

ゲージ理論をめぐる — Yang-Mills 50 年 —

京都大学基礎物理学研究所 九後 汰一郎

E-mail: kugo@yukawa.kyoto-u.ac.jp

今年 2004 年は Yang-Mills の記念すべき論文が発表されてから 50 年になる。この機会にゲージ理論の発展の歴史を振り返り、ゲージ理論をめぐるの考察を行う。

今年 2004 年は Yang-Mills の記念すべき論文が発表されてから 50 年になる。この機会に「ゲージ理論の発展の歴史を振り返り、今後の理論の展開の契機になるような話をお願いできないでしょうか」との世話人からの依頼があり、私はこれまでゲージ理論の operator formalism の意義が余り正しく認識されて来なかったのではないかと思っていたので、そういうことを正当に評価し直した形でゲージ理論の発展の歴史を振り返るのもおもしろいかと思い、つい引き受けてしまった。

しかし、少し準備をしようかと考えるやいなや、歴史を振り返るといのは大変な作業であることに気づいた。そして、所長業の忙しさが特に研究会直前に集中したこともあって、結局「歴史を振り返る」作業をまともにやる時間が取れなかった。

実は、昨年の暮れの研究会「場の量子論の基礎的諸問題と応用」で、藤川和男さんがゲージ理論の発展の歴史に関してかなり広範な良いレビューをされている。周到なレビューとしてはそちらを参照して頂くことにして、ここでは、むしろ、その補遺として operator formalism に関する部分に相当かたよった話、あるいはかなり個人的な経験談をお話することをお許し願いたい。

1 ゲージ理論の夜明け—第 I 期の歴史—

藤川さんも言及されていたが、「The Dawning of Gauge Theory」という O’Raifeartaigh (オラファティ) の書いたモノグラフ [1] があり、文字通りゲージ理論の夜明けの時期、すなわち、ワイルの‘ゲージ’不変性の導入からヤンとミルズの論文の出現までの歴史を、重要な文献(ドイツ語の文献は英訳)を収録しながら、丁寧にたどっている。この本はおもしろいので是非一読をお勧めするが、ここでは少しだけ紹介しておこう。ここでは、ゲージ理論の展開に関わる歴史年表を、便宜上第 I 期, II 期, III 期と三期にわけて載せたが、O’Raifeartaigh が議論しているのはここでいう第 I 期の部分である。

昔、「電磁相互作用の本質が(局所)ゲージ不変性だということを一体誰が最初に気づいたのだろうか?」という疑問を持っていたが、林憲二さんから「それは Weyl だ」と教えて頂いたことがあった。しかしその詳細はよく知らなかったのだが、その詳細な経緯がこの O’Raifeartaigh の本に書いてある。実際 Weyl が如何にしてその正しいすばらしい認識に至るか、がこの本の前半のハイライトである。その認識の重要性を Pauli が認め、Pauli の書いた Handbuch を通じて Yang がそれを受け取り、Yang-Mills 理論の発見に至る、のである。

最初 Weyl は、第 I 期の表にあるよう、1918 年の論文で Einstein の重力理論の中に Maxwell の電磁気学を統一しようと、今日 Weyl 変換あるいは共形変換と呼ばれている計量テンソルの局所的

表 1: 第 I 期

| | | |
|---------|----------------------------|--|
| 1918 | Weyl | <i>Gravitation and Electricity</i> Scale transformation of metric: $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \lambda(x)g_{\mu\nu}(x)$ |
| 1921 | Kaluza | 5次元重力 $\rightarrow g_{5\mu} = 2\alpha A_\mu$ |
| 1926 | Klein | $g_{5\mu}/g_{55} = A_\mu$ |
| '22 '26 | Schrödinger | $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu$ |
| '26 | London | $\psi \rightarrow \exp[\frac{ie}{\hbar} \int A] \psi$ |
| 1929 | Weyl | <i>Electron and Gravitation</i> Zeit f. Physik ゲージ不変性 $e^{ie\lambda(x)}\psi(x)$ $\Rightarrow \begin{cases} \partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{cases}$ ゲージ場の存在 極小相互作用 運動項 |
| '35 | 湯川 | 強い相互作用の理論 |
| 1939 | Klein | SU(2) gauge theory in Conf. Report (Kazimierz, Poland) |
| '49 | 朝永-Schwinger-Feynman-Dyson | QED くりこみ理論 |
| | | '50 Gupta-Bleuler |
| 1953 | Pais | 局所 isospin |
| | Pauli | SU(2) gauge theory in two Letters to Pais |
| 1954 | Yang-Mills | Phys. Rev. 96 (1954) 191 |
| '55 | Shaw | SU(2) gauge theory in Ph.D. Thesis |
| '56 | 内山 | Phys. Rev. 101 (1956) 1597 |

スケール変換、

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \lambda(x)g_{\mu\nu}(x)$$

を考えた。これに対する不変性の要求が、

$$\phi_\mu(x) \rightarrow \phi_\mu(x) + \partial_\mu \ln \lambda(x)$$

と変換するベクトル場 ϕ_μ の存在を導き、電磁場のポテンシャルと同定できるとした。しかし、Bohm-Aharonov 効果がよく知られている今日からすれば明らかなように、電磁場をこのようなスケール変換のゲージ場と考えると、非自明な電磁場が存在するとき、同じ長さの物差し（または時計）を二つの異なる経路に沿って同一点にもってゆくと、互いに異なる長さ（異なる進み方）になってしまう、ということが起こって事実と反する、ということが直ちに Einstein により指摘された。

Weyl は当然反論したがそれは無理筋であった。1925 年に量子力学が登場するが、これをスケール変換ではなく、電子（荷電粒子）の波動関数の位相変換であると正しく指摘したのは、Schrödinger と London であった。Schrödinger は、1922 年前期量子論の段階で、例えば電子が正電荷のまわりのクーロン場で一周してきたときに生ずる Weyl の非可積分因子 $\exp[(e/\gamma) \oint \phi_\mu dx^\mu]$ は、もし、係数 γ が（Weyl が言うように実数ではなく）純虚数でかつ大きさがプランク定数、 $\gamma = \hbar/i$ 、であ

れば、Bohr-Sommerfeld の量子化条件を用いれば、 $e^{2\pi ni} = 1$ となり、‘長さ’の不一致の問題は生じないことを指摘していた。また、量子力学を波動力学として与えた一連の論文の一つ (1926 年) でも、電磁相互作用が極小相互作用の $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu$ の置き換えで記述できることを指摘している。(奇妙なことに 1922 年の自身の論文には全く言及していない。) London は 1927 年に出た論文で、1922 年の Schrödinger の論文を発展させ、それを出来たばかりの Schrödinger の量子力学の文脈で扱って Weyl の非可積分因子が位相因子 $\exp[i(e/\hbar) \int A_\mu dx^\mu]$ となるべきことを示した。

この紆余曲折を経て、Weyl は遂に 1929 年の *Zeit f. Physik* の論文で最終的に正しい「ゲージ原理」の認識に到達する。すなわち、今日我々が認識しているように、局所 U(1) 位相変換 $\psi(x) \rightarrow e^{ie\lambda(x)}\psi(x)$ のもとで理論が不変であることを要求すれば、ゲージ場の存在が導かれ、電荷を持つ粒子とは共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu$ により相互作用の形が決定され、また、電磁場の運動項も、ゲージ不変な場の強さ $F_{\mu\nu}$ の 2 乗と決まってしまう。

最初は物好きの数学者として Weyl を好ましく思っていなかった Pauli も、この時点で初めて、「単に知られた理論の不変性ではなく、場の存在と相互作用の形とを決定する原理としてのゲージ不変性」という Weyl の認識の重要性を認めるのである。

1933 年には Fermi の弱い相互作用の理論が、1935 年には、湯川の強い相互作用の理論が出る。

この流れの中で Klein は、重力と電磁気のみならず、湯川の強い相互作用も統一すべく、Kaluza と自身の 5 次元重力理論を拡張し、5 次元目の線要素は行列値をとるという奇妙な一般化を用いて、本質的に SU(2) ゲージ場に対する正しい Yang-Mills 作用を得た。ただ、Klein は SU(2) の局所不変性を要求しているわけではないので、SU(2) doublet に対する共変微分の形が異なったり、荷電ゲージ場成分にだけ手で質量項を付け加えたりしている。これは、1938 年 Poland の Kazimierz で開かれた会議で口頭発表され、翌年刊行の *Proceedings* に掲載されている。

第 2 次世界大戦後、QED のくりこみ理論の成功と新粒子の発見など強い相互作用の性格がわかって来る中で、Pais は 1953 年の Leiden で開かれた会議で、強い相互作用のアイソスピン不変性を局所化した場の理論を提案する。これに刺激を受けた Pauli は、その年 Pais に宛てた二通の手紙で、SU(2) の Yang-Mills 場の作用積分、doublet に対する共変微分など、完全に正しい式を与えている。しかしながら、doublet が縮退していることや、ゲージ場が質量を持たないことなどから、この仕事は決して論文として発表されなかった。そして、翌 1954 年についに、Yang-Mills の論文が現れるのである。

Yang-Mills の論文は、論文に書かれているように Pais や Pauli と同じく強い相互作用の理論を作るという動機で書かれている。Yang 自身が後に語っているところによると、Pauli の *Handbuch* から、ゲージ原理が電磁相互作用を決めることを学び、それに強く感銘をうけ、1949 年頃からアイソスピンのゲージ化を考えていたらしい。しかしゲージ共変な場の強さの表式になかなか到達できずに 1953 年に Mills と一緒にやっと見つけたとのことである。Yang や Mills 自身も Yang-Mills 場がゲージ不変性から質量項を持たないことに困っていたが、Princeton で Yang が初めて Yang-Mills 理論をセミナーで発表したとき、その話を始めるや否や「そのベクトル場の質量はどうなるのか?」と Pauli がしつこく質問してなかなか先へ行かしてくれず、Oppenheimer の取りなしでやっとセミナーを続けられたとのことである。全てを既に知っていた Pauli にとってはそういう論文を発表した Yang がおもしろくなかったことだろう。しかし、論理や形の美しいものは表面的な困難が

あっても発表しておくべきだという教訓である。特に若い人は失うものは何もないのだから。

O’Raifeartaighの本 [1] では、Yang-Mills の論文とほぼ同時に独立になされた Shaw および内山の仕事の内容や、その発表をめぐる興味ある経緯について書かれているので是非読みたい。

2 ゲージ理論の第 II 期の歴史

第 II 期は、Yang-Mills 理論がどのようにして、弱い相互作用と強い相互作用の理論に使われ標準理論に収束してゆくかの歴史である。この 1960-1980 年の時期の年表は表 2 に示した。

表 2: 第 II 期

| | | | |
|---------|--------------------------------------|--|---|
| 1960 | 南部 | <i>Gauge Invariance in Superconductivity</i> | |
| '60 | J.J. Sakurai | Massive Yang-Mills for ρ | |
| '61 | S. Glashow | Massive Yang-Mills for W, Z | |
| '61 | Goldstone | | |
| | | '63 Feynman ghost | |
| '64 '66 | Higgs | | '66 中西-Lautrup 不定計量正準理論 |
| '67 | Kibble | '67 DeWitt ghost | |
| | | '67 Faddeev-Popov | |
| 1967 | Weinberg-Salam | <i>Theory of Electron</i> | |
| '69 | Adler, Bell-Jackiw | | |
| 1971 | 't Hooft | Yang-Mills くりこみ | ← T.K. 修士入学 |
| 1972 | 小林-益川 | 6元クォーク模型による CP の破れの理論 | |
| 1973 | Gross-Wilczek | <i>Asymptotic Freedom</i> 発見 | |
| | Politzer | | '73 Nakanishi N-L での Higgs 機構 |
| 1974 | Ken Wilson | <i>Lattice Gauge Theory</i> | |
| 1974 | 't Hooft-Polyakov | <i>monopole</i> | |
| '75 | Nielsen-Olsen | <i>vortex</i> | |
| '75 | Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) | | |
| 1975 | Becchi-Rouet-Stora, Tyutin | <i>BRS 変換</i> | |
| | | | '78 Kugo-Ojima $Q_B \text{phys}\rangle = 0$ |
| '79 | Fujikawa | path-int measure \rightarrow anomaly | |

この時期の初期に最も重要なのは、やはり南部先生の「対称性の自発的破れ」の概念の素粒子論への導入であろう。1961年のNambu-Jona-Lasinioの論文が超有名だが、その前年の1960年にPhys.Rev.に掲載された「物性分野」の論文「Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity」[2]がすごい。超伝導の本質がU(1)ゲージ不変性の自発的な破れにあること、それに伴いmassless粒子が現れること、電磁場が結合するとそれが吸収され、電磁場がmassive

になること、それが Meissner 効果であること、などが、全て書かれている。すなわち、Goldstone の定理から、Higgs 現象まで全て書いてある！ それを読むと、どうしてその後の Goldstone の仕事 (61 年) や、Higgs の仕事 (64 年,66 年) を南部先生がされなかったのかわからなくなる位である。

1960 年には、J.J.Sakurai が、Yang-Mills 理論を強い相互作用の ρ メソンに適用している。質量項は手で入れている。 ρ メソンはその結合定数がユニバーサルなどゲージ場と見なせる性格を持っている。(これは、後に自発的に破れた hidden local symmetry というアイデアで復活する。[3]) 1961 年には、同じく質量項を手で入れる仕方で、Glashow が $SU(2) \times U(1)$ の Yang-Mills 理論を適用し、ノーベル賞の対象となった電弱相互作用の理論を作った。

61 年に Goldstone の定理が出て大域的対称性の破れには必ず massless 粒子が付随することが認識され、64 年、66 年に Higgs の仕事、翌 67 年には Kibble の仕事が出て、ゲージ対称性の場合、それが吸収されゲージ場が massive になることが明らかにされる。Kibble の $SU(2)$ モデルは、Weinberg-Salam 模型の Higgs セクターそのものであるが、Kibble 自身も「弱い相互作用の理論にそれを適用したいと思っていた」と後に語っている。結局、その最後のステップは、Weinberg がその年のうちに行うのであるが、Weinberg がやれ、Kibble にできなかった、その差は何に由来するのだろうか？ (Weinberg が Glashow の仕事を知っていたことか?)

Weinberg-Salam の理論は、まずはレプトンの理論であった。その理由は、強い相互作用がその当時全く混沌とし闇の中だったからである。ハドロン (クォーク) に対し電弱ゲージ理論をどう適用すべきかという問題には、まず、Glashow-Iliopoulos-Miani が、1970 年に (不思議なことに Glashow-Weinberg-Salam ゲージ理論に全く言及しないで)、charm クォークを導入して 2-doublets とする、FCNC を避ける非常に自然な GIM 機構を提唱し、その先鞭を切った。翌 71 年には、't Hooft の Yang-Mills 理論のくりこみ可能性の証明の論文が現れ、それで一躍 Weinberg-Salam 電弱理論が脚光を浴びることになる。実験的に中性カレントがなかなか見つからず、Weinberg-Salam 理論を中性カレントを持たないようにする亜流モデルがいろいろ提唱されるが結局 1973 年初め (1972 年末?) に中性カレントが見つかり、亜流モデルは全て消えた。

私は 1971 年に京大修士課程に入学した。益川さんは助手だったが、小林誠さんは、1972 年 4 月に新任助手として名古屋から来られた。益川-小林の二人は、その 1972 年の春ごろから、Weinberg-Salam 模型に CP 対称性の破れを入れることができるか？ という問題を議論していた。そして、夏休み明けにはすでに、小林-益川論文を書き上げていた。その仕事は、議論には加わらなかったのが詳細はわからなかったが、私の目の前でやられていた。私は、益川さんの指導を受けながら 't Hooft や Lee-Zinn-Justin の Yang-Mills 理論のくりこみ可能性の論文を読み、今日言うところの R_ξ ゲージを見つけ、それをういてくりこみ可能性の証明をもっと簡単明瞭にしようと頑張っていた。益川さんの私への指導の時間が、時々、小林さんと益川さんの議論と一部重なることがあり、間近に彼らの議論を目撃したわけである。

そうこうしているうちに、藤川さんがアメリカから一時帰国され基研でセミナーをもたれた。たまたま聞きに行ったら Fujikawa-Lee-Sanda の話で、自分の見つけた R_ξ ゲージと全く同じで、しかもすでにそれを使ってミュオンの異常磁気能率を計算し、プレプリントも書いて発表されている、ということを知ることになる。これは私には相当なショックだった。それで R_ξ ゲージだけでは発表できないから当初の計画通り、それをういてくりこみ可能性の証明を簡単化することを

考えていたが、そう単純な話ではなく、結局何も成果を出せず論文を書くことができなかった。その時に「欧米と同じ流行のことをやってもダメだ。日本は情報がすでに何ヶ月か遅れているから、絶対的に不利だ。」と考え、しばらくゲージ理論の話から手を引くことにし、修士論文は、Bethe-Salpeter 方程式でメソンの束縛状態を扱うというテーマにした。(こんなこと、研究会では話していない！)

私がしばらくゲージ理論から離れている間にも、世界では場の理論がどんどん進んでいた。1973年には、今年2004年のノーベル賞になった Gross-Wilczek, Politzer の Asymptotic Freedom の発見がある。この歴史的な重大性は、寂光院で一泊して行われた第1回関西若手セミナーで細谷暁夫さんが講義され、初めて知った。1974年には、't Hooft-Polyakov monopole や、Nielsen-Olsen の vortex、BPS 解などの古典解が発見され、位相幾何学的な観点や広がった対象の場の理論に於ける重要性、摂動論を超えた内容の豊穡さが認識されるようになった。

このようなゲージ理論をめぐる目覚ましい発展は、一応1974年くらいにはいったん終わる。この後は、閉じこめ機構の解明、というのが唯一残された大問題、という感じであった。しかし、ゲージ理論のくりこみ可能性やそれと表裏一体のユニタリー性の証明に関しては、't Hooft 以来、Lee-Zinn-Justin や't Hooft-Veltman などが現れるのだが、依然として明快でも完全でもなかった。そういう問題意識のもとで1975年にBRSの論文が現れ、BRS対称性が発見される。これでもう一度ゲージ理論のユニタリティやくりこみ可能性からすべてが考え直される。今日BRS-formalism というと、演算子形式 (operator formalism) を意味しているようだが、BRS自身は、従来通り経路積分に則った立場であり、演算子形式を与える、という問題意識はない。歴史的な興味であるが、BRSはその論文の中で、「Yang-Mills 理論は、Lagrangian がエルミートでないのに、物理的S行列がユニタリーになっている、非常に特異な例を与えている」と言っている。もちろんこれは、彼らがFaddeev-Popov (FP) ghost に対する従来の間違ったエルミート属性の付与、すなわち、FP anti-ghost 場がFP ghost 場のエルミート共役であるという考え方、に囚われていたせいにすぎない。

ここまででは全て経路積分という見通しのよい方法に則って発展してきた。実際、't Hooft がユニタリティを証明できたのは、表2の真ん中の欄にあるように、1963年のFeynmanの1-loopレベルでのghostの導入があり、'67年にDeWittが任意ループのルールに一般化し、同年それをFaddeevとPopovが経路積分で一挙に出して見せた、という歴史があったからである。VeltmanはFaddeev-Popovの論文のレフェリーをしてその論文を知り、't HooftはVeltmanを通じて初めから経路積分を使うのである。

しかし、我々が素粒子物理を語るときは必ず粒子描像や状態を考えている訳で、経路積分で全ての物事が済むわけではない。例えば、上でユニタリティの証明と書いたが、実はゲージ固定条件に物理的S行列が依存しないことを証明しているだけで、直接ユニタリティの証明を与えているわけではない。直接に証明するには、やはり演算子形式が強力であり、演算子なら、S行列がユニタリーというのは、Hamiltonian がエルミート行列なら、見ただけで明らかである。Feynman則の総体からユニタリーというのは如何にも見通しが悪いのである。

何はともあれ、ゲージ理論の演算子形式を与える必要がある。演算子形式の歴史の流れは、表1、表2の右の欄に書いたが、表1の右の欄にあるように、QEDのGupta-Bleulerのformalismは

1950 年になされている。これは Feynman ゲージだけだが、一般の共変ゲージで QED の不定計量の理論を完成させたのは、表 2 にあるように 1966 年の中西-Lautrup の仕事である。これが完全な演算子形式を与えており、物理的状態は、‘物理的’ゼロノルム状態だけの違いを無視する‘状態のクラス(類)’と考えるべきこと、すなわち、ゼロノルム状態の空間で割った商空間上で、ユニタリティが成り立つこと、などが初めて指摘されている。この構造は、結局 Yang-Mills の場合もそのまま引き継がれる。1978 年に Kugo-Ojima が現れ [4] (仕事は’77 年にやったもの) ここでは、物理的状態は $Q_B|\text{phys}\rangle = 0$ で選ばれる。すると必然、 $Q_B|*\rangle$ という形の状態 (BRS exact states) は物理的なゼロノルム状態になり、そういう状態を無視するクラスを元とする商空間、今風の言葉で BRS コホモロジー、で考えるべきだということになる。この仕事が出た頃は、日本の方々は多く、この $Q_B|\text{phys}\rangle = 0$ の補助条件を Kugo-Ojima 条件と言ってくれていたが、最近は誰も言ってくれなくなり残念に思っている。この補助条件を書くときにはちゃんと引用 [4, 5] していただけるとありがたい。

話の後の討論の時に、1974 年の K. Wilson の格子ゲージ理論は触れておかないといけないと指摘された。これは確かに、今日の QCD の実際の計算法としての発展などを考えると、大変重要な仕事である。しかし、Wilson 自身のその定式化の第一の動機が quark confinement の解明だった、という点も興味深い。

70 年代の終わりには、1979 年に藤川さんの経路積分の測度からアノマリーを導く仕事が見れる。アノマリーはゲージ理論の無矛盾性にとって重要な問題であるが、藤川さんの仕事は、アノマリーの非摂動的な導出方法を与えるのみならず、Atiyah-Singer の指数定理との関係など、アノマリーの位相幾何学的な側面を明白にする点でも極めて興味あるものであった。

3 ゲージ理論の第 III 期

ここは、もうかなり新しいので詳しくは述べない。表 3 に与えたように、ストリング理論の発展と、それとの対応で進んできた時代である。

表 3: 第 III 期

| | | |
|------|----------------|---|
| 1984 | Green-Schwarz | Anomaly cancellation in $d = 10$ SYM with $SO(32)$, $E_8 \times E_8$ |
| 1995 | Seiberg-Witten | exact sol. for $\mathcal{N} = 2$ SYM |
| | Seiberg | $\mathcal{N} = 1$ Seiberg’s ele.-mag. duality |
| | Polchinski | D-brane |
| | | S, T, U duality |
| | | M-theory |
| 1997 | Maldacena | AdS/CFT 対応 |

1984 年に Green-Schwarz の、 $d = 10$ の super Yang-Mills (SYM) 理論ではゲージ群が $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ の場合だけアノマリー相殺が起こる、という仕事があり、その後のストリング理論の爆

発的流行につながる。今年はこの仕事の 20 周年記念の年でもある。私の話はストリングのレビューではないのでストリングの話題には入らないが、共変なストリングの場の理論は莫大なゲージ対称性をもつゲージ理論である、という認識はおもしろい。ゲージ理論に強く関係する発展としては、1995 年の Seiberg-Witten の $\mathcal{N} = 2$ SYM の低エネルギーでの厳密解が大きい。また、この年に、Seiberg の $\mathcal{N} = 1$ SYM のいわゆる Seiberg duality の仕事、さらに、Polchinski の D-brane の仕事、も出ている。その後、S-, T-, U-duality だとか、M-QCD だとかというものがだーっと出てくる。1997 年には、Maldacena の AdS/CFT 対応の仕事が出、supergravity や superstring 理論を用いてゲージ理論のダイナミクスを調べるという方法が与えられる。

1995 年に、実は隣の基研新館が落成したが、その記念に大きめの YKIS を素粒子の方で欲しいと当時の長岡所長に頼まれ、私が組織委員長として国際会議場で開催した。その時に、Seiberg も Polchinski も来たが、Seiberg が Seiberg duality に関する Power of Holomorphy という話をし、その中で何度も言った言葉が、

Gauge symmetry is not a symmetry

である。これは、相当に意味深長な文章であり、ここからはこれをめぐって話をしたい。

4 ゲージ対称性とは何か？

我々は、上で見たように、Weyl のポジティブな立場、すなわち、ゲージ対称性があれば、それに対応するゲージ場が存在し、しかもその運動項から、物質場との結合の仕方まで全部決まってしまう、という素朴な考えを持っている。しかしながら、上の Seiberg の言葉は、global 対称性は対称性だが、ゲージ対称性なんて対称性ではないんだ、といているわけで、そういう素朴な立場に対してかなり挑発的なことを言っているわけだ。あとで詳しく議論するように、あるゲージ対称性と、別のゲージ対称性を持つ理論が dual というか等価である、というので、「どういうゲージ対称性がある」ということに客観的な意味がない、と主張しているのである。

ここで、まず、ゲージ対称性がどのくらい客観的な意味があるのか、どのくらい powerful なのかを反省してみよう。

| Symmetry | Global | Local |
|---------------|--|-------|
| Spt. Unbroken | Wigner phase <ul style="list-style-type: none"> · Multiplet structure in the Spectrum · Symmetry Relations between Amplitudes | |
| Spt. Broken | Nambu-Goldstone phase <ul style="list-style-type: none"> · \exists Nambu-Goldstone bosons · Low energy theorems | |

対照のためまず global symmetry の場合を考えると、自発的に破れていない Wigner phase では、粒子のスペクトルは、全て対称性の群の線形表現の多重項となり、その散乱振幅なども、対称性から関係式が Wigner-Eckert 定理より導かれる。さらに、自発的に破れた Nambu-Goldstone phase

でも、先ず Nambu-Goldstone boson の存在が示せ、さらに Nambu-Goldstone boson の関与する様々な振幅に対して低エネルギー定理が存在する。

この表の local symmetry の場合を埋めてみると、

| Symmetry | Local | | |
|---------------|--|---------------|-----------------------------------|
| Spt. Unbroken | Massless vector 有り | Coulomb 相 | Colored states (Wigner 相と同じ) |
| | Massless vector 無し | Confinement 相 | Color singlets のみ |
| Spt. Broken | Massless vector 無し (if g : 小 \Rightarrow \exists Massive gauge bosons) | Higgs 相 | No charge operators |

となる。ここで言う symmetry とは、共変ゲージの場合に残る、gauge 変換のパラメータを x -independent にして得られる global 対称性 (color symmetry) のことであり、それが自発的に破れる場合と破れない場合である。

自発的に破れない場合は、さらに、Massless vector (gauge boson) 粒子が現れる場合 (Coulomb 相) と、現れない場合 (Confinement 相) に分かれる。前者の Coulomb 相は、U(1) の場合はよく知られた相であるが、非可換ゲージ対称性の場合にも存在するらしい。この Coulomb 相では、colored states がその群の線形表現として現れ、Global 対称性の場合の Wigner 相と同じことが言える。

しかし、Massless vector 粒子が現れない Confinement 相では、そもそも現れるスペクトルは全て color singlets のみであり、color 対称性の存在はあらわには何も言わない。

自発的に破れている場合は、いわゆる Higgs 相である。この場合は、Massless vector 粒子は存在せず、color charges も存在しない。ゲージ結合定数 g が小さい場合は、Higgs が初めにやったように、massive gauge boson が存在する。しかし、結合定数が大きくなると一般にはそのような粒子の存在は言えない。

このように見ると、対称性の存在から余り何事も言えない、という点で、Confinement 相と Higgs 相の二つは大変よく似ている。

実際、昔 1970 年代に Fradkin-Shenker の論文 [6] があり、この Confinement 相と Higgs 相を区別するゲージ不変な特徴付けは存在しない、そしてその間に phase boundary は存在せず実は連続的につながっている、ということが示された。私は余りこの論文をよく理解していない。しかし、ゲージ不変な特徴付けは存在しないとしても、上の表に書いたように、ゲージを固定した共変ゲージで話をすれば、この二つの相は、color symmetry が自発的に破れていない場合 (Confinement 相) と自発的に破れた場合 (Higgs 相) とに、それぞれ特徴づけることができる。

Massless vector 粒子の存在・非存在に関しては、Higgs の逆定理が成り立つがそれについては私の教科書を参照してもらって、ここでは省略する。

5 ‘自発的に破れたゲージ対称性’に意味があるか？

ここで私がいつも気になっている問題

Is Spontaneously Broken Gauge Symmetry Meaningful?

について考えよう。この質問の意味は、「自発的に破れたゲージ対称性がある理論」というのは、全く対称性を持たない理論と何か違いがあるのか？ということである。これに対する私の現在の答えは、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Weak Coupling } g \ll 1 \\ \text{理論の cutoff scale が大 } \Lambda \gg \mu \end{array} \right. \quad \text{の時(のみ?)は、意味あり}$$

理由は以下の通り。まず、massive gauge bosons が存在しないと何も言えない。だから、存在するとする。(ゲージ結合定数が小さいと、確かに $M \sim gv$ の程度の質量の gauge boson の存在が摂動的に言える。)また、massive bosons があっても、ゲージ粒子だと言うためには、結合定数のユニバーサリティが必要である。しかし、例えば、

$$\text{Pauli 項: } \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} \quad (1)$$

などはこれだけでゲージ不変だから物質場 ψ 毎に勝手な重みで自由に加えることができる。こういう項が有効作用に存在すれば、 A_μ が massive 粒子の場合には on-shell coupling constant をユニバーサルな値からずらしてしまう。もし、 A_μ が massless ならば、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は、この粒子の 4 元運動量がゼロ、 $p^\mu \rightarrow 0$ 、の極限で消えるから、on-shell coupling (massless の場合 $p^\mu = 0$ が on-shell であることに注意) の赤外極限の値を全くずらさない。その他の項も皆同じで、これが massless gauge boson の結合定数が普遍的である理由である。ところが、gauge 粒子が massive になると、 $p^\mu = 0$ は on-shell ではなく、on-shell では赤外極限でも第 0 成分が $p^0 = M(\text{質量}) \neq 0$ になり、Pauli 項も on-shell coupling に効き、したがってゲージ結合定数が物質毎に(たとえ同じ表現・電荷でも)異なることになる。しかし、weak coupling なら、ゲージ粒子の質量 M は $\sim gv$ の程度であり、cutoff Λ に比べてそれが十分に小さいと、上の Pauli 項は、正準次元が 5 だから $1/\Lambda$ が前に掛かり、赤外の on-shell coupling をほとんどずらす寄与を与えない。この議論が妥当なためには、演算子の異常次元が小さくしなければならず、そのためにも coupling が弱いことが必要である。このように、Weak Coupling $g \ll 1$ で、理論の cutoff scale が大 $\Lambda \gg \mu$ 、なら、spontaneously broken gauge symmetry に意味がある。electro-weak gauge theory はこの範疇のモデルである。

「くりこみ可能性」ということが 70 年代には理論を構成する場合の指導原理のように言われたことがあったが、これもやはりゲージ結合定数が小さく、かつ理論の適用限界としての cutoff scale Λ が議論しているスケールより十分大きい、という場合の「帰結」であり、指導原理ではない、ということが、この議論から言えていることに注意しておきたい。cutoff が例えば GUT scale のような十分大きなスケールで、かつ $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のどの結合定数も小さかったので、たまたま、正準次元が 4 を超える「くりこみ不可能」な項はあっても全然効かなかったのである。

上の議論で massless gauge boson の赤外 on-shell coupling (i.e., at $p^\mu = 0$) がユニバーサルであることを示したが、逆に、 $p^\mu = 0$ で non-zero coupling を持つ massless 粒子については、次のことが言える。(Weinberg[7], Kugo-Uehara[8])

$p^\mu = 0$ で non-zero coupling を持つ spin $j \geq 1$ massless 粒子の存在
 \Rightarrow
 tensorial rank が $j - 1$ の保存電荷が存在し、
 その spin $j \geq 1$ massless 粒子の couple する源電荷になっている。

すなわち、これから、spin 1 の massless vector boson A_μ は scalar 保存電荷 Q に couple し、spin 3/2 の massless vector-spinor fermion $\psi_{\mu\alpha}$ は spinor 保存電荷 Q_α に couple し、spin 2 の massless tensor boson $h_{\mu\nu}$ は vector 保存電荷 Q_ν に couple する。ところが、Coleman-Mandula-Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理と結びつけば、自発的に破れていない S-行列の対称性としては、vector 電荷というのは並進のエネルギー運動量 P_μ しか存在しないから、spin 2 の massless tensor boson $h_{\mu\nu}$ というのは、ユニークに重力場しかない。spinor 電荷は supersymmetry の電荷しかないので、spin 3/2 の massless vector-spinor fermion $\psi_{\mu\alpha}$ というのは、超重力の(たかだか 8ヶの) Rarita-Schwinger 場しか存在しない。

6 ‘閉じこめ相にあるゲージ対称性’に意味があるか？

上で、対称性の自発的に破れた Higgs 相に似ていると言った閉じこめ相にあるゲージ対称性に関しても、同じ質問をしてみよう。

Is Confined Gauge Symmetry Meaningful?

この質問の意味も、「閉じこめ相のゲージ理論」というのが、全く対称性を持たない理論と何か違いがあるのか？ということである。

これに対する明確な答えは、私は持っていない。

ただ、我々の標準理論には、閉じこめ相にあるゲージ理論として $SU(3)_{\text{color}}$ の量子色力学が入っており、そのカラーの個数 $N_c = 3$ については、1) Drell ratio R 、2) $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 、3) Baryon が qqq の 3 体状態、などの厳然たる実験事実があり、それが揺らぐことはあり得ない。

しかるに一方、Seiberg の duality というのがあって、 $N_c + \tilde{N}_c = N_f$ を満たす N_c と \tilde{N}_c に対し、

$SU(N_c)$ ゲージ理論 with N_f flavors \leftrightarrow
 $SU(\tilde{N}_c)$ ゲージ理論 with N_f flavors

の間で duality が成り立ち、等価である、と主張している。そうだとすると、 $SU(3)$ カラーゲージ理論の 3 というのが客観的な意味がないのだろうか？

多分この duality は、一方で coupling が大きいと、他方の coupling が小さい場合の weak-strong duality であるので、「gauge coupling が小さく見えるゲージ理論の方に意味がある」、というのが一つの可能な答えであろう、と思われる。

しかしながら、例えば、上の例で、フレーバー $N_f = 3$ の完全に massless の quarks の $SU(3)$ カラーゲージ理論を考えたとして。そうすると、この理論の gauge coupling が小さいとか大きいとかいうことには意味がない。なぜなら、この理論にはスケールが全く存在せず、唯一のスケールとして考えられるのは gauge coupling がオーダー 1 になる、いわゆる Λ_{QCD} しかないからである。

研究会では、それで満足な解答はない、という結論で私の話は終わったが、この点について後の討論の時に多くの質問とコメントを頂いた。それを総合すると、結局妥当な解答は以下のようなものになると思う。

坂井さんが指摘されたように、スケールのない模型でも、結合定数が大きい、小さいということとは、エネルギー領域でわけて考えれば意味がある。杉本氏が指摘したように、Seiberg duality は、二つの理論のそれぞれの低エネルギー極限での振る舞いの間の等価性を主張するものである。そして多くの場合、それらの理論は asymptotically free であり、かつ infrared fixed point を持つ。したがって、両理論の等価性は、それぞれの infrared fixed point 上の conformal 不変な理論の間での等価性である。高エネルギーへ行ったときには両理論はやはり異なるものになる。QCD の $N_c = 3$ は、やはり「高エネルギー領域」で結合定数がそんなに大きくなく摂動論的な描像が描けるところで確立した事実であると思われる。したがって、ハドロンを記述する数百 MeV(せいぜい 1GeV) までの全くの低エネルギー領域では、 $SU(3)$ カラーでない別のゲージ理論での記述も可能なのかも知れない。

そして私の全体の結論としては、ゲージ理論というのは、結局、弱い結合定数のところで考えれば良い、結合定数が大きい領域では、そういうゲージ対称性がある、という叙述自身が必ずしも客観性をもたない、ということである。だから例えば、大統一理論を探そうという場合にも、ゲージ結合定数が小さい場合だけを考えれば良い、ということである。

しかし、一方、中西先生も仰っていた様に、ゲージ結合定数が大きかろうが小さかろうが、あるゲージ理論で自然が記述できるということであれば、その理論で良いということであって、エネルギー領域で理論がころころ変わるわけではない。だから、1GeV 以上で $SU(3)$ QCD が自然を記述していることが認識されれば、それが強い相互作用の理論なのであり、1GeV 以下においてきて強結合になっても $SU(3)$ QCD のままで良いのである。(別のゲージ理論による記述はあるかも知れないにしても、である。)

謝辞

この話をせよと勧めて頂いた研究会世話人の高橋智彦さんに感謝したいと思います。彼の辛抱強い催促がなければこの報告も書いていなかったでしょう。この研究は一部、日本学術振興会科学研究費基盤研究(B)(2)「余次元世界と素粒子統一理論」(16340071)の支援を受けています。

A 付録: 退官講演?

討論の時、太田信義さんが「退官講演のような質問をします。BRSの論文は、ものすごく数学的な形で書かれていて物理に役に立つようには見えなかった。どうしてKugo-Ojimaでは、BRSの論文のようなものが使えると思ったのか?その経緯を明らかにしてもらおうとためになるかも知れない」という質問をされ、それに対して答えた部分をここに再現しておく(少し増えている)。

ゲージ理論の演算子形式を与える必要があったが、不思議なことにそういう問題意識を持った人は世界的にあまり居なかった。我が京都大学には中西先生が1966年中西-Lautrup formalismと呼ばれるQEDの明白に共変な不定計量正準理論を完成させていて、そういう伝統があった。不定計量の場の理論についての半年間の講義が私のM2の年1972年の前期にあり、その講義を聞いたときから、QEDの場合の演算子形式は、非可換ゲージ理論の場合に、どう拡張すればよいのか?という問題を何度か考えていた。特に、中西-Lautrupの補助条件をどう変更すればよいのか、いろいろ考えたが(その後も折に触れ何度かトライしたが)、いつもそこで挫折していた。しかし、その問題意識はずっとあった。

1977年の春頃、中西先生が京大物理学教室で話をされ、「Quark ConfinementはQEDに於ける縦波やスカラー波が出て来ないのと同じ様なものだ」とコメントされたのに対して、田中正先生が「QEDの場合は、スカラーモードはfreeなのでconfinementの例としては余りに自明過ぎる。Yang-Mills場の時の縦波やスカラー波、Faddeev-Popov ghostモードなら相互作用をしているからconfinementの例としてもおもしろいと思う。中西さんのQEDのFormalismはYang-Mills場の時にも適用できるようにできないか?」と質問された。これに対して中西先生は「残念ながら、Yang-Mills場の場合は運動方程式とconsistentなうまい補助条件が設定できない。経路積分法では、Faddeev-Popov ghostなんかはloopを回るだけで外には出てこないと言っているが、あれはそう解釈しているだけでちゃんとした(演算子形式の)理論として定式化されている訳では全然ない」と答えられた。私はその頃「経路積分法と演算子形式とは全く等価である」と確信していたので、その時つい「経路積分法でそのような非物理的モードが外に現われないということが示されている以上、演算子形式でも必ず同じ事が言えるはずだ。簡単な補助条件は見つからないかもしれないが、絶対できるはずだ。」と言ってしまった。

それで小嶋君とその仕事に取りかかり、最初物理的モードのみからなる始状態から出発した場合のS行列に対してWard-高橋恒等式が導く条件を、終状態が含む非物理的モードが1粒子の場合、2粒子の場合、3粒子の場合、と具体的に調べていった。1粒子の場合は、QEDと同じ理由でゼロノルムになった。2粒子の場合になると、Ward-高橋恒等式が、縦波一個とスカラー波一個を含む振幅とFP ghost-反ghost対を含む振幅とが等しいという関係式を出すにもかかわらず、それらの間でノルム相殺が起きず、ゼロノルムにならない!という事態に出くわした。ここで初めてFaddeev-Popov ghostの通常のエルミート性の付与の間違いに気づいた。FP ghostも反ghost(のi倍)もどちらもエルミートと考えれば、ノルム相殺が起きてゼロノルムになる。しかもその時、Lagrangianもエルミートになるので、その正しさを確信した。終状態に非物理的モードが3粒子入ってくる場合は、Ward-高橋恒等式が振幅に対して出す関係式はかなり複雑になってくる。しかし、今度は特にそれ以上の困難はなく、その振幅の関係式がゼロノルムを保証していることを示せ

た。次に 4 粒子の場合になると Ward-高橋恒等式の導く関係式が、非常に多くの振幅の間の関係式になるので、本当に複雑になる。この場合にも直接ゼロノルムになる証明を力づくでしたと思うが、余り記憶がはっきりしない。しかし、ともかくそれ以上の粒子数や一般の場合には、Ward-高橋恒等式の導く関係式が極めて複雑でこの方法でゼロノルムだと証明できないことは明らかだった。その時点で、その Ward-高橋恒等式の導く関係式をじっと眺めていて、何かある bilinear なフェルミ的 ‘荷電演算子’ を掛ければ消える、という条件式と同じであることに気づいた。その時に、少し前に読んでいた Zinn-Justin の Bonn での Lecture Note[9] の記述を思い出した。そこには、確か、Ward-高橋恒等式がフェルミ的な対称性から導かれる、と書いてあった。早速、そのフェルミ的な対称性 – BRS 対称性 – に対応した Noether 電荷を作り、その free part を見ると、はたして上で見つけた ‘荷電演算子’ と全く同じ表式だった。

参考文献

- [1] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton Series in Physics, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1997)
- [2] Y. Nambu, “Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity,” *Phys. Rev.* **117** (1960) 648.
- [3] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki and T. Yanagida, “Is ρ Meson a Dynamical Gauge Boson of Hidden Local Symmetry?,” *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1215.
- [4] T. Kugo and I. Ojima, “Manifestly Covariant Canonical Formulation of Yang-Mills Field Theories: Physical State Subsidiary Conditions and Physical S Matrix Unitarity,” *Phys. Lett. B* **73** (1978) 459.
- [5] T. Kugo and I. Ojima, “Local Covariant Operator Formalism of Nonabelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **66** (1979) 1.
- [6] E. H. Fradkin and S. H. Shenker, “Phase Diagrams of Lattice Gauge Theories with Higgs Fields,” *Phys. Rev. D* **19** (1979) 3682.
- [7] S. Weinberg, *Phys. Lett.* **9** (1964) 357; *Phys. Rev.* **135** (1964), B1049.
- [8] T. Kugo and S. Uehara, “Massless Particle with Spin $j \geq 1$ Implies the S-Matrix Symmetry” *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981) 1044.
- [9] J. Zinn-Justin, “Renormalization of Gauge Theories,” *SACLAY-D.PH-T-74-88 Lectures given at Int. Summer Inst. for Theoretical Physics, Jul 29 - Aug 9, 1974, Bonn, West Germany*