Noncommutative Geometry and Drinfel'd Twisted Symmetries

首都大学東京大学院理学研究科　入澤 学

E-mail: irisawa@kiso.phys.metro-u.ac.jp

定数背景場の入った開超弦理論の低エネルギー極限として非可換場の理論を考えることができたわけであるが、可換空間上で保存される Lorentz 対称性の破れや $\mathcal{N}=\frac{1}{2}$ SUSY など多くの著しい特徴を持っている。近年これらの非可換化で残る対称性は、Hopf 代数の解析から元の理論に在る対称性を記述する代数の拡張及び変形により表現できることが解ってきた [1] [2]。即ち Moyal 積で書けるような非可換積は、そこに内在する Hopf 代数の表現として明確に表れるという主張である。

通常の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を結合則を満たす積と単位元を追加した普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に拡張してやると、自然に Hopf 代数が誘導できる。係数体 $\mathcal{K}$ 上の Hopf 代数 $\mathcal{H}$ とは Co-product $\Delta:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$、Co-unit $\varepsilon:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{K}$、Antipode $\gamma:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}$ という 3 つの写像を備えた代数であり、先の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に対しては $X\in\mathfrak{g}$ 及び $e\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}),\ 1\in\mathbb{C}$ をそれぞれ積の単位元として

$$\begin{gathered}\Delta(X):=e\otimes X+X\otimes e\ ,\quad \Delta(e):=e\otimes e\\ \varepsilon(X):=1\ ,\quad \varepsilon(e):=1 \qquad\qquad \gamma(X):=-X\ ,\quad \gamma(e):=e\end{gathered}\tag{1}$$

と定義してやれば Hopf 代数の条件を満たす。さらに重要なことは、上記 3 つの写像をある要素 $\mathcal{F}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ で変形しても再び Hopf 代数になり、元の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の構造には変化を与えないのである。ではこの変形がどのような影響を及ぼすのかというと、代数構造に関して

$$\Delta_t(X)=\mathcal{F}\,\Delta(X)\,\mathcal{F}^{-1}\ ,\quad \gamma_t(X):=T_{\mathcal{F}}\,\gamma(X)\,T_{\mathcal{F}}^{-1}\tag{2}$$

であり、注意すべきは可換代数 $\mathcal{A}$ ——例えば函数環上での表現が歪むということである。つまり表現を $\rho:\mathcal{U}(\mathfrak{g})\rightarrow\mathrm{End}(\mathcal{A})$ とすれば、よく知られた $\mathcal{A}$ の積が次の一般には非可換な積

$$m:f\otimes g\mapsto m(f\otimes g)=fg \quad\Longrightarrow\quad m_t(f\otimes g):=m\circ\rho(\mathcal{F}^{-1})(f\otimes g)=f\bullet g\tag{3}$$

に変わってしまい、以上の一連の変形を Drinfel'd Twist と呼ぶ。ただ、$\mathcal{F}$ は何でも良いわけではなく、Yang-Baxter 方程式 $(\,\mathcal{F}\otimes e\,)\,(\,\Delta\otimes\mathrm{id}\,)\,\mathcal{F}=(\,e\otimes\mathcal{F}\,)\,(\,\mathrm{id}\otimes\Delta\,)\,\mathcal{F}$ 及び Co-unit 条件 $(\,\varepsilon\otimes\mathrm{id}\,)\,\mathcal{F}=(\,\mathrm{id}\otimes\varepsilon\,)\,\mathcal{F}$ を満たす必要があるが、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の可換部分代数の元を持って来れば自動的に Twist 要素 $\mathcal{F}$ になることが知られている。

そこで、この議論を Poincaré 代数と Minkowski 空間上の微分表現で考えてみる。Twist 要素として $\mathcal{F}_{PP}:=\exp\left(\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}P_\mu\otimes P_\nu\right)$ を選んでくると

$$m_t\,(\,f(x)\otimes g(x)\,)=m\circ\exp\left(-\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu\otimes\partial_\nu\right)(\,f(x)\otimes g(x)\,)=f(x)\star g(x)\tag{4}$$

のように Moyal 積と一致する。さらに元の Lorentz 変換は

$$M^t_{\mu\nu}(\Theta^{\lambda\kappa}):=m_t\circ\Delta_t(M_{\mu\nu})\left(x^\lambda\otimes x^\kappa-x^\kappa\otimes x^\lambda\right)=0\tag{5}$$

と対称性の破れを引き起こしていた非可換パラメータ Θ も Drinfel'd Twist された変換では不変性が保たれている。これは Super Poincaré 代数を Superspace 上で微分表現した場合も同様で、Drinfel'd Twist された $\mathcal{N}$=1 SUSY が残っているように見える。

現在ではより一般的な Twist 要素の選び方により様々な非可換性を Moyal 積の形で導入する試みがなされている。我々は Superconformal 代数の S-superchage に着目して計算を行っている。

References

[1] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, *On a Lorentz-Invariant Interpretation of Noncommutative Space-Time and Its Implications on Noncommutative QFT*, Phys. Lett. **B604** 98(2004); hep-th/0408069

[2] Y. Kobayashi and S. Sasaki, *Lorentz invariant and supersymmetric interpretation of noncommutative quantum field theory*; hep-th/0410164