有限質量のスピン 2 の場の理論のユニタリな定式化と零質量極限

東京理科大学基礎工学部　佐藤喜一郎
E-mail: kisato@rs.kagu.tus.ac.jp

Poincaré 群のユニタリ表現を，スピノルから 2 回の対称テンソル場 $h_{\mu\nu}$ を使った共変性が明白な表現に書き換えると，有限質量スピン 2 の場合，Fierz-Pauli の方程式

$$(\Box + m^2)h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0,$$

を満たす必要がある。これらを運動方程式として与えるような Lagnargian は Fierz-Pauli により与えられた。しかし，Fierz-Pauli の理論を量子化すると，零質量極限が graviton の理論を与えない (vDZV 問題) や，伝播関数が Fierz-Pauli の方程式から期待される関係を満たさないなど様々な問題がある。これらの問題を解決するには，質量項を Fierz-Pauli 型から，パラメータ a を含む

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m^2}{2}[h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - ah^2],$$

へ拡張し ($a = 1$ が Fierz-Pauli 理論)，スカラーモード $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ が伝播するようにすればよいが，今度はユニタリティを壊す。しかし，我々は，次のような方法で補助条件を設定すれば，ユニタリティを回復できることを見出した。

まず，$a \neq 1$ での Fierz-Pauli 方程式のひとつに相当する $\partial^\mu h_{\mu\nu} - a\partial_\nu h = 0$ をゲージ条件として実現されるように B 場を導入する。これは，ラグランジアンに，BRS 不変な

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BRS}} = -i\delta\left[\overline{C}^\mu(-1)\left(\partial^\nu h_{\mu\nu} - a\partial_\mu h + \alpha_{\mu\nu}B^\nu\right)\right]$$

という項を加えることで実現できる。次に，任意のスカラー関数 $\sigma(x)$ を使った Deser-Waldron 型のゲージ変換

$$\delta h_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\sigma(x), \quad \delta B^\mu = \partial^\mu\sigma(x), \quad \delta C_\mu = \delta\overline{C}^\nu = 0,$$

を考え，$\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\mathrm{BRS}}$ が不変なように $\alpha_{\mu\nu}$ を定めると，

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{1-a}{m^2}(\alpha_1\eta_{\mu\nu}\Box + \alpha_2\partial_\mu\partial_\nu), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

のように，ベクトル場の B 場に運動項を導入すると，このゲージ対称性を持たせることができる。

新たなゲージ対称性のお陰で，負ノルムを生み出す h を非物理的状態として排除することができる。例えば，$h = 0$ ゲージを採り，九後小嶋型の補助条件を設定すると，残された場の自由度は，

$$9(\bar{h}_{\mu\nu}) + 4(B^\mu) - 4(C_\nu) - 4(\overline{C}^\lambda) = 5,$$

となり，spin 2 の場の物理的な自由度と同じになることが分かった。また，この定式化での零質量極限は，$a = 1/2$ のときに，de Donder 条件 ($\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = 0$) の下での graviton の伝播関数を再現する。ただし，一般には，その graviton は dipole ではなく tripole となる。

ところで，我々の定式化は，結果的に Stuckelberg 形式に似ているようにも見えるが，その差を計算すると，

$$\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\mathrm{BRS}} = \mathcal{L}_m\left[h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}(\partial_\mu B_\nu + \partial_\nu B_\mu)\right] + \frac{1-2(1-a)\alpha_1}{8m^2}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \text{FP ghosts},$$

となり，B 場の運動項はゲージパラメータを適当に選ぶと零にすることもできる。従って，我々の理論で自由度があっているのであれば，stuckerberg 形式では物理的な自由度が合わず，ユニタリティも言えないと思われる。