Twistors and tree-level Yang-Mills

University of Tokyo Yosuke Imamura
E-mail: imamura@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

2003 年の終わりに Witten によってツイスター空間上の弦理論とゲージ理論の新たな対応が提案され、それが契機となってゲージ理論の摂動論的な散乱振幅の新たな性質が明らかになった。ここではツイスター空間についての説明を簡単に行った後で、最近の進展について簡単に解説する。

1 ツイスター空間とは

この節では 1960 年代から 70 年代にかけて R.Penrose[1, 2] によって開発されたツイスターと呼ばれる手法について簡単に説明する。この話題については教科書 [3, 4] もあるので、詳しくはそちらを参照してほしい。

ツイスターのひとつの利点は、様々なスピンの零質量粒子を統一的に扱うことができるということである。そのことを具体例で見てみよう。一般に、0 でないスピンを持つ場はスピノル添え字やベクトル添え字を持つ偏極部分と、運動量を担う軌道部分の組み合わせで書くことができる。任意のベクトルは $v_{a\dot{a}} = \sigma^{\mu}_{a\dot{a}} v_\mu$ のように σ^μ 行列を用いることでスピノル添え字だけを用いて書くことができる。このことを利用していくつかの場をスピノル添え字だけで表すと次のようになる。

- スピン ±1/2：ワイルフェルミオンは、カイラリティの異なる二つのもの ψ_a と $\psi_{\dot{a}}$ が存在する。
- スピン ±1：マクスウェル場の場の強さ $F_{\mu\nu}$ は、スピノル添え字を用いて表すと $F_{a\dot{a}b\dot{b}} = F_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + F_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{ab}$ のように対称なスピノル添え字を持つ F_{ab} と $F_{\dot{a}\dot{b}}$ に分解することができる。ϵ_{ab} と $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ は反対称不変テンソルである。
- スピン ±3/2：グラビティーノの場の強さは $\psi_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\psi_{\nu]}$ と定義される。カイラリティーによって二つの可能性があるが、$\psi_{a\mu\nu} \to \psi_{ab\dot{b}c\dot{c}} = \psi_{abc}\epsilon_{\dot{b}\dot{c}}$ あるいは $\psi_{\dot{a}\mu\nu} \to \psi_{\dot{a}b\dot{b}c\dot{c}} = \psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}\epsilon_{bc}$ のようにどちらも 3 つの対称なスピノル添え字を持つ量で表すことができる。
- スピン ±2：グラビトンはワイルテンソル $W_{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いて表すことができる。ワイルテンソルはスピノル添え字を用いて $W_{a\dot{a}b\dot{b}c\dot{c}d\dot{d}} = W_{abcd}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} + W_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}$ のように二つの部分に分解することができる。W_{abcd} も $W_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$ も 4 つのスピノル添え字について完全対称である。

以上の例からわかるように、スピン s の零質量粒子の偏極は $2s$ 個のスピノル添え字を持つ量で表すことができる。点つきと点なしの二種類のスピノル添え字はヘリシティーの符号に関係しており、ここでは $2s$ 個の点なし添え字を持つ偏極で現される粒子のヘリシティーは $-s$、$2s$ 個の点つき添え字を持つ場合のヘリシティーは $+s$ であるとする。

これらの場に対する運動方程式は全て次のような形に表される。（ここではヘリシティーが負である場合に限る。）

$$\partial^{\dot{a}a_1}\psi_{a_1\cdots a_{2s}}(x) = 0. \tag{1}$$

この運動方程式を解く際によく用いられるのは次の手順である。

1. 波動関数を $\psi_{ab\cdots c}(x) = \zeta_{ab\cdots c} f(x)$ のように偏極部分 ζ と軌道部分 f に分解する。

2. 軌道部分を平面波 $f(x) = e^{ikx}$ にとる。

3. 運動方程式を満足するためには、運動量 k^μ は light-like でなければならない。これはスピノル添え字で表した運動量が $k_{a\dot{a}} = \lambda_a \widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ と因子化できることと等価である。ただし λ_a と $\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ はグラスマン偶のスピノルである。

4. あとは平面波を運動方程式 (1) に代入して偏極部分を求めればよい。$\lambda^a \lambda_a \equiv \epsilon_{ab} \lambda^a \lambda^b = 0$ という性質を用いれば、解を $\zeta_{ab\cdots c} = \lambda_a \lambda_b \cdots \lambda_c$ と表すことができる。

以上の手順によって、平面波解

$$\psi_{ab\cdots c}(x) = \lambda_a \lambda_b \cdots \lambda_c \exp(i \lambda_a \widetilde{\lambda}_{\dot{a}} x^{a\dot{a}}) \tag{2}$$

を得ることができた。一般の解はこの平面波を重ね合わせることによって構成することができる。重ね合わせの重み関数が定義される空間は運動量空間である。（正確には運動量空間中の light-cone 部分）

ここで考えている 4 次元時空がミンコフスキー空間であれば、λ_a と $\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ は互いに複素共役と考える必要がある。しかし、摂動論的な議論のみをする場合には、散乱振幅などの解析性を仮定することにより運動量を複素数に拡張しておくのが便利である。この場合、λ_a と $\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ の成分は全て独立な複素数であるとみなされる。

上で与えた手順では、まず運動量を与え、その後にそれと直交する偏極を決めるという順序で解を求めた。次に、これとは逆の手順、すなわち、まず偏極を与え、その後に波動関数の軌道部分 $f(x)$ を決定するという順番で解を求めてみよう。

1. 波動関数を $\psi_{ab\cdots c}(x) = \zeta_{ab\cdots c} f(x)$ のように偏極部分 ζ と軌道部分 f に分解する。これは先ほどの手順と同じである。

2. 次に偏極部分を決めよう。$2s$ 個の完全対称なスピノル添え字をもつ偏極 $\zeta_{ab\cdots c}$ は必ずあるスピノル λ_a の $2s$ 個の積として $\zeta_{ab\cdots c} = \lambda_a \lambda_b \cdots \lambda_c$ と表すことができる。

3. 運動方程式より、軌道部分は $\lambda^a \partial_{a\dot{b}} f(x) = 0$ を満足しなければならない。

4. この微分方程式の解は $f(x) = g(\lambda_a x^{a\dot{a}})$ である。ただし g はスピノル $\lambda_a x^{a\dot{a}}$ の任意関数。この関数は $f_{(\lambda,\mu)} \equiv \delta^2(\lambda_a x^{a\dot{a}} + \mu^{\dot{a}})$ の重ねあわせとして表すことができる。

こうして、運動方程式の解の完全系

$$\lambda_a \lambda_b \cdots \lambda_c \delta^2(\lambda_a x^{a\dot{a}} + \mu^{\dot{a}}) \tag{3}$$

が得られた。ツイスター空間は、この波動関数を重ね合わせる際の重み関数が定義される関数として定義される。(3) の波動関数は 4 つのパラメータ $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_{\dot{1}}, \mu_{\dot{2}})$ によって定義されているが、これら全てを定数倍しても波動関数は規格化が変更されるだけで線形独立な解を与えない。従って、ツイスター空間はこのようなスケール変換で関係する点を同一視して定義される射影空間 $\mathbf{P}^3$ であり、λ_a と $\mu_{\dot{a}}$ はその上の斉次座標である。（ここではスピノルの成分は全て複素であると仮定しているので、ここでいう $\mathbf{P}^3$ は複素射影空間 $\mathbf{CP}^3$ である。）

x^μ 空間上の波動関数とツイスター空間上の波動関数（すなわち上で「重み関数」と呼んでいたもの）$\varphi(\lambda,\mu)$ の間の関係は、$\delta^2(\lambda x+\mu)$ を核とする積分変換である。

$$\psi^{ab\cdots c}(x)=\int_{\mathbf{P}^3}\Omega\delta^2(\lambda_a x^{a\dot{a}}+\mu^{\dot{a}})\lambda^a\lambda^b\cdots\lambda^c\varphi(\lambda,\mu) \tag{4}$$

Ω は $\mathbf{P}^3$ 上の不変測度を表す。

ツイスター空間と運動量空間の間の関係を見るために、(2) と (4) にこの両辺に運動量演算子 $p_{a\dot{a}}=\partial_{a\dot{a}}$ を作用させてみよう。運動量の固有状態 (2) の場合にはこの操作は $\lambda_a\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ を掛けることに等しい。一方 (4) の右辺を $x^{a\dot{a}}$ で微分することは $\varphi(\lambda,\mu)$ に演算子 $\lambda_a(\partial/\partial\mu^{\dot{a}})$ を作用させることと等価である。このことから、運動量空間のスピノル $\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ がツイスター空間の間では微分演算子 $\partial/\partial\mu^{\dot{a}}$ に置き換わることがわかる。すなわち、運動量空間とツイスター空間のはフーリエ変換 $\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}\leftrightarrow\mu_{\dot{a}}$ で互いに移りあう。

このようにして導入されたツイスター空間上では、任意のスピンを持った場が (4) を見てもわかるようにスカラー関数 $\varphi(\lambda,\mu)$ として現れているので、取り扱いが簡単になる。さらに、ここでは説明する余裕はないが、ゲージ場のインスタントンおよび重力インスタントンを構成する際にもツイスターは大変有効である。実際、多インスタントン解の構成法として有名な ADHM 構成法はツイスターの応用として生まれたものである。

後で述べるツイスター空間上の弦理論と場の理論の双対性は超対称性が存在する場合の話であるが、ツイスター空間にグラスマン座標を追加することにより超対称性を持つ理論を表すことも簡単にできる。$\mathcal{N}$ 個の超対称性がある場合、ツイスター空間は $\mathbf{P}^{3|\mathcal{N}}$ となることが知られている。

2　Yang-Mills 場の散乱振幅

$U(N)$Yang-Mills 場の散乱振幅を考えよう。以下で述べる性質の中にはループの寄与まで含めて成り立つものもあるが、ここではツリーレベルだけを考えることにする。外線の本数を n とし、外線の運動量と偏極はスピノル変数 λ_i と $\widetilde{\lambda}_i$ を用いて表すことにする。$i=1,\ldots,n$ は外線のラベルであり、color ordering をとる。一般に、散乱振幅は次のように表される。

$$\text{Amp.}=g_{\text{YM}}^{n-2}\delta^4(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^a\lambda_i^{\dot{a}})A(\lambda_i,\widetilde{\lambda}_i) \tag{5}$$

ある散乱振幅に対する全ヘリシティー h_{tot} を全ての外線のヘリシティーの和として定義する。この量はしばしば helicity violation と呼ばれる。ただし、外線の向きは全て入る向きにとることにする。外線の本数が n であれば $-n\leq h_{\text{tot}}\leq n$ であり、$n-h_{\text{tot}}$ は常に偶数である。

Yang-Mills 場の散乱振幅は次の性質を満足する [5, 6, 7]。（$n\geq 4$ とする。）

- $|h_{\text{tot}}|=n$ または $|h_{\text{tot}}|=n-2$ のとき $A(\lambda_i,\widetilde{\lambda}_i)=0$ である。
- $h_{\text{tot}}=n-4$ のとき、すなわち $h=-1$ 外線が 2 本でそれ以外が全て $h=+1$ のとき、$A(\lambda_i,\widetilde{\lambda}_i)$ は “holomorphic” である。すなわち λ_i にのみ依存し、$\widetilde{\lambda}_i$ に依存しない。この振幅はしばしば MHV(Maximally Helicity Violating) 振幅と呼ばれる。
- $h_{\text{tot}}=-(n-4)$ のとき、すなわち $h=+1$ 外線が 2 本でそれ以外が全て $h=-1$ のとき、$A(\lambda_i,\widetilde{\lambda}_i)$ は “anti-holomorphic” である。すなわち $\widetilde{\lambda}_i$ にのみ依存し、λ_i に依存しない。この振幅はしばしば $\overline{\text{MHV}}$ 振幅と呼ばれる。

- $-(n-4) < h_{\rm tot} < n-4$ のとき、$A(\lambda_i, \widetilde{\lambda}_i)$ は $\widetilde{\lambda}_i$ と λ_i の両方に依存する。

MHV 振幅については、次の具体的表式が知られている。

$$\text{Amp.} = g_{\rm YM}^{n-2}\delta^4(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^a\lambda_i^{\dot{a}})\frac{\langle r,s\rangle^4}{\prod_{i=1}^{n}\langle i,i+1\rangle} \tag{6}$$

ただし、r と s はヘリシティーが -1 である二本の外線の番号であり、$\langle k,l\rangle \equiv \langle\lambda_k,\lambda_l\rangle \equiv \lambda_k^a\lambda_{la}$ という記号を用いた。点つき添え字のスピノルについては、$[*,*]$ を用いる。

3　ツイスター空間上の弦理論と散乱振幅

MHV 振幅 (6) をツイスター空間上で表してみよう。§1 でも述べたように、運動量空間とツイスター空間はフーリエ変換 $\widetilde{\lambda} \leftrightarrow \mu$ で関係している。そこで (6) をフーリエ変換することでツイスター変数を用いた表式に移ろう。

$$\begin{aligned}\text{Amp.} &= \int d^{2n}\widetilde{\lambda}e^{i\sum[\mu_i,\widetilde{\lambda}_i]}\delta^4(\sum_i\lambda_i^a\widetilde{\lambda}_i^{\dot{a}})\frac{\langle r,s\rangle^4}{\prod_i\langle i,i+1\rangle} \\ &= \int d^4x\int d^{2n}\widetilde{\lambda}e^{i\sum_i(\lambda_{ia}x^{a\dot{a}}+\mu_i^{\dot{a}})\widetilde{\lambda}_{i\dot{a}}}\frac{\langle r,s\rangle^4}{\prod_i\langle i,i+1\rangle} \\ &= \int d^4x\delta^{2n}(\lambda_{ia}x^{a\dot{a}}+\mu_i^{\dot{a}})\frac{\langle r,s\rangle^4}{\prod_i\langle i,i+1\rangle}\end{aligned} \tag{7}$$

１行目から２行目で δ 関数を指数関数の積分で書き直し、その後で $\widetilde{\lambda}_i$ 積分を行って３行目の式を得た。最後の表式に現れた δ 関数は、それぞれの外線に相当するツイスター空間上の n 個の点 (λ_i,μ_i) が全て $\lambda_a x^{a\dot{a}}+\mu_{\dot{a}}=0$ によって与えられる直線上にあることを意味している。（ツイスター空間上の座標は複素であるから、ここでいう直線は実２次元の面を指す。）Witten はこの直線を D-ブレーンと解釈することで、上記の振幅が自然に説明できることを示しさらに何枚ものブレーンを含む振幅を考えれば一般の振幅を与えることができるであろうという大胆な提案を行った [8]。具体的には、「$\mathcal{N}=4$ の超対称 Yang-Mills 理論の散乱振幅はツイスター空間上の B-model における散乱振幅として再現することができる」というものである。B-model は位相的弦理論の一種で、カラビ・ヤウ空間上でのみ定義することができる。ツイスター空間 $\mathbf{P}^{3|\mathcal{N}}$ は $\mathcal{N}=4$ の時にカラビ・ヤウであるので、その上で B-model を考えることができる。Witten の解釈によれば、直線 $\lambda_a x^{a\dot{a}}+\mu_{\dot{a}}=0$ は D1-ブレーンを表している。$\mathcal{N}=4$ 理論の場はツイスター空間上を飛んでいる場に対応し、外線はブレーン上の頂点演算子として表される。i 番目の外線に対応する頂点演算子を V_i とすれば、これはブレーン上の点 (λ_i,μ_i) に挿入されており、$1/\langle i,i+1\rangle$ という因子は V_i と V_{i+1} の間を飛ぶブレーン上の粒子のプロパゲータである。V_r と V_s はヘリシティーの違いに起因してそれ以外の頂点演算子と異なるのだが、このために $\langle r,s\rangle^4$ という因子が現れる。そして $\int d^4x$ はブレーンの埋め込み方を表すパラメータ x に対するモジュライ積分である。

ブレーンのモジュライ積分をどのように行うか（どのように積分路をとればいいのか）といった微妙な問題があり、B-model からの厳密な散乱振幅の導出はまだ行われていないが、以上のような解釈のもとでいくつかのもっともらしい過程を置くことによって構成された計算ルールが存在し、それが実際にツリーレベルの任意の振幅を再現されることが示されている。この方法は通

常のファインマンダイアグラムを用いた計算に比べ、かなり手間を省くことができるというご利益がある。

4 MHV ダイアグラム

前の節で見たように、MHV 振幅はツイスター空間上で 1 枚の D-ブレーンを考えるとうまく説明することができる。もしこれが本当であれば、複数枚の D-ブレーンが寄与する過程もあると考えるのが自然であろう。すると、ひとつの D-ブレーンを相互作用の頂点とするようなファインマン図に似た図形を書くことができる [9]。このような図形は MHV ダイアグラムと呼ばれる。さらに、ファインマンルールのように、図から振幅を計算する規則を与えることができる。これは以下のようなものである。

1. 各頂点（これはツイスター空間上の D-ブレーンに対応している）は MHV 振幅 (6) に置き換える。これは各頂点から出る線のうち、二本だけがヘリシティー -1 でありそれ以外は $+1$ であることも意味している。$+1$ 外線の本数は任意である。

2. 内線はプロパゲータ $1/p^2$ で置き換える。また、内線の両端はヘリシティーが逆である。

3. 一般に外線が与えられたとき何通りもの MHV ダイアグラムが描けるが、通常のファインマンダイアグラム同様、これら全てのダイアグラムの寄与を合計したものが振幅を与える。

4. 頂点を MHV 振幅に置き換える際、内線運動量からスピノル変数 λ を定義する必要がある。内線運動量は一般に light-like ではないので、$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ という定義を用いることはできない。その代わり、$\lambda_a = p_{a\dot{a}}\eta^{\dot{a}}$ を用いて定義する。ただし $\eta^{\dot{a}}$ は任意のスピノルであり、何を選んでもよいが、全てのダイアグラムの計算に同じものを用いる。

前の節でも少し触れたが、このルールの利点は（$h = -1$ 外線が少ない場合は特に）通常のファインマンルールを用いるよりもダイアグラムの個数が圧倒的に少なくなることである。

この手順が正しい振幅を与えることは、散乱振幅の間の再帰関係を用いることで示された [10, 11]。その証明の第一段階として必要なのは、上記のルールが振幅のポール構造を正しく再現することを確認することである。ポール構造というのは、内線のうちのどれかが on-shell になる近傍でツリーレベル振幅が満たす次の性質である。

$$A(p_1, \ldots, p_n) \sim A''(p_{j+1}, \cdots, p_{i-1}, p_{ij}) \frac{1}{p_{ij}^2} A'(p_i, \ldots, p_j, -p_{ij}) \quad (p_{ij}^2 \sim 0) \tag{8}$$

ただし、$p_{ij} = p_i + p_{i+1} + \cdots + p_j$ は問題の内線を走る運動量であり、A' と A'' はその内線で分割された二つの部分の振幅を表す。p_{ij} が on-shell になるところだけを見ているので A' も A'' も A 同様 on-shell の散乱振幅である。MHV ダイアグラムを用いて計算した散乱振幅がこのポール構造を持つことは、比較的簡単に示すことができる。

証明の第 2 段階は、上記のポール構造から BCF 再帰関係式 [10] を示すことである。まず、外線のうちの二本（ここでは r 番目と s 番目とする）を選び、運動量を次のようにシフトする。

$$\begin{aligned} p_r = \lambda_r \tilde{\lambda}_r \quad &\to \quad p_r(z) \equiv p_r + z\lambda_r\tilde{\lambda}_s = \lambda_r(\tilde{\lambda}_r + z\tilde{\lambda}_s) \\ p_s = \lambda_s \tilde{\lambda}_s \quad &\to \quad p_s(z) \equiv p_s - z\lambda_r\tilde{\lambda}_s = (\lambda_s - z\lambda_r)\tilde{\lambda}_r \end{aligned} \tag{9}$$

$p_r(z)+p_s(z)=p_r+p_s$ であるから、このシフトは運動量の保存を破らない。また、$p_s(z)$ も $p_r(z)$ もスピノルの積として書けているので、外線が on-shell であるという条件も破らない。このようなシフトによって、散乱振幅を z の関数 $A(z)$ とみなすことができる。$A(z)$ は z の有理関数である。z をいろいろと変化させると、いくつかの点で $A(z)$ は発散する。これは内線運動量が on-shell になることから来るポールである。(8) を用いれば、このポールの留数を部分ダイアグラムの散乱振幅によって表すことができる。さらに $\lim_{z\to\infty} A(z)=0$ を示すことができる。よく知られているように、正則関数の全てのポールでの留数と無限遠方での振舞いが与えられるとその関数は完全に決まってしまう。$A(z)$ の場合は、次のように与えられる [10]。

$$A(z)=\sum_{i,j} A''(p_{j+1},\ldots,p_{i-1}p_{ij}(z_{ij}))\frac{1}{p_{ij}^2(z)}A'(p_i,\ldots,p_j,-p_{ij}(z_{ij})) \tag{10}$$

ただし z_{ij} は $p_{ij}(z)^2=0$ となる z の値である。この式は、発散する内線を持たなくてもよい任意の散乱振幅をより小さいダイアグラムの散乱振幅として与える式であり、BCF 再帰関係式と呼ばれる。この式を用いれば、3 点相互作用から全ての散乱振幅を構成することができる。

BCF 再帰関係式はポール構造 (8) と $A(z\to\infty)=0$ から示すことができ、これらの条件は MHV ダイアグラムに対しても満たされることが示されるので、MHV ダイアグラムは正しく振幅を再現することが結論される。

5　まとめ

ここでは Witten によるツイスター空間上の弦理論と $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の間の双対性の提案に始まるゲージ理論の散乱振幅の計算手法の進展についてごく簡単に述べた。

ここで紹介した MHV ダイアグラムの手法はファインマンルールに比べはるかに効率よく Yang-Mills 理論の散乱振幅を（少なくともツリーレベルでは）与える。その大きな理由は、出発点として（多数のファインマンダイアグラムを実際に計算することで得られる）MHV 振幅を既に知っているものとして部品として用いるからである。この意味で MHV ダイアグラムはファインマンダイアグラムとは独立な手法というよりもむしろこれまでに知られていた振幅を有効活用するテクニックといったほうがいいかもしれない。

MHV ダイアグラムの正しさの証明には BCF 再帰関係式を用いたが、これはツリーレベルの Yang-Mills 散乱振幅の間の関係である。このような強力で、しかも単純な関係式がこれまで知られていなかったことは驚くべきことである。

ここでは弦理論側での解析についてはほとんど述べなかった。理由のひとつは、まだツイスター空間上の弦理論が完全には理解されていないためである。大きな問題のひとつは D-ブレーンのモジュライ積分のとり方が不明であることである。Witten によって提案された双対性を介してツイスター空間上の位相的弦理論の解析にゲージ理論を用いることができるとすれば大変興味深いことであるが、これについては将来の進展に期待したい。

参考文献

[1] R. Penrose *“Twistor Algebra”*, J.Math.Phys. **8** (1967) 345.

[2] R. Penrose *"Twistor theory: An approach to the quantization of fields and space-time"*, Phys.Rept. C6 (1972) 241.

[3] R.S.Ward, R.O.Wells,Jr *"Twistor Geometry and Field Theory"*, Cambridge University Press.

[4] S. A. Huggett, K. P. Tod *"An Introduction to Twistor Theory"*, Cambridge University Press

[5] S. J. Parke, T. R. Taylor Perturbative QCD utilizing extended supersymmetry PLB157(1985)81

[6] M. T. Grisaru, H. N. Pendelton Some properties of scattering amplitudes in supersymmetric theories NPB124(1977)81

[7] S. J. Parke, T. R. Taylor Amplitude for n-gluon scattering PRL56(1986)2459

[8] E. Witten, *"Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space"* Commun.Math.Phys. **252** (2004) 189-258 `hep-th/0312171`.

[9] F. Cachazo, P. Svrcek, E. Witten MHV Vertices And Tree Amplitudes In Gauge Theory JHEP 0409 (2004) 006, hep-th/0403047

[10] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng New Recursion Relations for Tree Amplitudes of Gluons Nucl.Phys. B715 (2005) 499-522, hep-th/0412308

[11] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, E. Witten Direct Proof Of Tree-Level Recursion Relation In Yang-Mills Theory Phys.Rev.Lett. 94 (2005) 181602, hep-th/0501052