BPS State Counting and Related Physics

理化学研究所 理論物理学研究室　太田和俊
E-mail: k-ohta@riken.jp

近年、超対称ゲージ理論や超弦理論においてインスタントンやDブレーン等の BPS 状態を統計力学的に数え上げる手法が急速に発展した。その背後にある統計系は、融解する結晶の模型、3 次元の Chern-Simons 理論や 2 次元の Yang-Mills 理論等の低次元ゲージ理論、位相的弦理論、非臨界弦理論、行列模型等様々な物理と非常に深い繋がりがあり、今後そのアイデアの重要性はますます大きくなっていくと思われる。 本稿では、これら様々な理論の間の相互の関連について離散化された行列模型というものを手がかりに眺めていきたいと思う。

1　はじめに

ゲージ理論や弦理論の非摂動効果を扱う上でインスタントン、モノポールや D ブレイン等のソリトンは非常に重要な役割を演じる。特に理論が超対称性を持つ場合は、BPS 状態に対象を限る事で対称性の縛りにより理論が非摂動効果を含めて厳密に解ける場合が起こりうる。特に、Seiberg-Witten 理論の登場や、超弦理論における D ブレインの理解が進む事で超対称電荷の数が十分多い場合には様々な事がわかってきた。とはいえ、実際にいろいろな物理量を非摂動効果の全次数について具体的に計算するのは超対称性を持つ理論の場合でも一般には難しい。

そこで、登場したのがここで紹介するインスタントンや D ブレインなどの BPS 状態を統計力学的に数え上げるというアイデアである。有効理論に対し非摂動論的な寄与を計算するためには後述するようにソリトンのモジュライ空間に対する積分が必要になるが、Nekrasov はその積分を巧妙な方法で統計力学な分配関数の和の形に置き換えた [1]。その和はユニタリー群の表現に表れる Young 図のあらゆる組み合わせの集合に対して行われ、その Young 図との対応から融解する結晶に対する模型や自由フェルミオン系との関係が見えてくる。実際の超対称ゲージ理論の有効作用はこの分配関数の自由エネルギーから得られ、しかも驚くべき事に graviphoton 背景場からの寄与もすべて含んだ形で求める事ができる。

さらに興味深い事に、この分配関数は超対称性を持たない低次元 (2 次元、3 次元) のゲージ理論の分配関数や、ある Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の振幅と同じ構造を持つ [2, 3]。この事実は、超対称ゲージ理論を超弦理論の中で D ブレイン等を使って実現し、その対応を見る事で理解することができる。その対応関係を理解するのに重要な鍵は超弦理論における様々な双対性で、特にラージ N 転移、開いた弦と閉じた弦の双対性、T 双対性等である。

本稿ではまず Nekrasov によるインスタントンの数え上げについて概説し、そこに表れる分配関数は通常のランダム行列模型を離散化した物を基本的構造として持つ事を示す [4]。この、離散化された行列模型の解析を軸として、様々な物理との関連を非常におおまかではあるが説明していきたいと思う。

2 Nekrasov によるインスタントンの数え上げ

4 次元で $\mathcal{N}=2$ の超対称性 (8 つの超対称電荷) を持つ $SU(r)$ ゲージ理論のプリポテンシャルはインスタントン効果に対し、

$$\mathcal{F}(a_l) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k(a_l) \Lambda^{2rk} \tag{1}$$

といった展開を持つ事が知られている。ここで、k はインスタントン数、Λ は QCD のスケールで、各項の係数 $\mathcal{F}_k(a_l)$ は真空のモジュライ (随伴表現のスカラー場の真空期待値)a_l に対し、正則な関数となるのがこの理論の特徴である。インスタントンが全くない場合 ($k=0$) での寄与を特に摂動部分 $\mathcal{F}_{\text{pert}} \equiv \mathcal{F}_0$ と以下では呼ぶことにする。

問題は、インスタントン展開の各係数 $\mathcal{F}_k(a_l)$ を決定する事にあるが、Seiberg と Witten は真空のモジュライ空間を決定する代数曲線を用いるとこのプリポテンシャルはある偏微分方程式の解として "原理的には" すべて決定できる事を示した。しかし、実際には任意のインスタントン数に対して系統的に係数を決定するのは依然難しい問題であった。本来、非自明なインスタントン背景において有効理論に対する寄与を計算するには、古典解であるインスタントン解の周りで理論を展開し、場の揺らぎに対して経路積分を実行しなければならない。プリポテンシャルの展開の係数は大まかにいって求めたインスタントン解のモジュライ空間の大きさ (体積) に比例している。しかし、このインスタントンモジュライ空間の体積と言うのが問題で、空間がコンパクトでなかったり特異点が存在するために実際には発散してしまい、うまく扱うためには何らかの正則化が必要となる。

この正則化を物理的・数学的にうまく取り扱う方法を与え、きちんと計算したのが Nekrasov である [1, 5]。彼は、Ω 背景 (今の問題では graviphoton 背景場と同じになる) と呼ばれる物を導入し、体積を求めるためのモジュライ空間上での積分を「局所化」と呼ばれる数学的な手法を用いて、Ω 背景場に対するゲージ変換に対する固定点に対する有限な和として与えた。$SU(r)$ ゲージ理論の k インスタントンに対する固定点は全体の箱の数が k であるような r 個の Young 図の集合 ($\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_r)$) で完全に分類する事ができ、すべてのインスタントン数についても和をとるとプリポテンシャルに対する寄与は、

$$Z_{\text{Nekrasov}}(a_l;\epsilon) = Z_{\text{pert}}(a_l;\epsilon) \sum_{\{\vec{Y}\}} \prod_{(l,i)\neq(n,j)} \left(\frac{a_l - a_n + \epsilon(k_i^{(l)} - k_j^{(n)} + j - i)}{a_l - a_n + \epsilon(j-i)} \right) \Lambda^{2r|\vec{Y}|} \tag{2}$$

という分配関数の自由エネルギーから求める事ができる。ここで $Z_{\text{pert}}(a_l;\epsilon)$ は摂動部分からの寄与、$|\vec{Y}|$ は Young 図の集合の箱の数の総和、$k_i^{(l)}$ は l 番目の Young 図 Y_l の i 行目の箱の数を表す。さらに、ここには ϵ というパラメーターが現れるが、これが正則化のために導入した Ω 背景のパラメーターである。正則化の前の元々の量が発散していた事を反映して、Ω 背景をゼロにするような極限 ($\epsilon \to 0$) を考えると上の分配関数の自由エネルギーは発散してしまう。しかし、その発散は高々2 次で

$$\mathcal{F}(a_l) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log Z_{\text{Nekrasov}}(a_l;\epsilon) \tag{3}$$

という極限を考えるとこの量は有限に収束し、これが元々考えていた超対称ゲージ理論のプリポテンシャルを与えるというのが結論である。実際には、この極限をとらないまでもパラメーター ϵ について Nekrasov の分配関数の自由エネルギーを漸近展開する事ができ、展開の初項を除く部分が graviphoton 背景場のプリポテンシャルへの寄与と考えられている。

このようにゲージ理論における非摂動論効果の計算という場の理論の問題が、Young 図の組み合わせにわたる和に関する統計力学的な分配関数を求めるという問題に置き換わった点は非常に興味深い。この方法を用いる事で任意のインスタントンに対するプリポテンシャルへの寄与が Seiberg-Witten 曲線を用いるよりもはるかに系統的に計算できるようになった。

3 超弦理論からの理解と離散化された行列模型

次に、前の章で述べた超対称ゲージ理論に対する Nekrasov インスタントン計算を超弦理論の立場から眺め直してみよう。まず初めに超弦理論の中で 4 次元で $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ理論を実現しなければならないが、そのために IIB 型の超弦理論で D5ブレインの 2 次元部分が ALE 空間内部のの 2 サイクル (以下、球面とする) に巻き付いているような状況を考えよう。そうすると、この D5ブレインは理論が現れる 4 次元部分と ALE 空間の 4 次元部分以外の 2 次元方向に自由に動ける事になるが、この方向が $\mathcal{N}=2$ 理論の真空の平坦方向に対応している。この理論のゲージ結合定数は D5ブレインが巻き付いている 2 サイクルの面積 A に比例しているので、k インスタントン効果は $e^{-\frac{A}{g_s}k}$ の因子を含む。ここで、g_s は弦の結合常数である。このことから、この描像では 4 次元の理論における k インスタントンの寄与は ALE 空間の 2 サイクルに k 回巻き付いた D1 ブレインからの寄与と見なすことができる。しかし、k 回 2 サイクルに巻き付いた D1ブレインといっても、実際にはさらに D インスタントン (D(-1) ブレイン) と束縛状態を作っており、その束縛状態の数だけ多重度が存在する。実は、この多重度としてのエントロピー因子がプリポテンシャルの展開における係数であり、Nekrasov の計算におけるインスタントンのモジュライ空間の体積 (を正則化したもの) に他ならない。

この D1 ブレインと D(-1) ブレインの束縛状態の状態数を見積もるために次のような事を考える。まず D5 ブレインの方であるが、今考えている超対称ゲージ理論が存在する 4 次元方向に B 場を入れて非可換時空にするなどしてラージ N リダクションの考え方を用いると、これはラージ N、すなわち非常に大きい枚数の D1 ブレインと等価に扱う事ができる。つまり、このラージ N 枚の D1 ブレインを一種の熱浴と考え、そこからの D1-D(-1) ブレイン束縛状態の励起の状態数を統計力学的に見積もってやれば元々の超対称ゲージ理論に対するプリポテンシャルへの寄与が計算できる事になる。(実際にはラージ N の部分からの寄与をうまく取り除いてやらないといけないが、これについては後述する。)

まず考えなければならないのは、2 サイクルに巻き付いた N 枚の D1 ブレイン上の有効理論であるが、これが時間方向にのびていないインスタントン的なブレインであるため有効理論はゲージ群が $U(N)$ である 2 次元の位相的場の理論になっていると考えられる。次に、D(-1) ブレイン、D1 ブレインの数 (電荷) が、平坦方向のモジュライを表す随伴表現の場を Φ として、それぞれ $\int dx^2 \mathrm{Tr}\,\Phi F$、$\frac{1}{2}\int dx^2 \mathrm{Tr}\,\Phi^2$ で与えられる事に注意すると、この系に対するグランドカノニカル分配関数は、2 次元の位相的場の理論における期待値

$$Z = \left\langle \exp\left[-\frac{1}{g_s}\int_{S^2} dx^2 \mathrm{Tr}\,(\Phi F + \frac{\mu}{2}\Phi^2)\right]\right\rangle_{\mathrm{top.}} \tag{4}$$

で与える事ができる。$1/g_s$ や μ/g_s が D(-1) ブレインや D1 ブレインの化学ポテンシャルである。この分配関数に対してラージ N 極限を考えてやると超対称ゲージ理論のプリポテンシャルを自由エネルギーの意味で再現するはずであるが、実はこの分配関数が位相的場の理論の期待値である

という事実を利用してやるとフェルミオン部分の積分がすべて実行できて (ここでも Nekrasov の計算で必要だった「局所化」という考え方が重要になる)、次の 2 次元ゲージ理論の分配関数と等価になる。

$$Z=\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Phi \exp\left[-\frac{1}{g_s}\int_{S^2} dx^2 \mathrm{Tr}\,(\Phi F+\frac{\mu}{2}\Phi^2)\right] \tag{5}$$

特に、この場合は場 Φ を先に積分してしまう事で通常の 2 次元 Yang-Mills 理論と一致する事になる。すなわち、4 次元の超対称ゲージ理論のインスタントン効果も含めたプレポテンシャルを計算するという問題は、超対称性を持たない、ボゾニックな 2 次元の Yang-Mills 分配関数のラージ N 極限を計算するという問題に帰着してしまったのである。

この 2 次元の Yang-Mills 理論の分配関数が統計力学的な分配関数として書き直せる事は古くから知られている [6]。実際、(5) の分配関数の経路積分を通常の場の理論の時と同じように遂行していくと、最終的に、

$$Z_{\mathrm{DMM}}=N!\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_N}\prod_{i<j}(g_sn_i-g_sn_j)^2 e^{-\frac{\mu g_s A}{2}\sum_{i=1}^N n_i^2} \tag{6}$$

の形まで持っていく事ができる [7]。ここで、和は $n_1>n_2>\cdots>n_N$ という条件を満たすあらゆる整数列にわたる。この分配関数をみると、2 次ポテンシャルを持つ通常の $N\times N$ Hermite 行列模型の分配関数

$$Z_{\mathrm{MM}}=\int\prod_{i=1}^N d\lambda_i\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2 e^{-\frac{\mu A}{2g_s}\sum_{i=1}^N\lambda_i^2} \tag{7}$$

の固有値を g_s の整数倍となるように離散化し、固有値にわたる積分を整数列に対する和に置き換えた物である事がわかる。このような意味で、2 次元 Yang-Mills 理論の分配関数を以下では「離散化された行列模型」と呼ぶ事にする。

さらに、この分配関数の構造を見ると Nekrasov の分配関数に現れた Young 図にわたる和と同じ構造を持つ事がわかる。いま、分配関数 (6) は $n_1>n_2>\cdots>n_N$ という条件を満たす整数列に対する和になっているが、$n_i=k_i-i+c$ とおく事によって (c は適当な定数)、$k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_N$ という等号を含む減少整数列の和に読みかえる事ができる。そうすると、k_i という数は行の箱の数と思う事で Young 図と 1 対 1 対応させる事ができ、分配関数は Young 図、もしくはそれに対応する $U(N)$ 群の表現 R に対する和として表せる。この対応を使って、行列模型で Vandermonde 行列式にあたる部分と 2 次ポテンシャルに相当する部分を $U(N)$ の表現の言葉で書き換えてやると、それぞれ、表現の次元 $\dim R$ の 2 乗、2 次の Casimir の値 $C_2(R)$ となる。すなわち、2 次のポテンシャルを持つ離散化された行列模型 (2 次元 Yang-Mills 理論) の分配関数は全体を規格化してやることで、

$$Z_{\mathrm{YM}_2}=\sum_R(\dim R)^2 e^{-\frac{\mu g_s A}{2}C_2(R)} \tag{8}$$

となる。この形が元々Migdal によって与えられた 2 次元 Yang-Mills 理論の分配関数の形である。

4　ラージ N 極限

さて、元々の目的は 4 次元の超対称ゲージ理論のプリポテンシャルの展開係数を D1ブレインの多重度を数え上げるという立場から計算する事であるが、これは 2 次元の Yang-Mills 理論、もし

くは離散化された行列模型でラージ N 極限を考える事で得られる事がわかった。次に、このラージ N 極限を考えていきたいが、実は (6) のような 2 次ポテンシャルのままでは 4 次元の超対称ゲージ理論から見てあまり意味のない $U(1)$ 理論のプリポテンシャルしか得られない。一般の $SU(r)$ ゲージ理論に対するプリポテンシャルを得るためには、2 次ポテンシャルの代わりに r 個の極値を持つような $r{+}1$ 次のポテンシャル $W(x)$ に一般化する必要がある。以下ではこのような $r{+}1$ 次のポテンシャルを考える事にする。

このようなポテンシャルの元で離散化された行列模型の固有値に対するダイナミクスを考えてみよう。まず、通常の行列模型でよくやるように固有値に対する密度関数を次のように定義する。

$$\rho(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x - g_s n_i) \tag{9}$$

これを用いると、分配関数 (6) は Vandelmonde 行列式の効果を取り入れた作用、

$$S[\rho(x)] = -N^2 \fint dxdy \log|x-y|\rho(x)\rho(y) + \frac{N}{g_s}\int dx W(x)\rho(x) \tag{10}$$

を用いて

$$Z_{\mathrm{DMM}} = N! \sum_{\{\rho(x)\}} e^{-S[\rho(x)]} \tag{11}$$

と書く事ができる。この作用から Vandermonde 行列式の部分は固有値間に働く反発力、ポテンシャルは極値周りに集めようとする吸引力であるという事がわかる。(正確にはポテンシャルの 2 回微分の符号によるがここでは Dijkgraaf-Vafa 理論と同じ意味で固有値が複素数で正則的に拡大した物と解釈し、ポテンシャルの山でも固有値が集まる物とする。)

これは、各固有値の値を自由フェルミオンの N 個の状態をラベルしている物と見た時、Vandermonde 行列式はフェルミオンの状態間の排他原理の効果を取り入れている物と考えられる。実際、各固有値 (等号を含まない減少整数列) は同じ値をとる事ができずに、一番詰まった状態でも N 個の固有値が順番に並んだ状態になってしまう。その時の固有値があるところとないところの境目がちょうどフェルミ面に相当する部分となり、N が有限であるならば両端が存在し、各固有値の集まりごとにフェルミ面は 2 つずつある事になる。この固有値が一番密に詰まった状態を「基底状態」と以下では呼ぶ事にする。基底状態の自由エネルギーに対する寄与が、実は D5 ブレインをラージ N リダクションした熱浴部分からの寄与であり、今から見るように 4 次元の超対称ゲージ理論のプリポテンシャルの摂動部分に相当する部分となる。これにより、純粋なインスタントンからの寄与は全体の分配関数から基底状態からの寄与の部分をうまく引っ張りだしてきた残りとして表される。

初めに、この基底状態の自由エネルギーに対しての寄与を考えたいが、各固有値が離散的な値しかとらないという事から次の差分演算子

$$\varDelta_{g_s} f(x) \equiv f(x+g_s) - f(x) \tag{12}$$

を導入すると便利である。この差分演算子を用いると作用 (10) のうち Vandermonde 行列式の部分を

$$\varDelta_{g_s}\varDelta_{-g_s}\gamma(x|g_s) = \log x \tag{13}$$

という 2 階の差分方程式を満たす関数 $\gamma(x)$ を用いて、

$$N^2 \fint dxdy \log|x-y|\rho(x)\rho(y) = N^2 \int dxdy \gamma(x-y|g_s) \varDelta_{g_s}\rho(x) \varDelta_{g_s}\rho(y) \tag{14}$$

と書き直す事ができる。この差分方程式 (13) の解が非常に重要で、解は Barnes の 2 重ガンマ関数 $\Gamma_2(x|g_s)$ を用いて、

$$\gamma(x|g_s) = -\log\Gamma_2(x|g_s) \tag{15}$$

と表すことができる。この 2 重ガンマ関数は通常のガンマ関数の拡張になっているが、通常のガンマ関数と同じ様に Stirling の公式に相当する漸近展開

$$\gamma(x|g_s) = \frac{1}{g_s^2}\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3}{4}x^2\right) - \frac{1}{12}\log x + \sum_{g=2}^{\infty}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}\left(\frac{g_s}{x}\right)^{2g-2} \tag{16}$$

を持つ。この関数が 4 次元の超対称ゲージ理論の摂動部分に相当する事は上で述べた通りであるが、同時にこの漸近展開が g_s に対して閉じた弦理論の振幅の種数展開と見なせる事がわかる。実際、この関数は S^2 を標的空間とする B モデルと呼ばれる位相的弦理論の振幅や、c=1 の非臨界弦理論の自己双対半径での振幅と非常に関係が深い。元々、D ブレイン上のゲージ理論として開いた弦の理論を考えていたが、このように閉じた弦理論に特徴的な振幅が現れた事で、今のモデルは開いた弦と閉じた弦の間の双対性を示す 1 つの例となっている。

これらの準備をもとに再びラージ N 極限を考えてみよう。今、固有値は r 個の極値を持つポテンシャルによって r 個の固まりに集められているとする。特に、基底状態では r 個の固有値の固まりが一番密に詰まった状態になっていてそれぞれ 2 つずつのフェルミ面を持つが、そのフェルミ面の間の距離は N に比例している。したがって、ラージ N 極限を考えると 2 つのフェルミ面の間は大きく引き離され、それぞれのフェルミ面がお互いに及ぼす影響は無視できるようになる。さらに、ポテンシャルの方もラージ N 極限をとりつつ有限の値に収束するようにポテンシャルの係数をうまく調節してやると、最終的に離散化された行列模型の分配関数は 2 つのフェルミ面それぞれの部分に分解され (カイラル分解)

$$Z_{\mathrm{DMM}} \simeq |Z_{\mathrm{Nekrasov}}(a_l; g_s)|^2 \tag{17}$$

という形になる。ここで、$Z_{\mathrm{Nekrasov}}(a_l; g_s)$ は (2) で出てきた Nekrasov の分配関数で、Ω 背景場のパラメーターは今の場合、弦の結合定数 g_s と一致し、真空のモジュライパラメーター a_l は行列模型のポテンシャルの極値によって決定される。さらに、Nekrasov の分配関数で摂動部分からの寄与とした $Z_{\mathrm{pert}}(a_l; g_s)$ が基底状態からの寄与をくくり出してきた部分として

$$Z_{\mathrm{pert}}(a_l; g_s) = e^{\sum_{l\neq n}\gamma(a_l - a_n)} = \prod_{l\neq n}\Gamma_2^{-1}(a_l - a_n|g_s) \tag{18}$$

と 2 重ガンマ関数を用いて表すことができる。この摂動部分のプリポテンシャルへの寄与を見るには (16) の漸近展開を使えばよく、特に $1/g_s^2$ に比例した初項の部分が通常のゲージ理論に対する寄与である。g_s の展開の残りの部分は graviphton からの寄与と考えられるのは Nekrasov の時と同様であり、このように graviphoton 背景場を含むような超対称ゲージ理論の摂動計算が、拡張されたガンマ関数の漸近展開の形にまとまるという事実は非常に興味深い。

5　位相的 M 理論、非臨界 M 理論

この章では今までの議論をさらに拡張していく事を考える。この拡張は基本的には 4 次元のゲージ理論のプリポテンシャルの計算を 5 次元のゲージ理論を S^1 のコンパクト化したものにする事であるが、この拡張の先に見え隠れするのは位相的 M 理論や非臨界 M 理論と呼ぶべき非摂動効果まですべて取り入れた位相的弦理論や非臨界弦理論である。

この拡張のためには弦理論や行列模型における T 双対的な考え方を用いる。ここでいう T 双対とは離散化された行列模型に表れる Vandermonde 行列式の部分に対して行うが、元々この Vandermonde 行列式が行列への随伴作用 (随伴表現のスカラーとの交換子) に対する積分測度ととして現れた事を思い出すと、T 双対的に 1 次元理論を拡大するという事はこの随伴作用を共変微分へ置き換える事によって得られる。今、拡大された 1 次元方向は S^1 にコンパクト化されていると思っているので微分演算子の作用から無限個の Kaluza-Klein モードの影響があり、S^1 方向の半径を β とすると、Vandermonde 行列式の部分は

$$\prod_{i<j}\prod_{n=-\infty}^{\infty}(i\frac{n}{\beta}+\lambda_i-\lambda_j)^2 \simeq \prod_{i<j}\left(\frac{1}{\beta}\sinh\beta(\lambda_i-\lambda_j)\right)^2 \tag{19}$$

という風に三角関数的に拡張される事がわかる。(行列をユニタリー化した時の積分測度と同じである。) 離散化された行列模型ではこの測度を含めて離散化してやればいいので、考えたいモデルは

$$Z_{q-\mathrm{DMM}} = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_N}\prod_{i<j}\left(\frac{1}{\beta}\sinh\beta(g_s n_i - g_s n_j)\right)^2 \exp\left[-\frac{g_s\mu A}{2}\sum_i n_i^2\right] \tag{20}$$

という事になる。このモデルは Vandermonde 行列式の部分を量子群等でよく現れる q 整数に置き換えた物とも見なす事ができ、q 変形された 2 次元 Yang-Mills 理論とも呼ばれる [8]。また、この q 変形された離散行列模型の連続極限 (和を積分に置き換える) も考えられるが、その分配関数は S^3 上の (ボソニックな)Chern-Simons 理論の分配関数と等価である事も知られている [9]。

さて、このモデルに対しても前章までの離散化された行列模型と全く同様に解析できるが、大きく異なるのは差分方程式 (13) の部分で、今度は三角関数的に拡張された、もしくは q 変形された

$$\Delta_{g_s}\Delta_{-g_s}\tilde{\gamma}(x|g_s;\beta) = \log\sinh\beta x \tag{21}$$

という式を解かなくてはならない。この解も拡張されたガンマ関数を用いて表す事ができるが、今度必要になるのは 3 重ガンマ関数を張り合わせた 3 重サイン関数と呼ばれる物である。ここでいう張り合わせとは、通常のサイン関数を $\sin\pi x = \pi\Gamma^{-1}(x)\Gamma^{-1}(1-x)$ というように通常のガンマ関数とそれを反転させた物の積で表すことができるという事実の拡張という意味である。3 重サイン関数 $S_3(x|g_s;\beta)$ を使うと、上の $\tilde{\gamma}(x|g_s;\beta)$ はその対数で書け、

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(x|g_s;\beta) &= \log S_3(x|g_s;\beta) \\ &= \frac{i\pi}{6}B_{3,3}(x|g_s;\beta) - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t}\frac{e^{-xt}}{4\sinh^2\frac{g_s t}{2}(1-e^{-\frac{i\pi}{\beta}t})}\end{aligned} \tag{22}$$

といった 3 次の Bernoulli 多項式と呼ばれる x の多項式 $B_{3,3}(x|g_s;\beta)$ と積分を用いて表す事ができる。

4 次元の超対称ゲージ理論の摂動部分のプリポテンシャルが 2 重ガンマ関数で表されたのと同様に、今度は 3 重サイン関数を用いると S^1 にコンパクト化された 5 次元の $\mathcal{N}$=1 超対称ゲージ理論のプリポテンシャルの摂動部分を表す事ができる。実際、(22) の様に 3 次の多項式が現れるのが 5 次元のゲージ理論のプリポテンシャルの特徴であり、積分部分の留数計算から、S^1 にコンパクト化した影響による $e^{-2\beta nx}$(n は整数) に比例した項も現れる。さらに、関数 $\tilde{\gamma}(x|g_s;\beta)$ は前の場合と同様に g_s に関して種数展開に相当する漸近展開を持つ事を示す事ができる。この展開は今度は A モデルと呼ばれる位相的弦理論の振幅と関係しており、$\gamma(x|g_s)$ が B モデルの振幅を表していた事を思い出すと、期待通り T 双対の関係になっている事がわかる。

5 次元の超対称ゲージ理論との関係や、通常の位相的弦理論の振幅との関係を見るのであればここまでの議論で十分であるが、3 重サイン関数の性質をより詳しく調べるとさらに興味深い事がわかる。それは、(22) の積分部分の留数である。もっと注意深くこの留数を見てやれば $e^{-\frac{2\pi ix}{g_s}n}$ に比例した項を非常に非自明な形で含んでいる事がわかる。この $e^{-\frac{2\pi ix}{g_s}n}$ に比例した項は差分をとればゼロになってしまうので、実をいうと元々考えたかった差分方程式 (21) には何の影響もない部分である。しかし、3 重サイン関数の中では $e^{-\frac{2\pi ix}{g_s}n}$ に比例した項が自然な形で現れ、何よりも位相的弦理論の振幅と見なした時、弦理論の非摂動効果を表すと考えられる非常に重要な項である。今のところ位相的弦理論の非摂動効果が最終的に 3 重サイン関数といったような形にまとまるというだけの十分な証拠は得られていないが、S^1 の半径である β と弦理論の結合常数である g_s が対等な形で含まれているので、双対性の観点から位相的弦理論の非摂動効果をすべて与えるような位相的 M 理論の存在を強く示唆しているように思える。

さらに、前章で指摘したように 4 次元の N=2 超対称ゲージ理論の摂動部分に現れた $\gamma(x|g_s)$ という関数もしくは 2 重ガンマ関数は c=1 の非臨界弦の振幅とも非常に関係が深い。c=1 の非臨界弦の標的空間は 2 次元であるが、上で行ったような高次元への持ち上げによって、何か 3 次元を標的空間として持つ非臨界 M 理論というべき物 [10, 11] もガンマ関数の自然な拡張という点で q 変形された 2 次元 Yang-Mills 理論が記述しているようにも思える。

最後に、BFSS の M(atrix) 理論 [12] や IKKT による IIB 型超弦理論の行列模型を用いた非摂動論的定式化 [13] との関連についても指摘しておきたい。通常の BFFS や IKKT の行列模型は 11 次元の M 理論や 10 次元の臨界超弦理論を表す物と考えているが、行列の数を減らして 7 次元の位相的 M 理論や 6 次元の位相的弦理論を表すモデルを考えてみよう。つまり、分配関数として 5 つの $k\times k$ 行列に対する行列量子力学

$$\tilde{Z}_k = \int \mathcal{D}Y\mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{g^2}\int_0^\beta dt\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}D_tY^iD_tY_i+\frac{1}{4}[Y^i,Y^j]^2+\cdots\right)} \qquad (i,j=1,\ldots,5) \tag{23}$$

や、6 つの $k\times k$ 行列に対する行列模型

$$Z_k = \int \mathcal{D}X\mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}[X_\mu,X_\nu]^2+\frac{1}{2}\bar{\Psi}\Gamma^\mu[X_\mu,\Psi]\right)} \qquad (\mu,\nu=1,\ldots,6) \tag{24}$$

を考えるのである。今、理論が位相的である事からこれらの分配関数は厳密に評価する事ができて、実は離散化された行列模型の分配関数 Z_{DMM} やそれを q 変形した物 $Z_{q\mathrm{DMM}}$ のラージ N 極限はこれらの分配関数の生成母関数になっているのである。すなわち、ラージ N 極限でカイラル分解がおこるとすると、おおよそ

$$Z_{q-\mathrm{DMM}} \simeq |\sum_k \tilde{Z}_k q^k|^2 \tag{25}$$

$$Z_{\mathrm{DMM}} \simeq |\sum_k Z_k q^k|^2 \tag{26}$$

という関係にある。(実際には hypermultiplet に相当する行列を導入して固有値が局在する点をうまく与えてやる必要がある。) 上で述べてきたようにこれらの分配関数は A モデルや B モデルの位相的弦理論の (ある Calabi-Yau 多様体上での) 振幅を与えているので、(23) や (24) 等の行列模型から閉じた弦の振幅がちゃんと得られている事になる。(しかも、最初に行列模型を考えていた標的時空と閉じた位相的弦の標的時空はトポロジーも含め大きく変化している。)

このように、時空が 7 次元や 6 次元の位相的理論、もしくは 3 次元や 2 次元の非臨界理論はその理論がもつ可積分構造のため、ラージ N 転移、開いた弦と閉じた弦の双対性、BPS 状態の数え上げ、非摂動効果をすべて含んだ正確な双対性など場の理論・弦理論双方にわたる様々な問題を厳密に示す非常に良いモデルになっている様に思われる。超弦理論全体からいい性質の部分をうまく切り出してきたこのようなモデルに対する理解が深まると、元々の理論全体に対しても本質を理解する上での重要な結果が多く得られるものと期待される。

参考文献

[1] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, hep-th/0206161.

[2] R. Gopakumar and C. Vafa, *Topological gravity as large N topological gauge theory*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 413–442 [hep-th/9802016].

[3] T. Matsuo, S. Matsuura and K. Ohta, *Large N limit of 2D Yang-Mills theory and instanton counting*, hep-th/0406191.

[4] S. Matsuura and K. Ohta, *Localization on D-brane and gauge theory / Matrix model*, hep-th/0504176.

[5] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, hep-th/0306238.

[6] A. A. Migdal, *Recursion equations in gauge field theories*, *Sov. Phys. JETP* **42** (1975) 413.

[7] M. Blau and G. Thompson, *Lectures on 2-d gauge theories: Topological aspects and path integral techniques*, hep-th/9310144.

[8] M. Aganagic, H. Ooguri, N. Saulina and C. Vafa, *Black holes, q-deformed 2d Yang-Mills, and non-perturbative topological strings*, hep-th/0411280.

[9] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, *Matrix model as a mirror of Chern-Simons theory*, *JHEP* **02** (2004) 010 [hep-th/0211098].

[10] S. Y. Alexandrov and I. K. Kostov, *Time-dependent backgrounds of 2D string theory: Non-perturbative effects*, *JHEP* **02** (2005) 023 [hep-th/0412223].

[11] P. Horava and C. A. Keeler, *Noncritical M-theory in 2+1 dimensions as a nonrelativistic Fermi liquid*, `hep-th/0508024`.

[12] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, *M theory as a matrix model: A conjecture*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112–5128 [`hep-th/9610043`].

[13] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *A large-N reduced model as superstring*, *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 467–491 [`hep-th/9612115`].