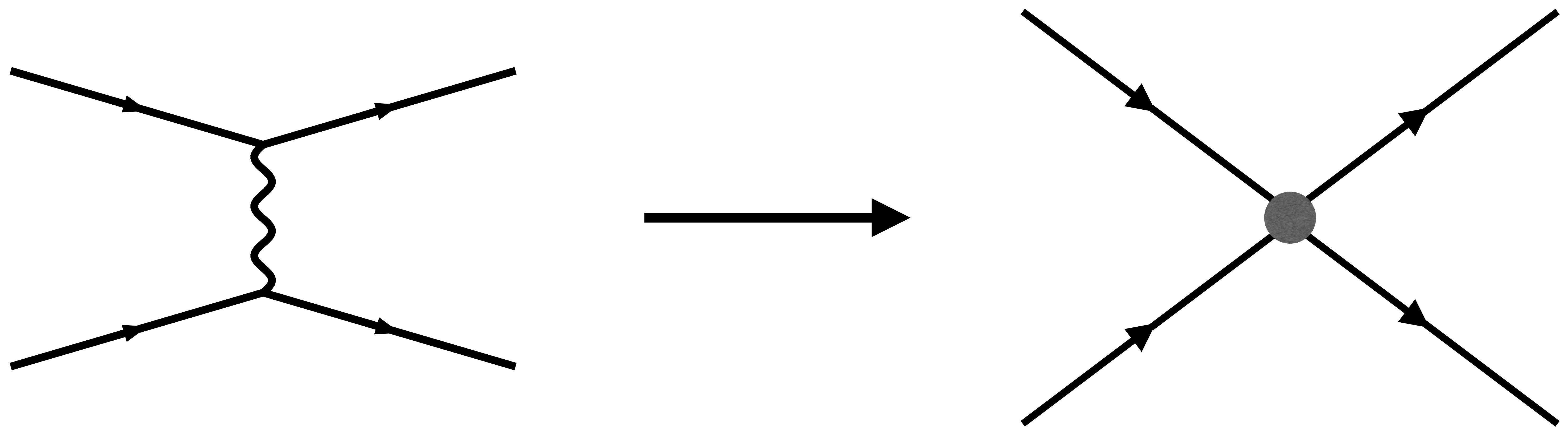
$$\frac{\mathrm{Re}\,A_0}{\mathrm{Re}\,A_2} = 22.45(6)$$: large suppression of ΔI = 3/2 (A_2) mode

- 摂動 QCD の LO: Re A_0 = 2 Re A_2

- 10 倍が説明つかない。 QCD or BSM?

弱崩壊現象へのアプローチ

- 2 つの典型的スケール
  - 電弱スケール: m_W = 80 GeV, m_Z = 91 GeV
  - QCD スケール: $\Lambda_{QCD} \approx$ 300 MeV
- 有効相互作用
  - contributions from heavy particles: effective interactions



4-Fermi interactions

x

行列要素の計算方法

- 有効相互作用

ウィルソン係数
- 重い粒子の情報 t, W, Z, …
- 摂動 QCD

$$H_W = \sum_i \underline{w_i^R(\mu)}\,\underline{O_i^R(\mu)}$$

有効演算子 (4フェルミなど)
- 軽い粒子からなる g, u, d, s, …
- 格子 QCD の担当

- 格子 QCD で　$M_i^{lat} = \langle out|O_i^{lat}|in\rangle$
  - フル QCD の効果が計算可能

- 繰り込み
  - $O_i^{lat} \to O_i^R(\mu),\quad M_i^{lat} \to M_i^R(\mu)$　：非摂動繰り込み
  - $w_i^{\overline{MS}}(\mu) \to w_i^R(\mu)$　：摂動マッチング

ΔS = 1 の 4フェルミ演算子

- $(\bar{s}q)_{V-A}(\bar{q}'q'')_{V\pm A} = \bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)q' \cdot \bar{q}'\gamma_\mu(1\pm\gamma_5)q''$
- α, β: color indices

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= (\bar{s}_\alpha u_\beta)_{\mathrm{V-A}}\,(\bar{u}_\beta d_\alpha)_{\mathrm{V-A}}\,, \\
Q_2 &= (\bar{s}u)_{\mathrm{V-A}}\,(\bar{u}d)_{\mathrm{V-A}}\,, \\
Q_3 &= (\bar{s}d)_{\mathrm{V-A}}\sum_q(\bar{q}q)_{\mathrm{V-A}}\,, \\
Q_4 &= (\bar{s}_\alpha d_\beta)_{\mathrm{V-A}}\sum_q(\bar{q}_\beta q_\alpha)_{\mathrm{V-A}}\,, \\
Q_5 &= (\bar{s}d)_{\mathrm{V-A}}\sum_q(\bar{q}q)_{\mathrm{V+A}}\,, \\
Q_6 &= (\bar{s}_\alpha d_\beta)_{\mathrm{V-A}}\sum_q(\bar{q}_\beta q_\alpha)_{\mathrm{V+A}}\,, \\
Q_7 &= \frac{3}{2}(\bar{s}d)_{\mathrm{V-A}}\sum_q e_q\,(\bar{q}q)_{\mathrm{V+A}}\,, \\
Q_8 &= \frac{3}{2}(\bar{s}_\alpha d_\beta)_{\mathrm{V-A}}\sum_q e_q\,(\bar{q}_\beta q_\alpha)_{\mathrm{V+A}}\,, \\
Q_9 &= \frac{3}{2}(\bar{s}d)_{\mathrm{V-A}}\sum_q e_q\,(\bar{q}q)_{\mathrm{V-A}}\,, \\
Q_{10} &= \frac{3}{2}(\bar{s}_\alpha d_\beta)_{\mathrm{V-A}}\sum_q e_q\,(\bar{q}_\beta q_\alpha)_{\mathrm{V-A}}\,,
\end{aligned}
$$

Current-current operators

- $Q_1^c = (\bar{s}_\alpha c_\beta)_{\mathrm{V-A}}(\bar{c}_\beta d_\alpha)_{\mathrm{V-A}}$ & $Q_2^c = (\bar{s}c)_{\mathrm{V-A}}(\bar{c}d)_{\mathrm{V-A}}$

  enter when $n_f \geq 4$

QCD penguin operators

- sum over q runs for all active quarks

EW penguin operators

ε′ の計算方法

- アイソスピン極限の式

ππ phase shifts

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) = \mathrm{Re}\left\{\frac{i\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}}{\sqrt{2}\epsilon}\left[\frac{\mathrm{Im}\,A_2}{\mathrm{Re}\,A_2} - \frac{\mathrm{Im}\,A_0}{\mathrm{Re}\,A_0}\right]\right\} \qquad (\omega = \mathrm{Re}\,A_2/\mathrm{Re}\,A_0)$$

Lellouch-Lüscher finite volume correction　　Renormalization matrix

$$A_I = F\frac{G_F}{2}V_{us}^*V_{ud}\sum_{i,j}\underbrace{[z_i(\mu)+\tau y_i(\mu)]}_{\substack{\text{Wilson coefs.}\\ \text{pQCD}}}\underbrace{Z_{ij}(\mu)}_{\substack{\text{LQCD}\\ \text{(+pQCD)}}}\underbrace{\langle(\pi\pi)_I|Q_j^{lat}|K\rangle}_{\text{LQCD}}$$

- F & δ_I: ππ 散乱から (T. Wang, etal RBC/UKQCD in preparation)
  - 2点関数 $\langle O_{\pi\pi}(\vec{p},t)O_{\pi\pi}(\vec{p},0)^\dagger\rangle$
  - Lüscher's の方法 [Commun.Math.Phys. 219 (2001) 31]

前回（2015年）の結果

Z. Bai et al, (RBC/UKQCD) PRL115(2015) 21, 212001

- シミュレーションパラメータ
  - 32^3 x 64 (2+1 メビウスフェルミオン)
  - およそ物理点直上： m_π = 143.1(2.0) MeV, m_K = 490.6(2.2) MeV
  - カットオフ: 1/a = 1.3784(68) GeV
  - 統計サンプル：216
- Re A_0 & Im A_0: 大きな統計/系統誤差

  disconnected diagrams　摂動計算など

- ε′

$$\mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)_{\mathrm{SM}} = 1.38(5.15)_{\mathrm{stat}}(4.59)_{\mathrm{sys}} \times 10^{-4} \quad \overset{2.2\sigma}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)_{\mathrm{exp}} = 16.6(2.3) \times 10^{-4}$$

今回のアップデート

- 同じパラメータだけど
  - 統計サンプル：216 → 741
  - ππ の演算子を複数用意 → 非物理的状態によるゴミを除去（後で詳説）
  - 繰り込みスケールを非摂動的に持ち上げ → 摂動計算の部分を改善（後で）

- 要するに色々精度を高める方法を取り入れた

内容

- ☑ イントロ
- K → ππ 行列要素
  - 行列要素の計算方法と on-shell 状態の作り方
  - ππ 散乱の位相差計算での教訓
  - K → ππ
- 非摂動繰り込みと結果
- 今後の課題

行列要素の計算方法

- ユークリッド空間上の相関関数 (ゼロ空間運動量/重心系の場合)

$$\underbrace{\int d^3x_{\pi\pi} d^3x_K}_{\text{zero-momentum projection} \ (e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = 1)} \langle O_{\pi\pi}(t_{\pi\pi}, \vec{x}_{\pi\pi}) H_W(t, \vec{0}) O_K(t_K, \vec{x}_K)^\dagger \rangle$$

$$= \underbrace{\sum_{m,n}}_{O_{\pi\pi}/O_K \text{ と同じ量子数でゼロ運動量状態の足し上げ}} \langle 0|O_{\pi\pi}|\pi\pi, m\rangle \frac{1}{2E_{\pi\pi,m}} \langle \pi\pi, m|H_W|K, n\rangle \frac{1}{2E_{K,n}} \langle K, n|O_K^\dagger|0\rangle e^{-m_{\pi\pi,m}(t_{\pi\pi}-t)} e^{-m_{K,n}(t-t_K)}$$

もしも一番軽い基底状態に興味があれば...
$t_{\pi\pi}$ - t & t - t_K の大きい所を見れば良い:

$$\to \langle 0|O_{\pi\pi}|\pi\pi, 0\rangle \frac{1}{2E_{\pi\pi,0}} \langle \pi\pi, 0|H_W|K, 0\rangle \frac{1}{2E_{K,0}} \langle K, 0|O_K^\dagger|0\rangle e^{-m_{\pi\pi,0}(t_{\pi\pi}-t)} e^{-m_{K,0}(t-t_K)}$$

行列要素の計算方法

- ユークリッド空間上の相関関数 (ゼロ空間運動量/重心系の場合)

$$\underbrace{\int d^3x_{\pi\pi} d^3x_K}_{\text{zero-momentum projection}} \langle O_{\pi\pi}(t_{\pi\pi}, \vec{x}_{\pi\pi}) H_W(t, \vec{0}) O_K(t_K, \vec{x}_K)^\dagger \rangle$$

zero-momentum projection ($e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = 1$)

$$= \sum_{m,n} \langle 0|O_{\pi\pi}|\pi\pi, m\rangle \frac{1}{2E_{\pi\pi,m}} \langle \pi\pi, m|H_W|K, n\rangle \frac{1}{2E_{K,n}} \langle K, n|O_K^\dagger|0\rangle e^{-m_{\pi\pi,m}(t_{\pi\pi}-t)} e^{-m_{K,n}(t-t_K)}$$

$O_{\pi\pi}/O_K$ と同じ量子数でゼロ運動量状態の足し上げ

もしも一番軽い基底状態に興味があれば...
$t_{\pi\pi}$ - t & t - t_K の大きい所を見れば良い:

$$\to \langle 0|O_{\pi\pi}|\pi\pi, 0\rangle \frac{1}{2E_{\pi\pi,0}} \underbrace{\langle \pi\pi, 0|H_W|K, 0\rangle}_{\text{これが欲しかったもの？}} \frac{1}{2E_{K,0}} \langle K, 0|O_K^\dagger|0\rangle e^{-m_{\pi\pi,0}(t_{\pi\pi}-t)} e^{-m_{K,0}(t-t_K)}$$

これが欲しかったもの？

On-shell ππ state は一番軽くない

- K中間子の基底状態はフィジカル：$E_K = m_K \approx 500$ MeV
- ππ 基底状態は π が 2 つともゼロ運動量： $E_{\pi\pi,0} \approx 270$ MeV
  - 欲しいのは $| E_{\pi\pi} = m_K \approx 500$ MeV 〉（π と π の相対運動量が必要）
- 考えられる作戦

  体積を適切に調節することが必要
  ↓
  - 💡 有限体積で計算している → 運動量が離散的（3,4 番目くらいに軽い状態が on-shell ）
  - 軽い状態全部考慮して相関関数を解析する
  - 境界条件を変えて不要な内部運動量のモードを禁止する

I = 2 の場合

(PRL108 (2012) 141601, PRD91 (2015) 074502)

- ダウンクォークに反周期境界条件
  - $d(x + L\hat{e}_{x_1,\ldots,x_n}) = -d(x)$
  - 荷電パイオンも反周期境界条件を満たす

    $\pi^\pm(x + L\hat{e}_{x_1,\ldots,x_n}) = -\pi^\pm(x)$
  - $\tilde{\pi}^\pm(\vec{p}, t)|_{p_i=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$ → 一番軽い状態のエネルギー：$E^2_{\pi^\pm} = m^2_\pi + n^2(\pi/L)^2$

    L (& n) を適当に選んで $E_{\pi^+\pi^+} = m_K$
- アイソスピン変換 (Wigner-Eckart theorem):

$$\langle(\pi\pi)^{I_3=1}_{I=2}|H^{\Delta I_3=1/2}_{\Delta I=3/2}|K^+\rangle = \frac{3}{2}\underbrace{\langle(\pi\pi)^{I_3=2}_{I=2}}_{\langle\pi^+\pi^+|}|H^{\Delta I_3=3/2}_{\Delta I=3/2}|K^+\rangle$$

  - on-shell の π⁺π⁺ を取り出して A_2 の計算が可能

I = 0 の場合

- アイソスピン不変：中性のパイオンを使うしかない

  → 反周期境界条件では π^0 の余計なモードを殺せない

- G-parity 境界条件：

$$f(x + L\hat{e}_{x_1,\ldots,x_n}) = \hat{G} f(x) = \underline{\hat{C}}\,\underline{e^{-i\pi \hat{I}_y}}\, f(x) \qquad (f:\ \text{isospin representation})$$

Charge conjugation　180° isospin rotation

  - $\hat{G}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\bar{d}^T \\ C\bar{u}^T \end{pmatrix},\quad \hat{G}\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^T C^{-1} \\ d^T C^{-1} \end{pmatrix}$

  - パイオンは全部 G-parity odd になる → 余計なモードを殺せる

ππ 位相差 δ_I の計算

T. Wang, et al (RBC/UKQCD) in preparation

- Lüscher formula ー 位相差 δ_I と有限体積での状態の運動量 k の関係式
  - 例: 2ボソン系、1+1次元で空間方向に周期的境界条件、時間方向は無限

周期的境界条件: $e^{ikL+2i\delta(k)} = 1 \;\rightarrow\; \underline{k_n L + 2\delta(k_n) = 2n\pi}$　　n: 離散的運動量のラベル

Lüscher formula for this toy case

- 分散関係式：$E_n = 2\sqrt{m^2 + k_n^2}$
- δ_I の計算方法
  - 2点関数から E_n（次のスライド）→ 分散関係式から k_n
  - Lüscher formula 3+1次元 G-parity 版から $\delta(k_n)$

ππ 状態のエネルギー

- ユークリッド2点相関関数

$$G_{\pi\pi}(t)=\int d^3x\langle O_{\pi\pi}(t,\vec{x})O_{\pi\pi}(0,\vec{y})^\dagger\rangle=\sum_n\langle 0|O_{\pi\pi}|\pi\pi,n\rangle\frac{1}{2E_{\pi\pi,n}}\langle\pi\pi,n|O^\dagger_{\pi\pi}|0\rangle e^{-E_{\pi\pi,n}t}$$

- Effective energy

$$E^{\mathrm{eff}}_{\pi\pi}(t)=\ln\frac{G_{\pi\pi}(t)}{G_{\pi\pi}(t+1)}\xrightarrow{\text{large } t}E_{\pi\pi,0}$$

G-parity 境界条件によりこれが知りたいエネルギー

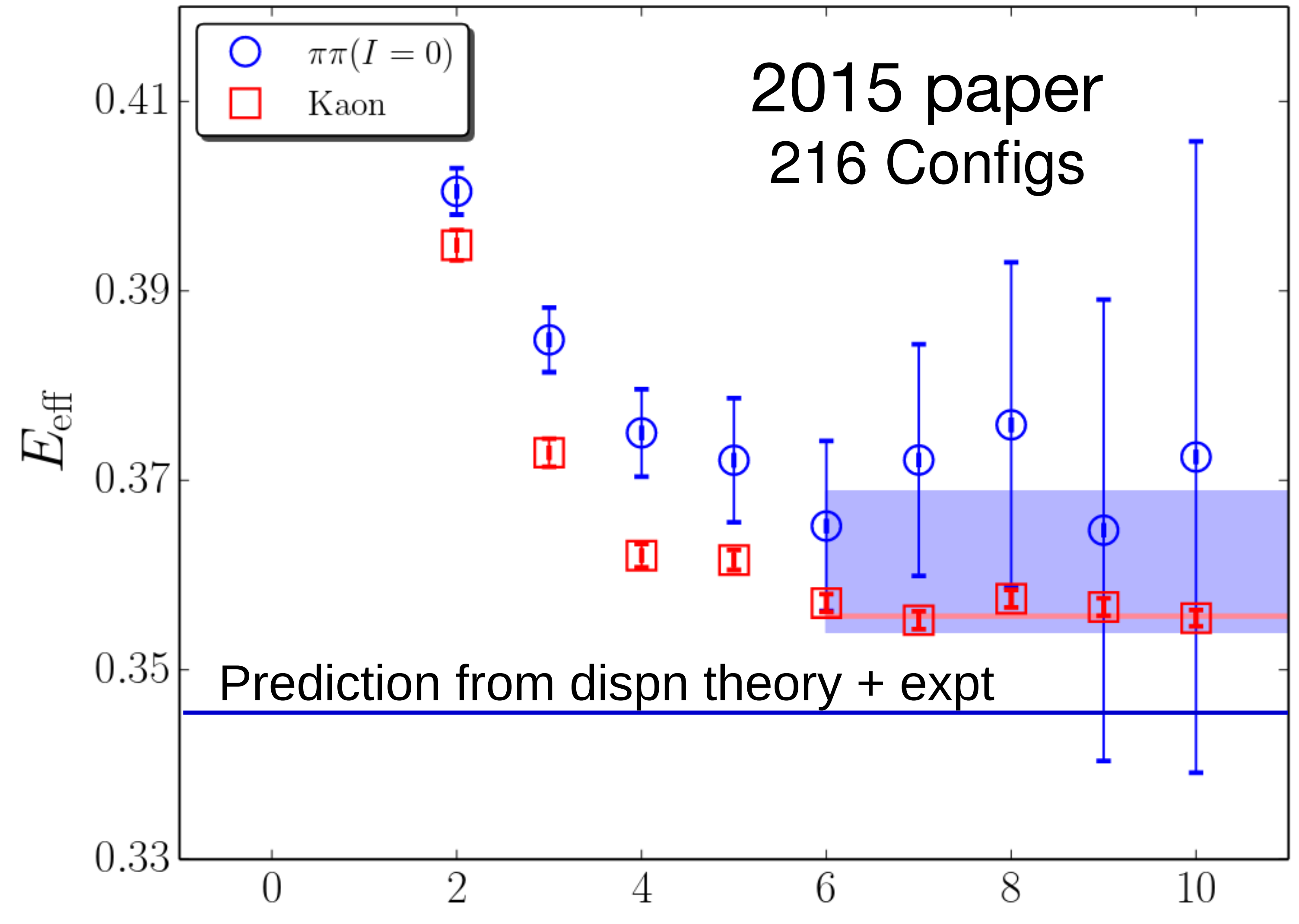
- $E^{\mathrm{eff}}_{\pi\pi}(t)$ が t に寄らなくなったら $E_{\pi\pi,0}$ に行き着いたと考えられる

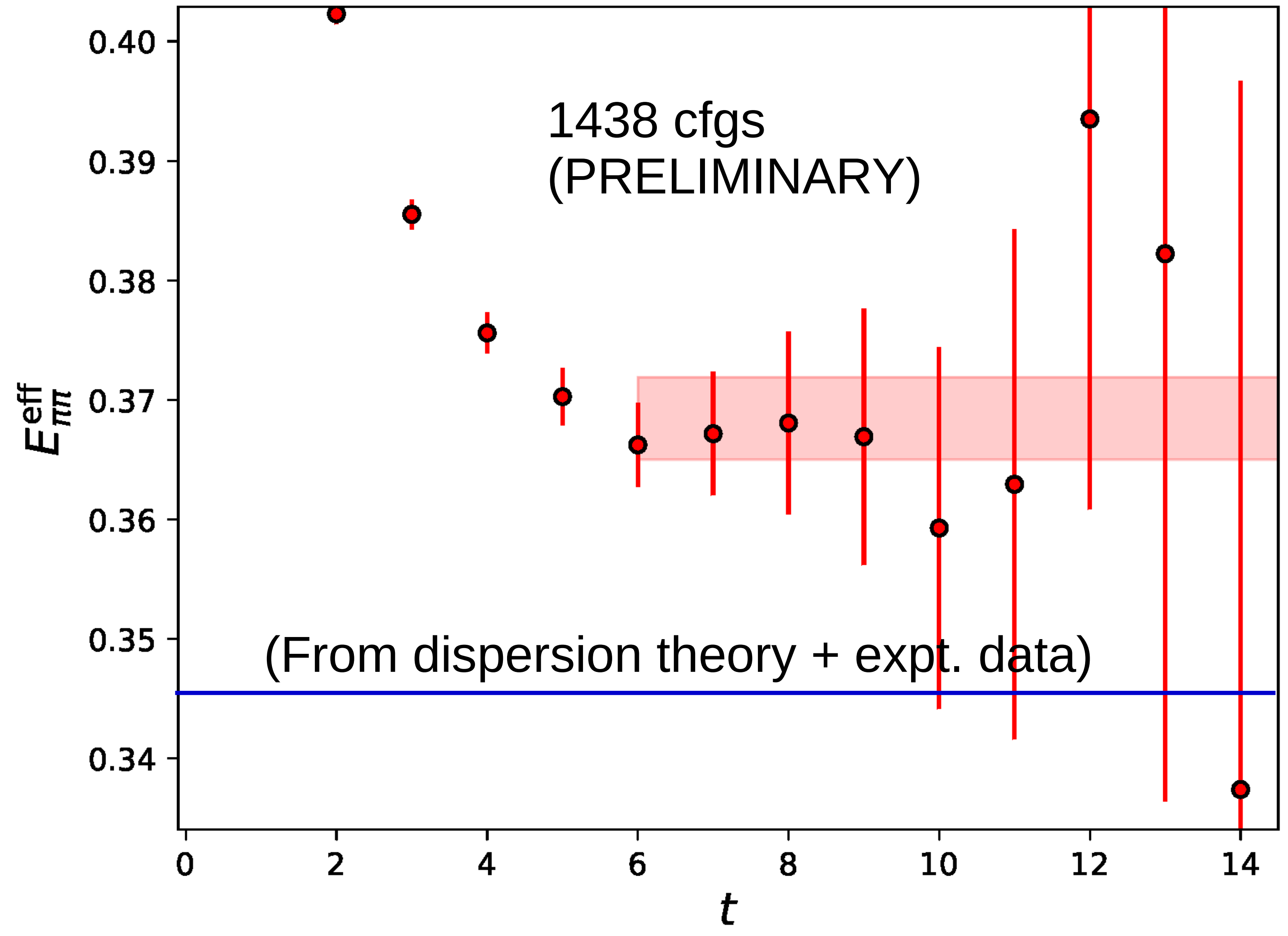
でも、実際の計算では判断が難しい（次のスライド）

The “ππ puzzle”

- 格子計算と現象論で合わない
  - $\delta_0^{2015} = 23.8(4.9)(2.2)^\circ, \quad \delta_0^{2020'} = 19.1(2.5)(1.2)^\circ$
  - $\delta_0^{\mathrm{ph+exp}} = 36^\circ$
- 一応、第一励起状態も考慮して解析している
  - 2種類のフィットで同じ結果

    $$G(t) = z_0 e^{-E_0 t} \ \& \ G(t) = z_0 e^{-E_0 t} + z_1 e^{-E_1 t}$$
- なぜ合わない?
  - 結論: 励起状態の取り扱いがアマかった



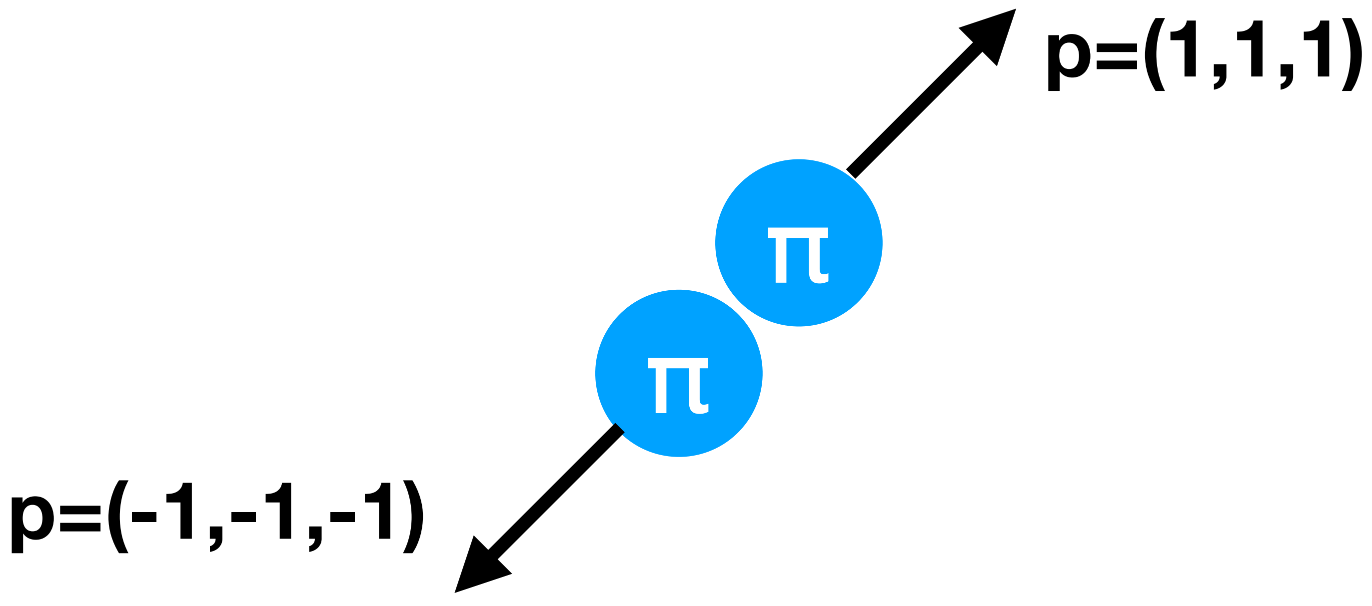


解決法

- ππ の演算子を複数使う
  - 2015年

    $O_{\pi\pi} = \pi\pi(1,1,1)$
  - 2020年の追加分

    $\pi\pi(3,1,1), \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$



- 2点関数行列

$$G_{ij}(t) = \langle O_i(t) O_j(0)^\dagger \rangle = \sum_n A_{i,n} A_{j,n}^\dagger e^{-E_n t}$$

  - 複数の状態を考慮したフィットの情報が増えている
  - あるいは適当に線形結合して励起状態 2つを消せる

励起状態の分離

フィット結果：$E^{lat}_{\pi\pi} = 479.5(1.4)$ MeV

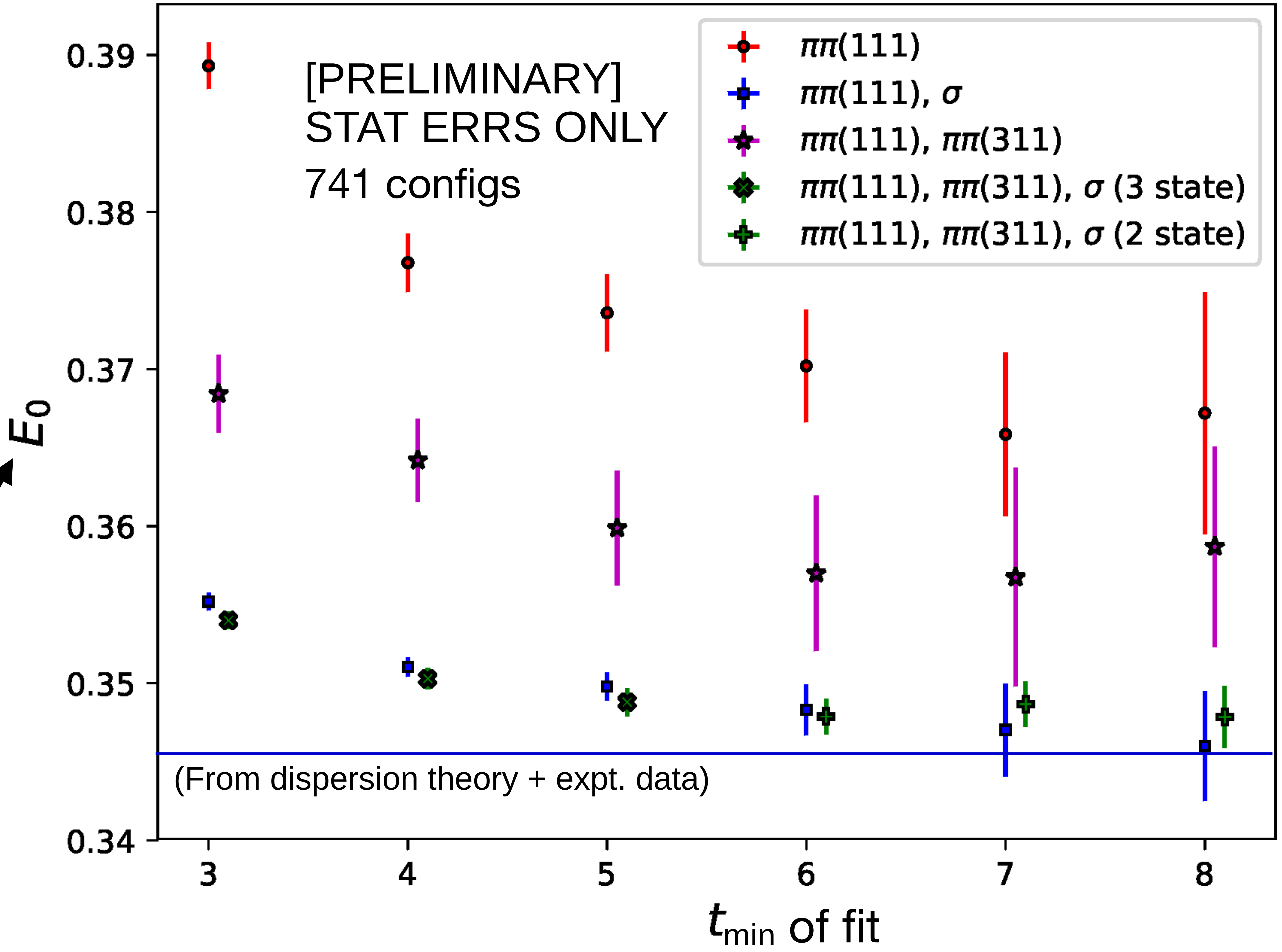
$$\delta_0^{(1,1,1)} = 19.1(2.5)(1.2)^\circ$$

↓

$$\delta_0^{lat}(E^{lat}_{\pi\pi}) = 32.3(2.1)^\circ$$

$$\delta_0^{ph+exp}(E^{lat}_{\pi\pi}) = 35.9^\circ$$

フィット結果



$_{I=0}\langle\pi\pi|\, Q_i\, |K\rangle$ from 3pt functions

- Revisiting 3pt functions

$$G_i^{\rm sink}(t-t_K, t_{\rm sink}-t) = \int d^3x_{\rm sink} d^3x_K \langle O_{\rm sink}(t_{\rm sink},\vec{x}_{\rm sink}) Q_i(t,\vec{0}) O_K(t_K,\vec{x}_K)^\dagger \rangle$$

$$= \sum_{m,n} \underbrace{\langle 0|O_{\rm sink}|\pi\pi,m\rangle \frac{1}{2E_{\pi\pi,m}}}_{A_{\rm sink}^m} \underbrace{\langle \pi\pi,m|H_W|K,n\rangle}_{M_i^{mn}} \underbrace{\frac{1}{2E_{K,n}} \langle K,n|O_K^\dagger|0\rangle}_{A_K^n} e^{-E_{\pi\pi,m}(t_{\rm sink}-t)} e^{-m_{K,n}(t-t_K)}$$

- Effective matrix elements

from ππ 2pt functions

$$M_i^{\rm eff,sink}(t-t_K, t_{\rm sink}-t) = G_i^{\rm sink}(t-t_K, t_{\rm sink}-t)\left(A_{\rm sink}^0 A_K^{0\,\dagger} e^{-E_{\pi\pi,0}(t_{\rm sink}-t)} e^{-m_{K,0}(t-t_K)}\right)^{-1}$$

from kaon 2pt functions

$$= M_i^{00} + \underbrace{\sum_m \frac{A_{\rm sink}^m}{A_{\rm sink}^0} M_i^{m0} e^{-(E_{\pi\pi,m}-E_{\pi\pi,0})(t_{\rm sink}-t)} + \text{kaon excited-state contributions}}_{\to\ 0 \text{ at large } t-t_K \,\&\, t_{\rm sink}-t}$$

X

K → ππ 行列要素の計算

- 3 点関数

$$G_i^{\alpha}(t-t_K, t_{\pi\pi}-t) = \langle O_{\pi\pi}^{\alpha}(t_{\pi\pi}) Q_i(t) O_K(t_K)^{\dagger} \rangle$$

  - 十分に大きな $t-t_K, t_{\pi\pi}-t$ で欲しい行列要素からの寄与（基底状態）でサチる

- Effective matrix elements
  - $M_i^{\mathrm{eff},\alpha}(t-t_K, t_{\pi\pi}-t)$　（定義は Slack）
  - 励起状態による寄与の有無を調べるツール
  - 基底状態でサチったところでは欲しい行列要素で一定になる

Effective MEs

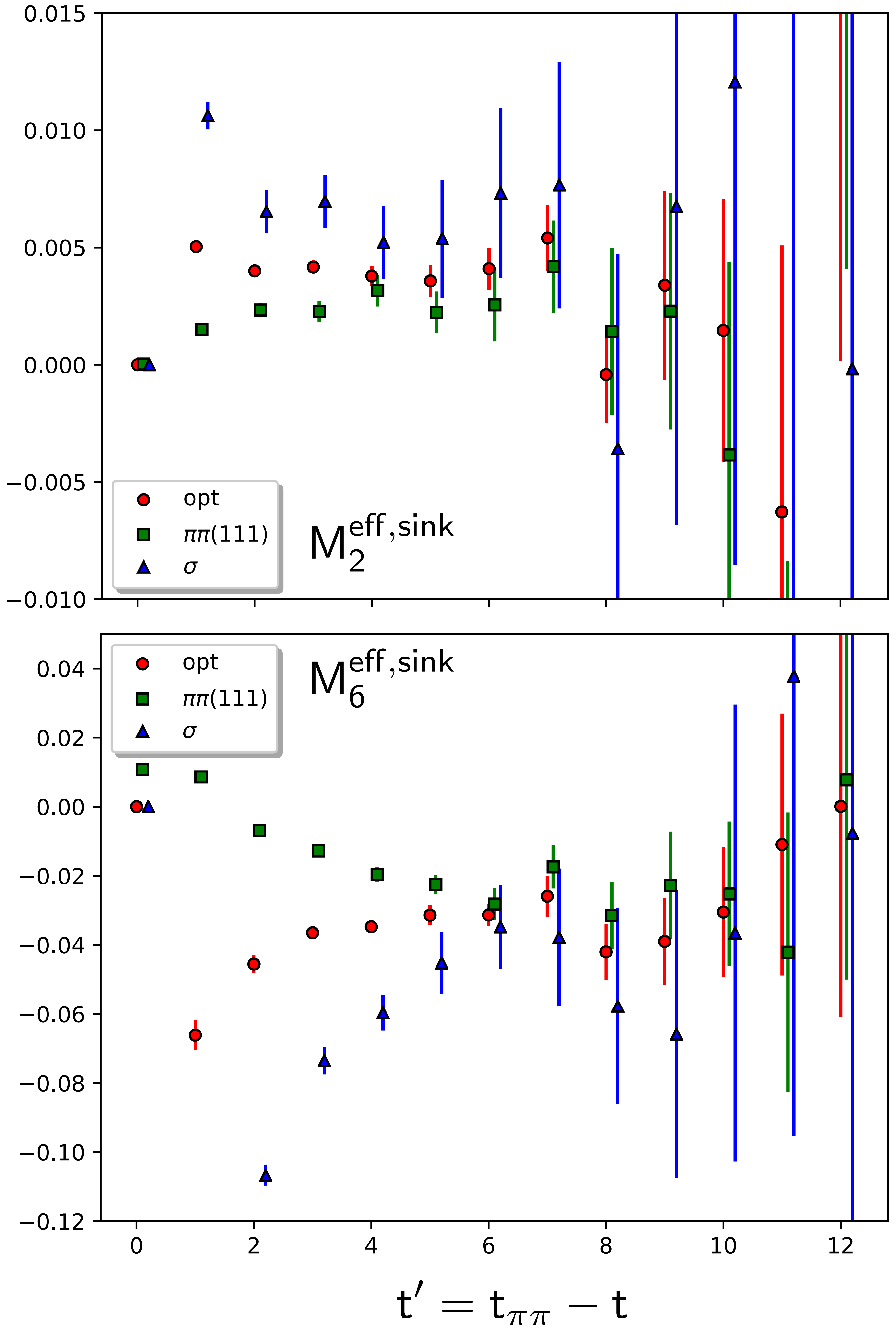
- 3種類の ππ 演算子

$$O^{\alpha}_{\pi\pi} = O_{\pi\pi(1,1,1)},\ O_{\sigma},\ O_{\mathrm{opt}}$$

- O_{opt}: ππ(1,1,1) & σ の適当な線形結合

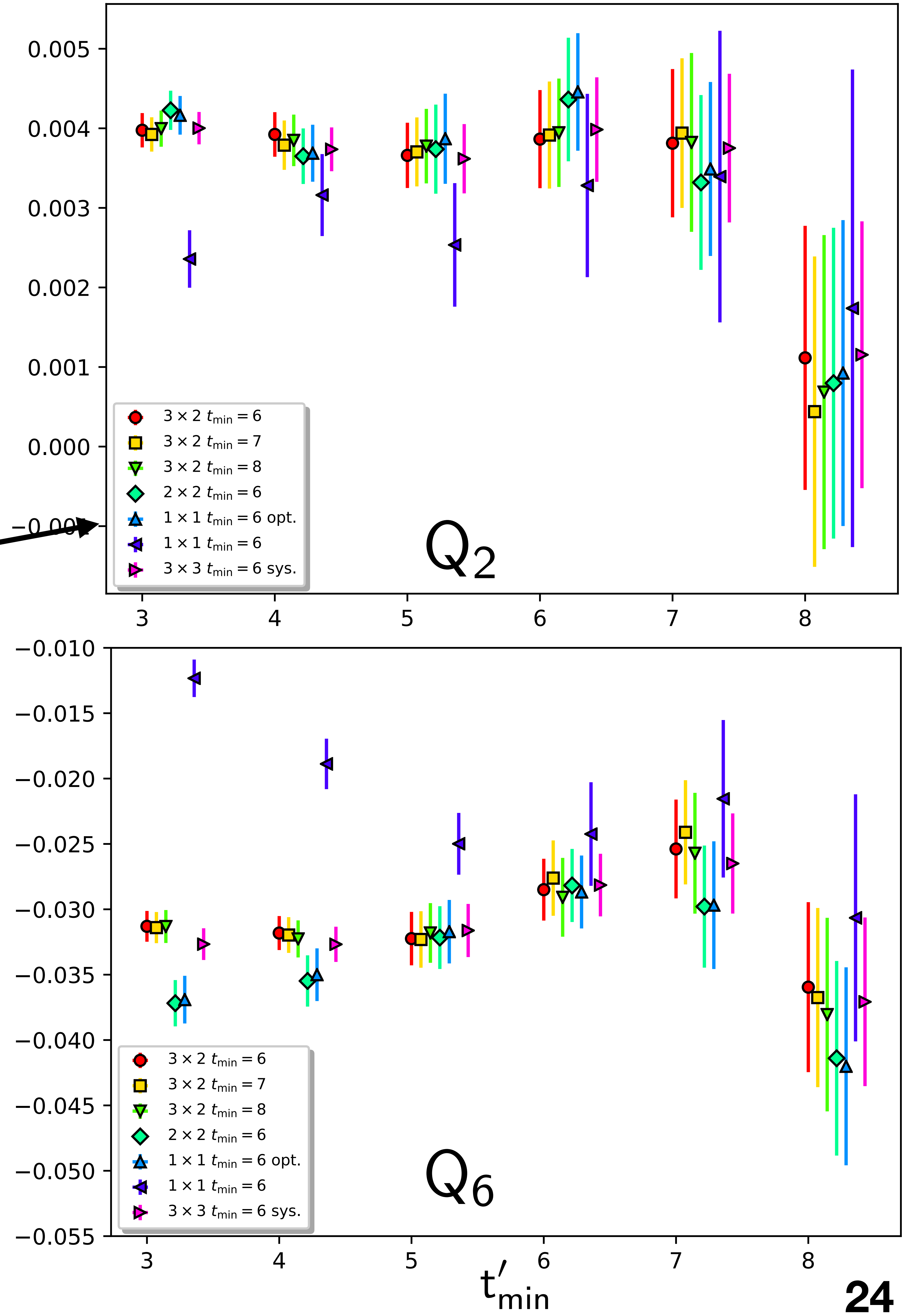
$$O_{\mathrm{opt}} = r_1 O_{\pi\pi(1,1,1)} + r_2 O_{\sigma}$$

  - 第一励起状態を殺す組み合わせ



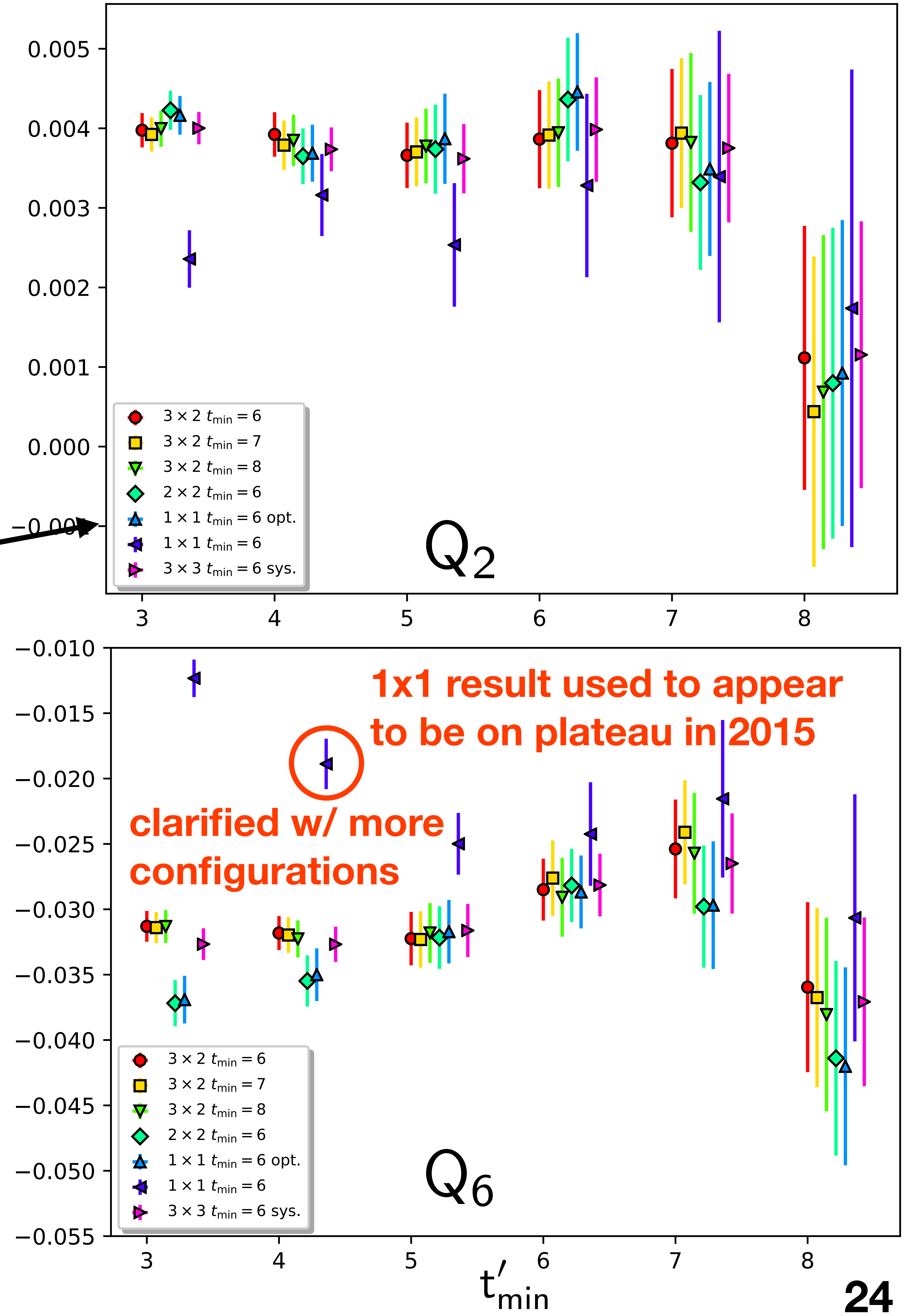
フィット結果

- 色々なフィット
  - t'_{min}: min of (t_{sink} - t) [3-8]
  - t_{min}: min of (t-t_K)   [6-8]
  - (# of operators) x (# of states considered)
- ππ(311) の演算子は系統誤差の評価に利用
- 2015年は励起状態の寄与が過小評価されていた



フィット結果

- 色々なフィット
  - t'_{min}: min of (t_{sink} - t) [3-8]
  - t_{min}: min of (t-t_K) [6-8]
  - (# of operators) x (# of states considered)
- ππ(311) の演算子は系統誤差の評価に利用
- 2015年は励起状態の寄与が過小評価されていた



ε′ の計算方法

- Isospin-limit formula

ππ phase shifts

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) = \mathrm{Re}\left\{\frac{i\omega e^{i(\delta_2-\delta_0)}}{\sqrt{2}\epsilon}\left[\frac{\mathrm{Im}\,A_2}{\mathrm{Re}\,A_2} - \frac{\mathrm{Im}\,A_0}{\mathrm{Re}\,A_0}\right]\right\} \qquad (\omega = \mathrm{Re}\,A_2/\mathrm{Re}\,A_0)$$

Lellouch-Lüscher finite volume correction (skipped)

Renormalization matrix

$$A_I = F\frac{G_F}{2}V_{us}^* V_{ud}\sum_{i,j}\underbrace{[z_i(\mu)+\tau y_i(\mu)]}_{\text{Wilson coefs. pQCD}}\underbrace{Z_{ij}(\mu)}_{\text{LQCD (+pQCD)}}\underbrace{\langle(\pi\pi)_I|Q_j^{lat}|K\rangle}_{\text{LQCD}}$$

- G-parity 境界条件で on-shell 状態の扱いを簡単化
- ππ の励起状態が前よりうまく除去できた

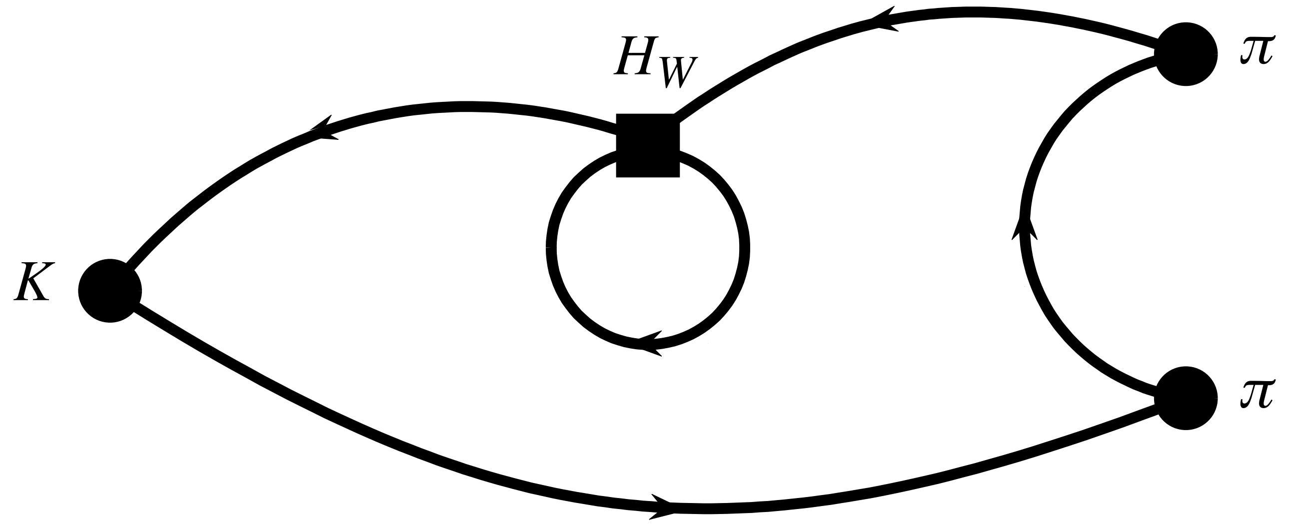
残りは繰り込みとウィルソン係数

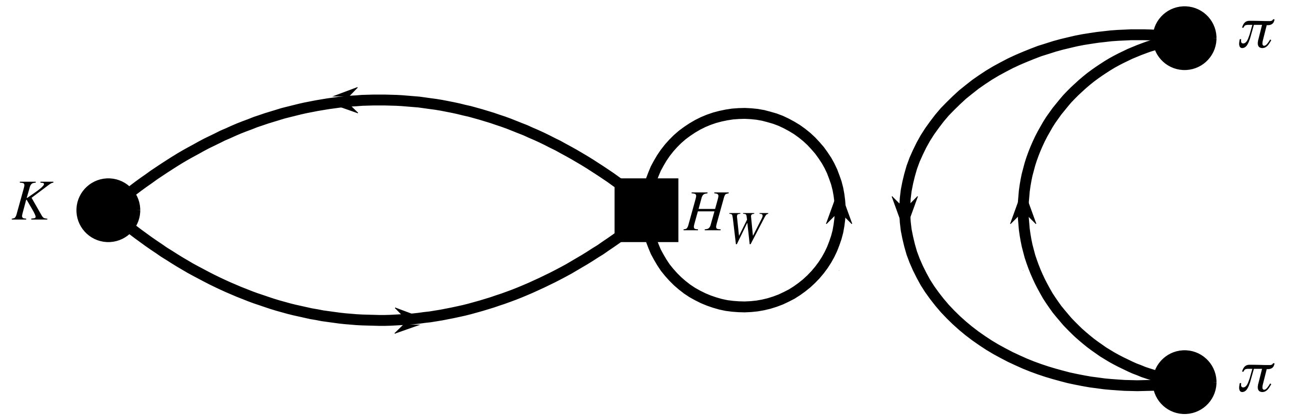
内容

- ☑ イントロ
- ☑ K → ππ 行列要素
- 非摂動繰り込みと結果
  - RI/SMOM スキームと window problem
  - ステップスケーリング
  - 最終結果
- 今後の課題

Power divergence

- Quadratic divergence (~ a^{-2}) appears in MEs from

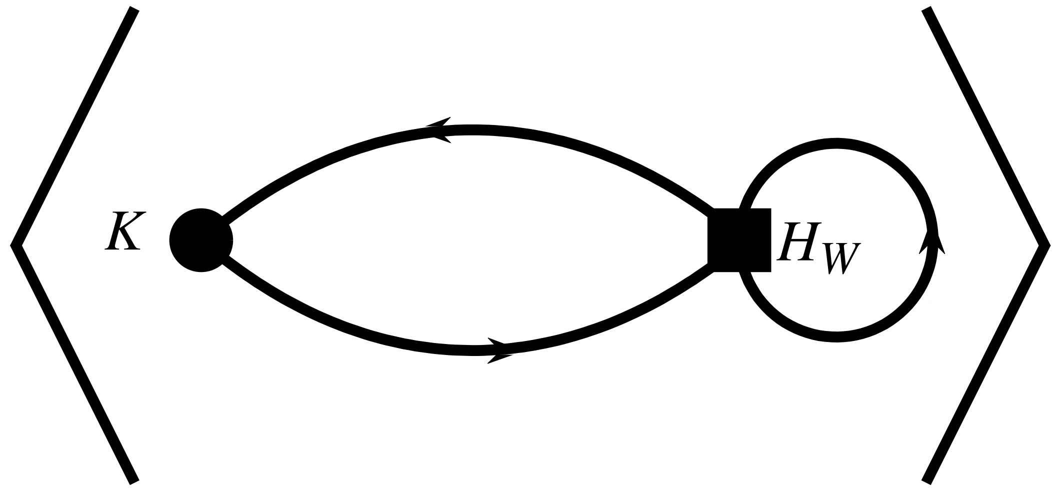




  - due to mixing 4-quark operators with $\mathrm{O}(m/a^2)\bar{s}\gamma_5 d$
  - Remove by subtraction

$$Q_i \to Q_i' = Q_i - \alpha_i \bar{s}\gamma_5 d \quad \text{(mixing w/ parity-even operator } \bar{s}d \text{ is invalid)}$$

$$\text{Condition: } \langle Q_i'(t_0)K(0)\rangle = 0 \text{ at specific } t_0$$



$= 0$

K → ππ MEs shown earlier are the results after the subtraction

Renormalization

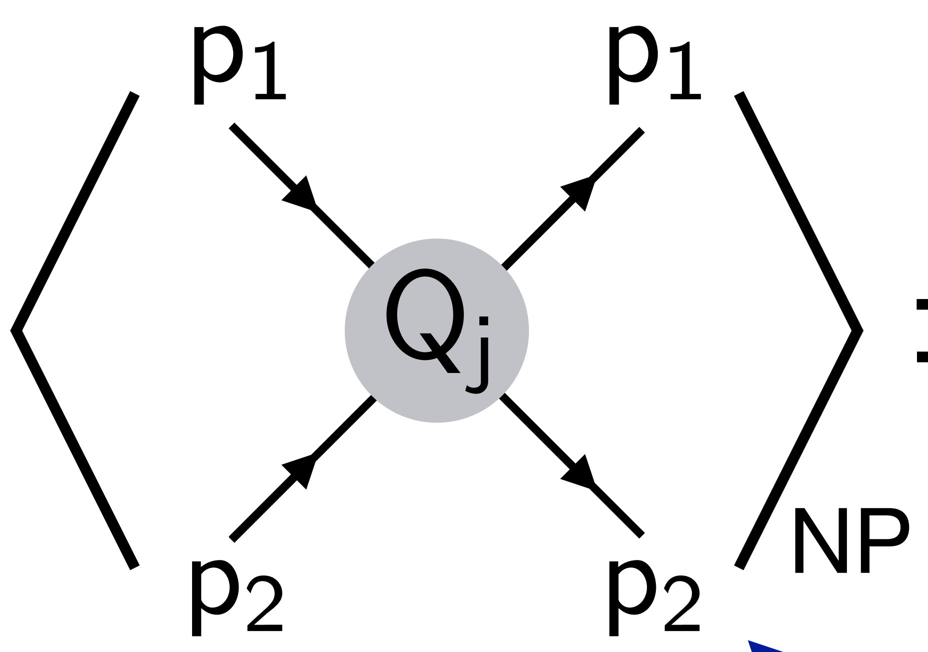
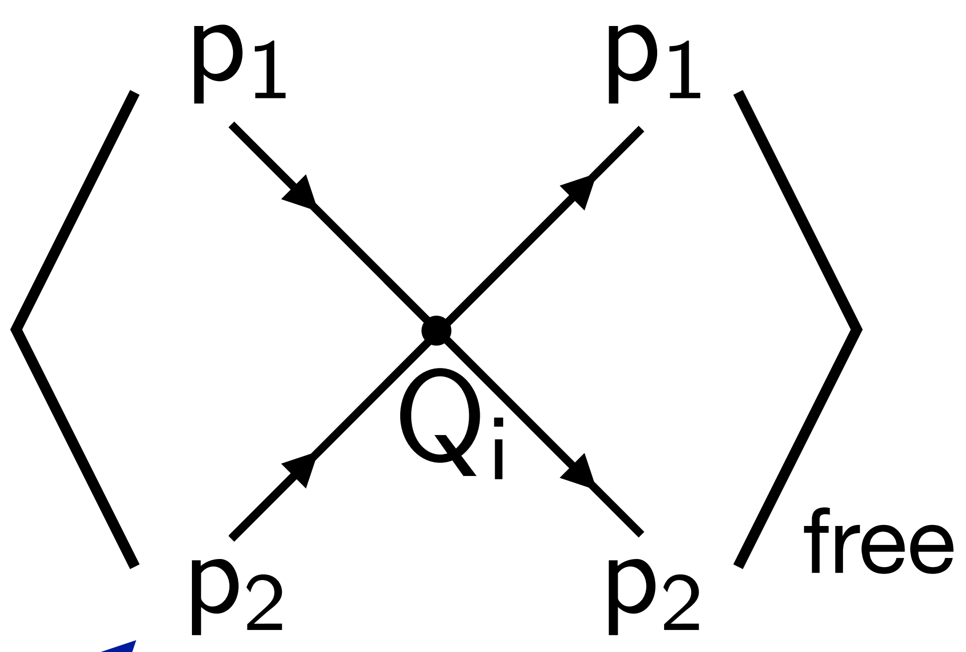
- ベキの発散を除いた後、log の発散 ln a² を乗法的に除去

- To construct appropriate Hamiltonian

$$w_i^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu) \xleftrightarrow[\text{matching}]{\text{perturbative}} Z_{ij}^{R}(\mu')Q_j^{\mathrm{lat}} \xleftarrow{\text{Renormalization}} Q_i^{\mathrm{lat}}$$

Wilson coefficients

- RI/SMOM スキーム (よく使われる)

$Z_{ij}^{\mathrm{RI/SMOM}}(\mu')$  $=$ 

Amputated vertex functions

$$\mu'^2 = p_1^2 = p_2^2 = (p_1 - p_2)^2$$

Renormalization

- ベキの発散を除いた後、log の発散 ln a² を乗法的に除去
- To construct appropriate Hamiltonian

$$w_i^{\overline{MS}}(\mu) \longleftrightarrow Z_{ij}^{R}(\mu')Q_j^{lat} \longleftarrow Q_i^{lat}$$

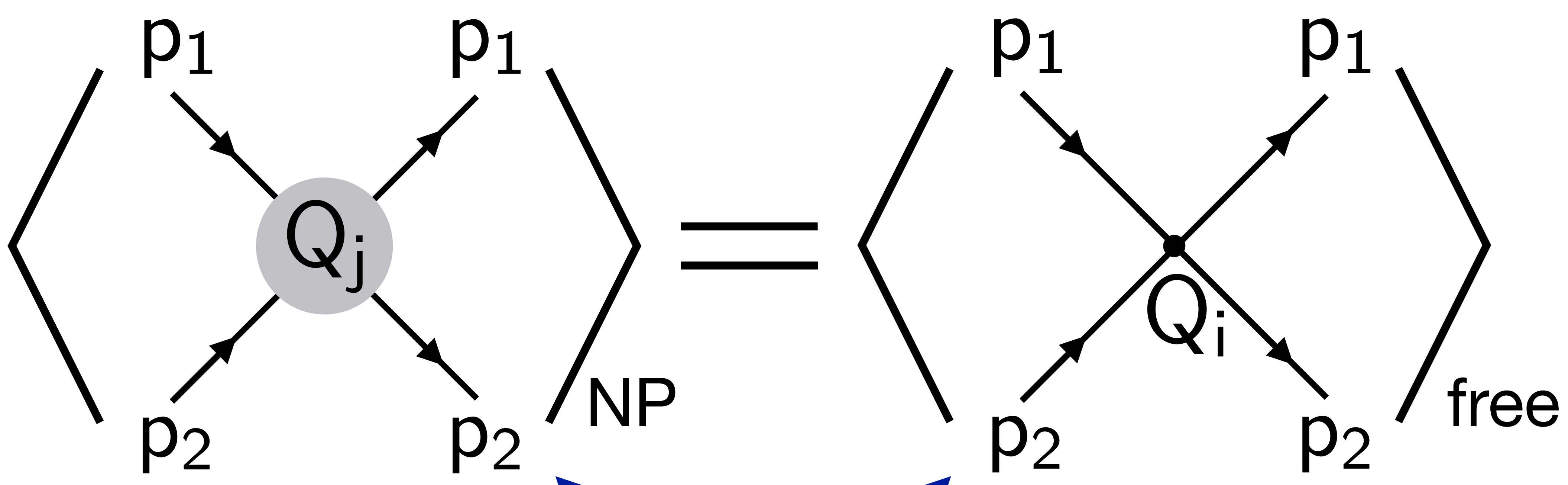
Wilson coefficients

perturbative matching

Renormalization

$\mu' \gg \Lambda_{QCD}$ required　　$\mu' \ll \pi/a$ required　　→ 2015年の大きな系統誤差

- RI/SMOM スキーム (よく使われる)

$Z_{ij}^{RI/SMOM}(\mu')$ 

$$\mu'^2 = p_1^2 = p_2^2 = (p_1 - p_2)^2$$

Amputated vertex functions

ステップスケーリング

- 非摂動的に繰り込みスケールを持ち上げ

fine lattice ensemble created $\left(\mu_{\rm high} \ll \pi/a_{\rm fine}\right)$

$$Z(\mu_{\rm high}, a_{\rm coarse}) = \left(\frac{Z(\mu_{\rm high}, a_{\rm fine})}{Z(\mu_{\rm low}, a_{\rm fine})}\right) \underbrace{Z(\mu_{\rm low}, a_{\rm coarse})}_{\text{used in 2015}}$$

$a_{\rm fine}^{-1} = 3.148(17)\ \mathrm{GeV}$　　$a_{\rm coarse}^{-1} = 1.378(7)\ \mathrm{GeV}$

$\mu_{\rm high} \simeq 4.0\ \mathrm{GeV}$　　$\mu_{\rm low} \simeq 1.5\ \mathrm{GeV}$

ε′ 最終結果

$$\mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)_{\mathrm{SM,2015}} = 1.38(5.15)_{\mathrm{stat}}(4.59)_{\mathrm{sys}} \times 10^{-4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)_{\mathrm{SM}} &= \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_0)}}{\sqrt{2}\epsilon}\left[\frac{\mathrm{Im}\,A_2}{\mathrm{Re}\,A_2} - \frac{\mathrm{Im}\,A_0}{\mathrm{Re}\,A_0}\right]\right\} \\ &= 21.7(2.6)_{\mathrm{stat}}(6.2)_{\mathrm{sys}}(5.0)_{\mathrm{EM/IB}} \times 10^{-4}\end{aligned}}$$

🤝

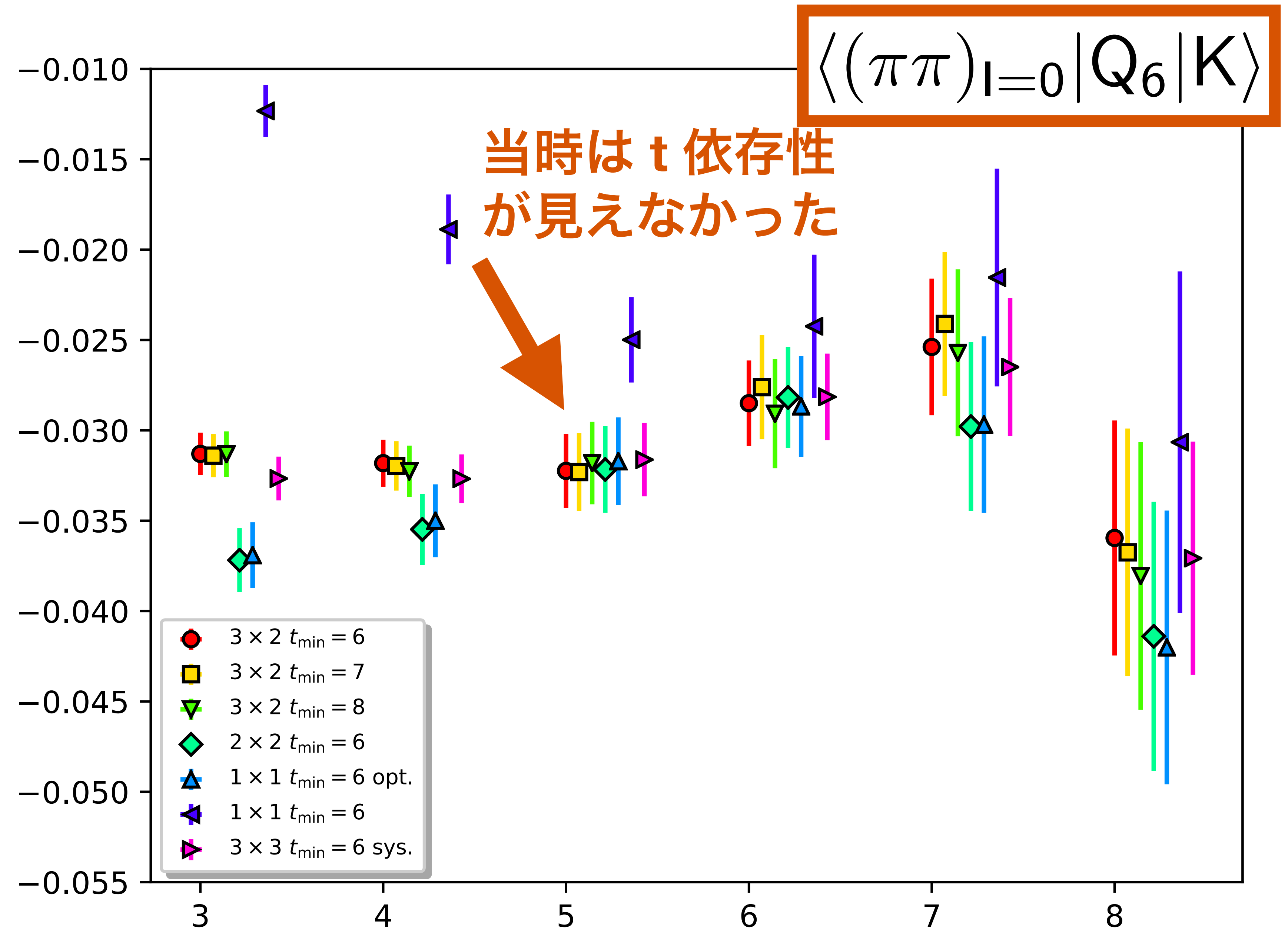
$$\mathrm{Re}(\epsilon'/\epsilon)_{\mathrm{exp}} = 16.6(2.3) \times 10^{-4}$$

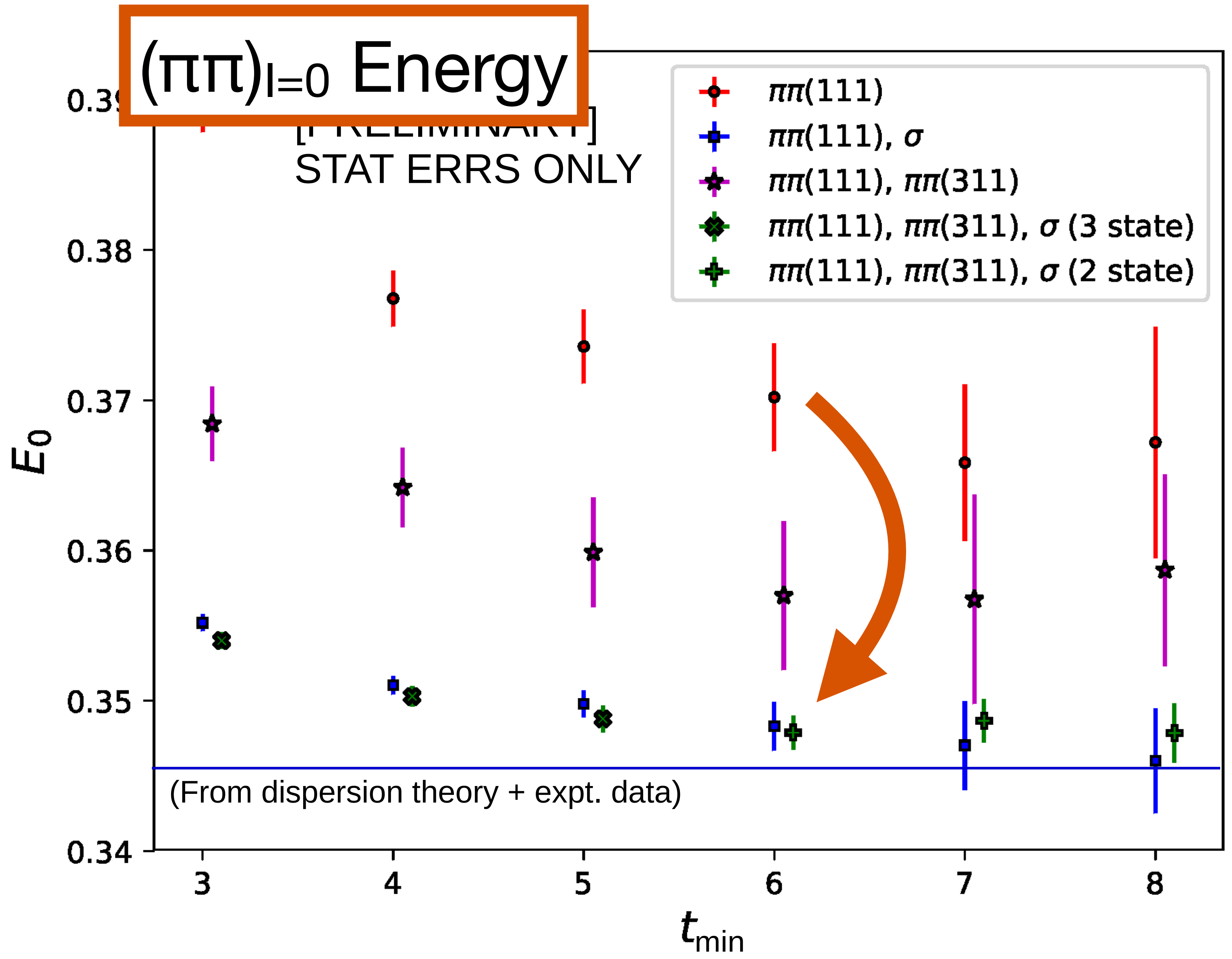
⭐ ΔI = 1/2 則も再現

$(\mathrm{Re}\,A_0/\mathrm{Re}\,A_2)_{\mathrm{SM}} = 19.9(2.3)(4.4)$ 🤝 $(\mathrm{Re}\,A_0/\mathrm{Re}\,A_2)_{\mathrm{exp}} = 22.45(6)$

結果が変わったことについて

- 2015 年は世界初で、とりあえず結果を出そうってノリだった
  - ππ 演算子 1 つだけで励起状態の寄与の概算した気になってたのがマズかった





- 今回は励起状態の寄与を徹底的に調べた

Breakdown of sys. errors on A_0

Description	2015 Error	2020 Error
Operator normalisation	15%	5%[1]
Wilson coefficients	12%	unchanged
Finite lattice spacing	12%	unchanged
Lellouch - Lüscher factor	11%	1.5%[2]
Residual FV corrections	7%	unchanged
Parametric errors	5%	6%[3]
Excited state contamination	5%	negligible[4]
Unphysical kinematics	3%	5%
Total	**27%**	**21%**

- [1] As a result of step scaling from $\mu = 1.53$ GeV $\to$ 4.00 GeV.
- [2] Better control of $\pi\pi$ system due to additional operators.
- [3] Largest uncertainty is due to $\tau \sim 5\%$.
- [4] Significantly underestimated in 2015.

Breakdown of sys. errors on A_0

Description	2015 Error	2020 Error
Operator normalisation	15%	5%[1]
Wilson coefficients	12%	unchanged
Finite lattice spacing	12%	unchanged
Lellouch - Lüscher factor	11%	1.5%[2]
Residual FV corrections	7%	unchanged
Parametric errors	5%	6%[3]
Excited state contamination	5%	negligible[4]
Unphysical kinematics	3%	5%
Total	**27%**	**21%**

NP treatment on going (next final topic)

finer lattice & continuum limit (not planned)

- [1] As a result of step scaling from $\mu = 1.53$ GeV $\rightarrow$ 4.00 GeV.
- [2] Better control of $\pi\pi$ system due to additional operators.
- [3] Largest uncertainty is due to $\tau \sim 5\%$.
- [4] Significantly underestimated in 2015.

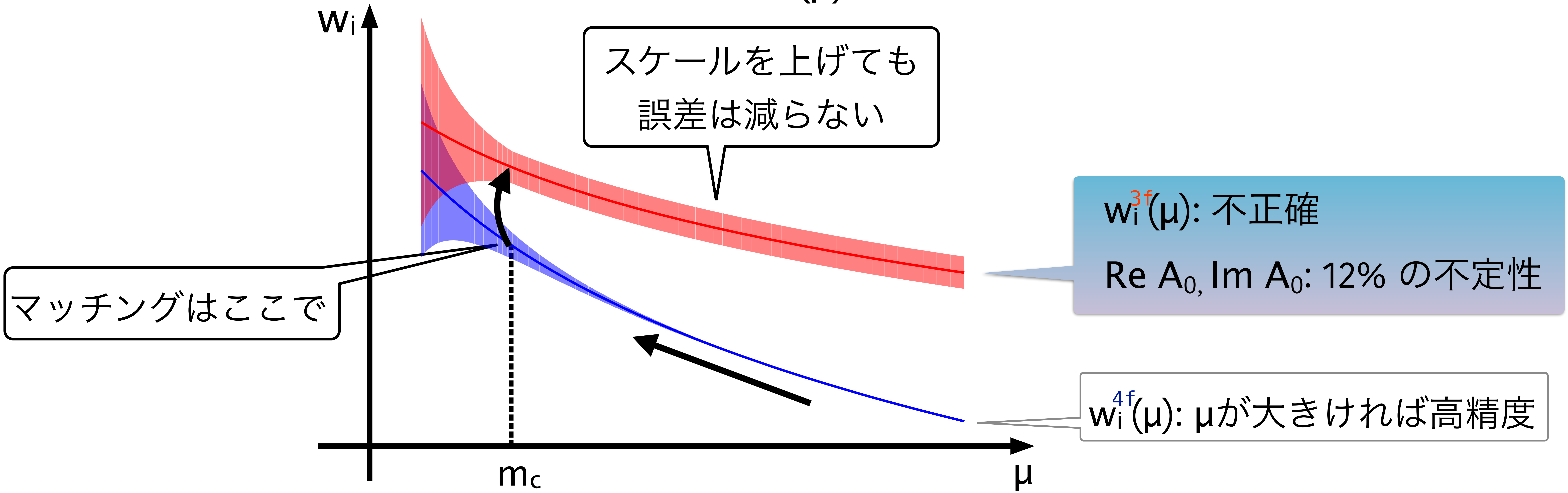
内容

- ☑ イントロ
- ☑ K → ππ 行列要素
- ☑ 非摂動繰り込みと結果
- 今後の課題
  - ウィルソン係数の非摂動マッチング b/w 3/4フレーバー理論
  - 周期的境界条件で再チャレンジ
  - アイソスピンの破れとQED補正

ウィルソン係数のマッチング

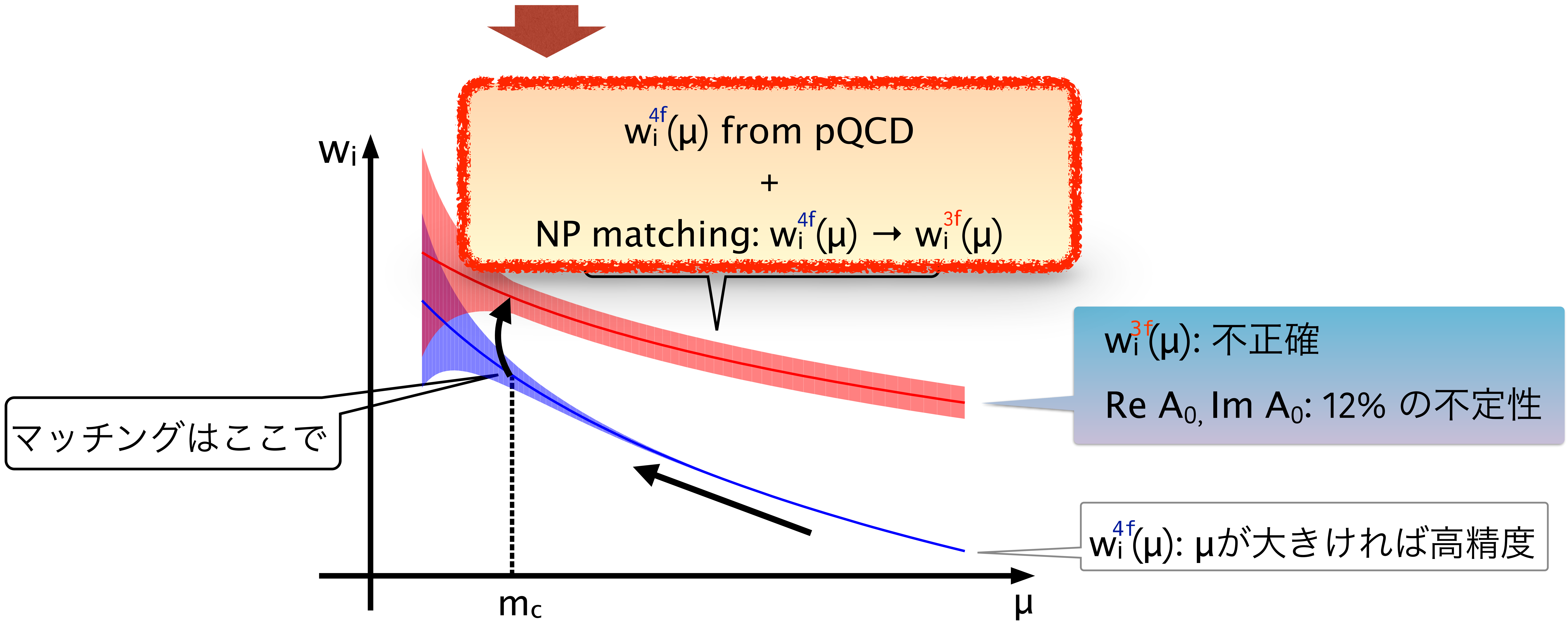
$$\langle f|H_W|i\rangle = \Sigma_i \underbrace{w_i^{3f}(\mu)}_{\text{pQCD}} \underbrace{\langle f|O_i^{3f}(\mu)|i\rangle}_{\text{LQCD}}$$

摂動QCDでの $w_i^{3f}(\mu)$ の計算方法



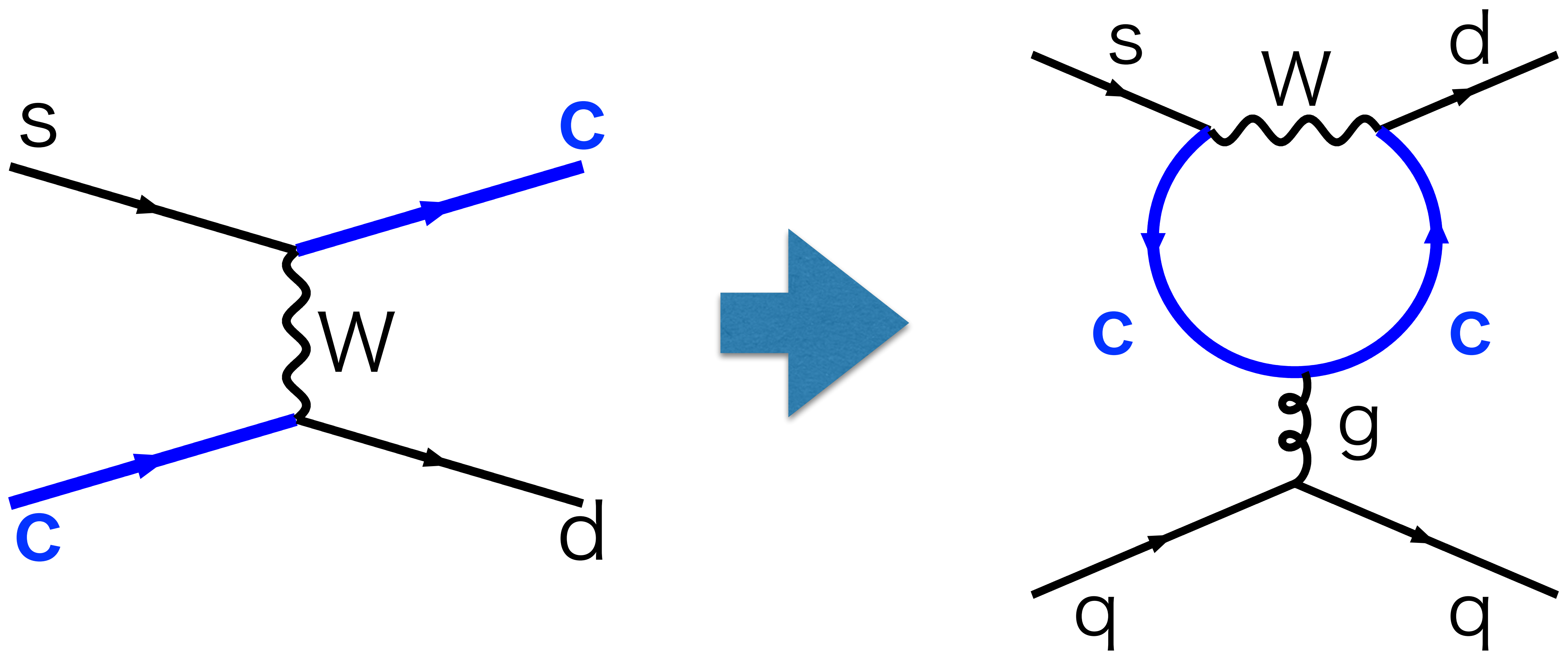
ウィルソン係数のマッチング

$$\langle f|H_W|i\rangle = \Sigma_i \underbrace{w_i^{3f}(\mu)}_{\cancel{\text{pQCD}}} \underbrace{\langle f|O_i^{3f}(\mu)|i\rangle}_{\text{LQCD}}$$



$W_i^{3f} \neq W_i^{4f}$?

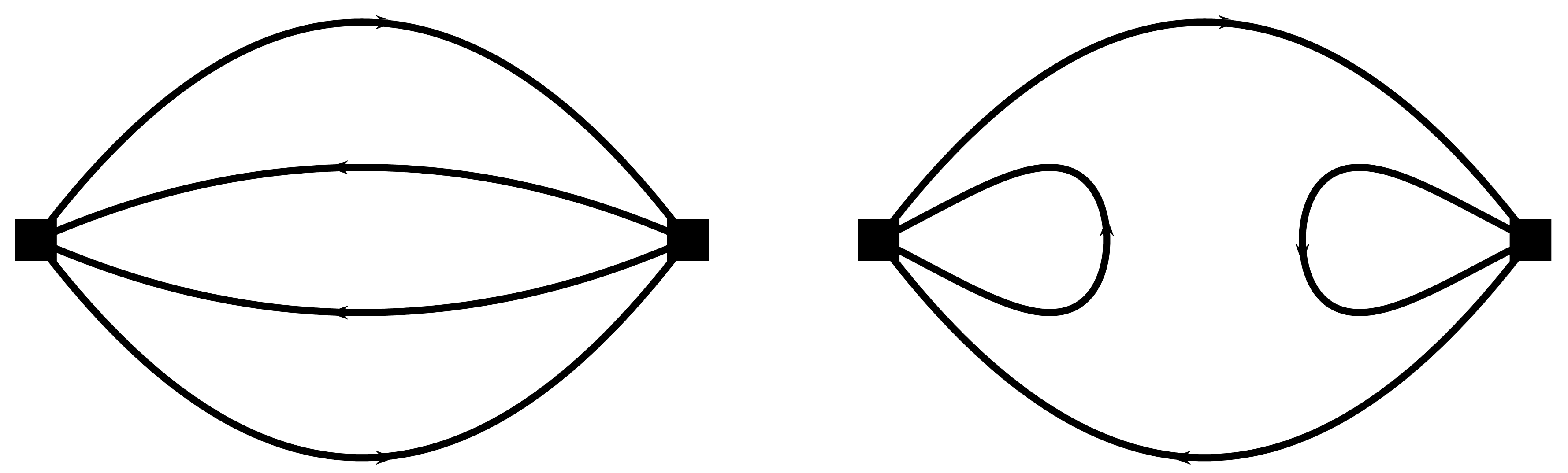
- シーチャーム → $O(\alpha_s^2)$, 今回は無視
- 今回の O_i^{4f} はチャームを含む
  - O_i^{3f} ではチャームがない代わりに ウィルソン係数にその寄与が入る
- なぜ格子計算では O_i^{3f} を使った？
  - 32^3 x 64, $a^{-1} \approx 1.38$ GeV
  - この粗い格子上にはチャームを乗せれない
  - 物理点のパイオン質量とチャームの同時実現には 80^3 x 160 くらいの格子が必要 （もうすぐ）



方法

- マッチング条件
  - マッチング行列： $O_i^{4f} \to \sum_j M_{ij} O_j^{3f}$, i.e. $\langle f|O_i^{4f}|i\rangle \to \sum_j M_{ij} \langle f|O_j^{3f}|i\rangle$
  - 有効ハミルトニアン：$H_W = \sum_{i,j} \underbrace{w_i^{4f} M_{ij}}_{= w_i^{3f}} O_j^{3f}$
  - 長距離相関関数にマッチング条件

$$\underbrace{\langle O_i^{4f}(x) O_j^{3f}(y)^\dagger \rangle}_{G_{ij}^{4\text{-}3}(x-y)} = \sum_k M_{ik} \underbrace{\langle O_k^{3f}(x) O_j^{3f}(y)^\dagger \rangle}_{G_{ij}^{3\text{-}3}(x-y)}$$



Operator basis for ΔS=1

Type	Q_i
current-current	$Q_1 = (\bar{s}_\alpha d_\alpha)_L (\bar{u}_\beta u_\beta)_L$ $Q_2 = (\bar{s}_\alpha d_\beta)_L (\bar{u}_\beta u_\alpha)_L$
QCD penguin	$Q_3 = (\bar{s}_\alpha d_\alpha)_L \sum_q^{3f} (\bar{q}_\beta q_\beta)_L$ $Q_4 = (\bar{s}_\alpha d_\beta)_L \sum_q^{3f} (\bar{q}_\beta q_\alpha)_L$ $Q_5 = (\bar{s}_\alpha d_\alpha)_L \sum_q^{3f} (\bar{q}_\beta q_\beta)_R$ $Q_6 = (\bar{s}_\alpha d_\beta)_L \sum_q^{3f} (\bar{q}_\beta q_\alpha)_R$
EW penguin	$Q_7 = \frac{3}{2} (\bar{s}_\alpha d_\alpha)_L \sum_q^{3f} e_q (\bar{q}_\beta q_\beta)_R$ $Q_8 = \frac{3}{2} (\bar{s}_\alpha d_\beta)_L \sum_q^{3f} e_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_R$ $Q_9 = \frac{3}{2} (\bar{s}_\alpha d_\alpha)_L \sum_q^{3f} e_q (\bar{q}_\beta q_\beta)_L$ $Q_{10} = \frac{3}{2} (\bar{s}_\alpha d_\beta)_L \sum_q^{3f} e_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_L$

- $\mathrm{M_{ij}} = \mathrm{G^{4\text{-}3}_{ik}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})(\mathrm{G^{3\text{-}3}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})^{-1})_{\mathrm{kj}}$
  - $\mathrm{G^{3\text{-}3}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})^{-1}$ exists when $\mathrm{O_i^{3f}}$ are independent
- ΔS = 1 operators (n_f = 3)
  - 3 relations among the 10 operators

    Fierz transformation + linear algebra
  - 7 independent ones

    (if theory is not dimensionally regularized)

Operator basis for ΔS=1

(n_L, n_R): Representation of $SU(3)_L$ x $SU(3)_R$

- Classification of 7 independent n_f = 3 operators
  - 1 in (27,1); <u>4 in (8,1)</u>; 2 in (8,8)
- 4 charm operators <u>$(\bar{s}_\alpha d_{\alpha/\beta})_L(\bar{c}_\beta c_{\beta/\alpha})_{L/R}$ all in (8,1)</u>
- Only operators in (8,1) matter
  - $O^{3f}_j = (Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4)$
  - $O^{4f}_i = (Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, P_1, P_2, P_3, P_4)$

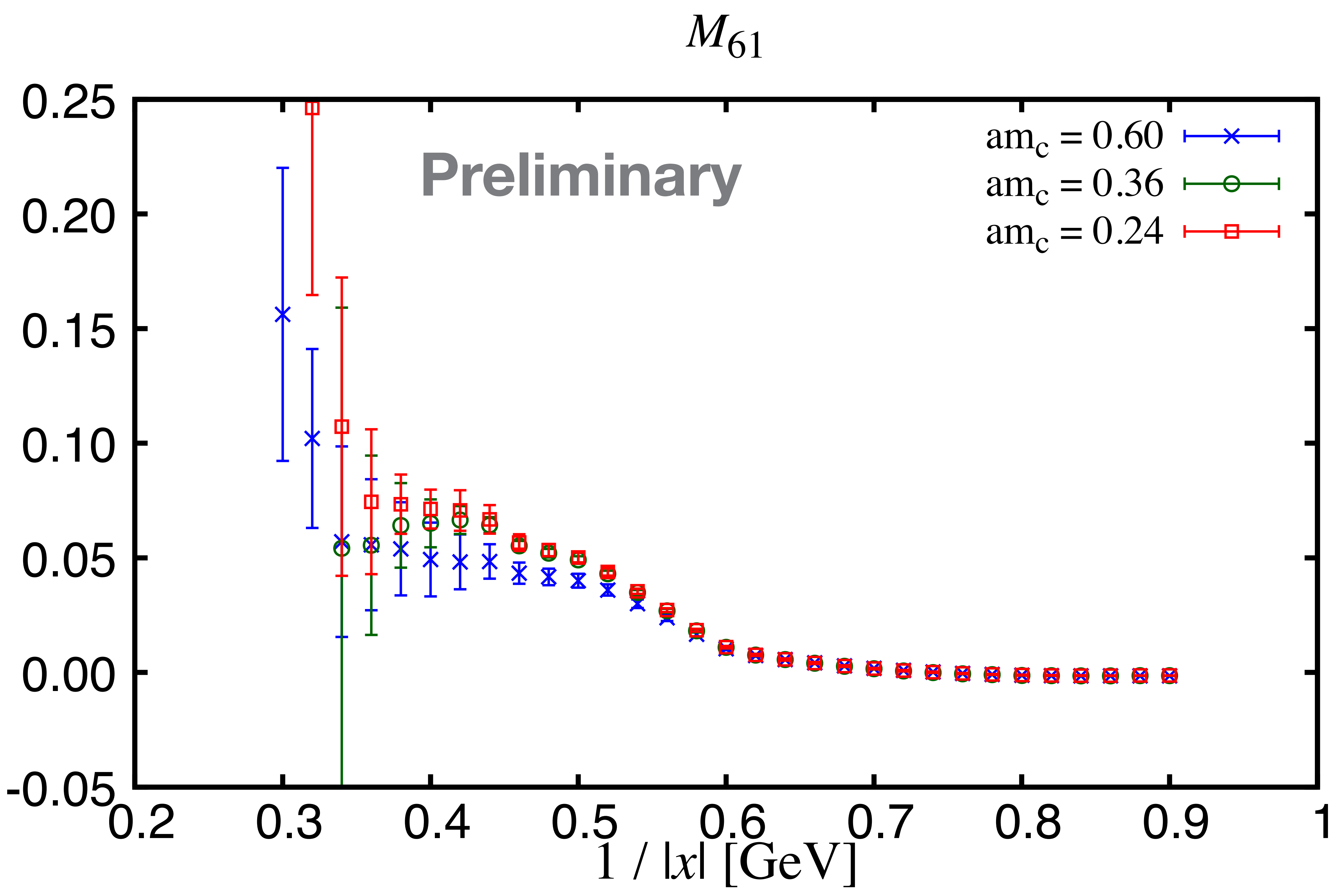
$$\Rightarrow M_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{4\mathrm{x}4} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} \end{pmatrix}$$

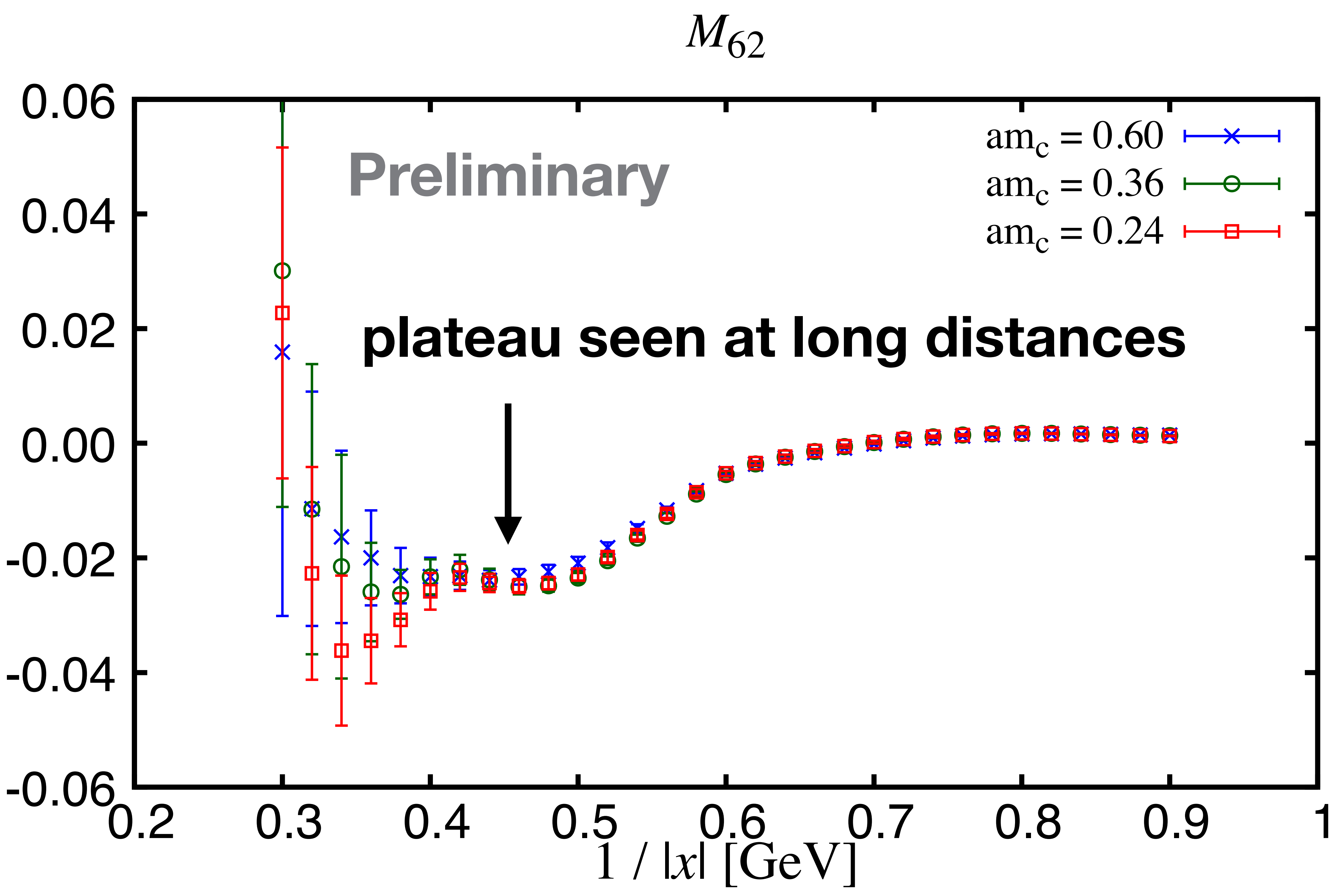
16 nontrivial elements

x

小さい格子でテスト計算

- 1.78 GeV の格子での結果





チャームがちゃんと乗る 3.15 GeV の格子で計算中

まとめ (ε′)

- G-parity 境界条件を用いた計算のアップデート
  - 統計数：216 confs → 741 confs
  - ππ の演算子を増やして励起状態の寄与を分離
  - ステップスケーリング → 摂動計算の不定性を削減
  - Re(ε'/ε) & ΔI = 1/2 則：実験と合った
- On-going works
  - NP matching of Wilson coefficients b/w 3/4-flavor theories
  - K → ππ calculation w/ periodic boundary conditions

◆ Strategy for EM correction & isospin breaking effects being considered