

# 弦の場の理論における解析解についての最近の進展

高エネルギー加速器研究機構 岸本 功

E-mail: ikishimo@post.kek.jp

昨年 (2005 年) 11 月、M. Schnabl が Witten の cubic な開弦の場の理論の解析解を構成し、potential height が D25-brane の tension に等しいという Sen の予想を満たしていることを示した。これは従来レベル切断近似を用いて数値的に求められていたタキオン真空解に対応するものだと思われる。ここではこの解析解 [1] に関する最近の研究をレビューする。

## 1 Introduction

26 次元のボゾニックな弦理論において、Witten の cubic な開弦の場の理論を考える。この作用は  $S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \langle \Psi, Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$  で与えられる。1999 年頃からこの弦の場の理論を用いて Sen の予想を「証明」しようとするさまざまな努力がなされてきた。実際、「レベル切断近似」を用いて数値的には確かめられてきた。(文献 [2] およびその reference 参照。) 解析解の構成に関してもいろいろな研究がなされてきたが、その中で特に M. Schnabl が Sen の予想を解析的に証明した、とする論文 [1] を提出した。ここでは主にこの解析解に関する研究のレビューをする。

ここで考える Sen の予想は (I) “非摂動的真空が存在してそこでは D25 プレーンが消滅” しており、(II) “その非摂動的真空では開弦の励起がない。” というものであり、Witten の cubic な開弦の場の理論の枠組みでは、(I) “運動方程式  $Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$  の解  $\Psi_C$  があって  $S[\Psi_C]/V_{26} = T_{25}$ ” を示し ( $V_{26}$  は時空の体積、 $T_{25}$  は D25-brane tension。)、(II) “この  $\Psi_C$  のまわりの BRST operator  $Q'_B$  ( $Q'_B A = Q_B A + \Psi_C * A - (-1)^{\text{gh}(A)} A * \Psi_C$  で与えられる) の cohomology が自明” であることを確かめればよい。(I) は Schnabl[1]、(II) は Ellwood-Schnabl[3] により「証明」された。正確にはどのような意味で (I)(II) が解けたのか以下の節で見ていこう。

## 2 準備

$\tilde{z}$ -座標系 開弦の計算をするとき上半面上 (UHP, 座標  $z$ ) の CFT を考えることが多いが、ここではスター積と相性のよい半無限シリンダー ( $C_\pi$ , 座標  $\tilde{z}$ ) を考える。(Fig. 1) 互いに  $\tilde{z} = \arctan z$  という map で結び付けられて、conformal weight  $h$  のプライマリ場  $\phi$  は  $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = U_{\tan} \phi(z) U_{\tan}^{-1} = (\cos \tilde{z})^{-2h} \phi(\tan \tilde{z})$  あるいはモードで見ると  $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \sum_n \tilde{\phi}_n \tilde{z}^{-n-h}$ ;  $\phi(z) = \sum_n \phi_n z^{-n-h}$ ;  $\tilde{\phi}_n = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} (\arctan z)^{n+h-1} (1+z^2)^{h-1} \phi(z)$  のように関連づけられる。以下の計算では energy momentum tensor  $T$  および ghost  $b$  のモード:  $\mathcal{L}_0 \equiv \tilde{\mathcal{L}}_0 = L_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2-1} L_{2k}$ ,  $K_1 \equiv \tilde{L}_{-1} = L_1 + L_{-1}$ ;  $\mathcal{B}_0 \equiv \tilde{b}_0 = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2-1} b_{2k}$ ,  $B_1 \equiv \tilde{b}_{-1} = b_1 + b_{-1}$  をよく使う。ここで  $\mathcal{L}_0, K_1$  は  $\tilde{z}$ -座標系ではそれぞれ定数倍、定数シフトを引き起こす。また potential height の計算で使う相関関数は  $\langle c(\tilde{x})c(\tilde{y})c(\tilde{z}) \rangle_{C_\pi} = \langle \tilde{c}(\tilde{x})\tilde{c}(\tilde{y})\tilde{c}(\tilde{z}) \rangle_{\text{UHP}} = \sin(\tilde{x} - \tilde{y}) \sin(\tilde{x} - \tilde{z}) \sin(\tilde{y} - \tilde{z}) V_{26}$  である。

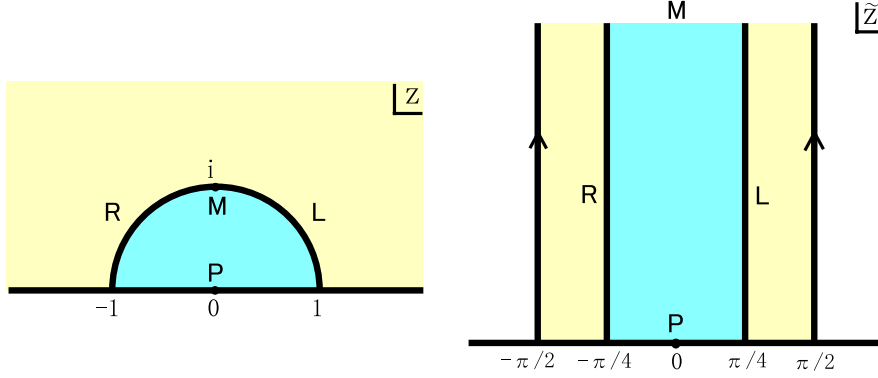


Figure 1: 左図 (UHP) の単位半円は  $\arctan$  により右図 (1 周  $\pi$  の半無限シリンダー  $C_\pi$ ,  $\text{Re}\tilde{z} = \pi/2$  と  $\text{Re}\tilde{z} = -\pi/2$  は同一視。) の幅  $\pi/2$  の領域に写される。

**wedge state** wedge state  $|r\rangle$  は  $f_r(z) = h^{-1}(h(z)\frac{2}{r}) = \tan(\frac{2}{r}\arctan z)$ ;  $h(z) = \frac{1+iz}{1-iz}$  を用いて  $\langle r|\phi\rangle = \langle f_r[\phi(0)]\rangle_{\text{UHP}}$ ,  $\forall\phi(z)$  定義され、Virasoro operator を用いて  $\langle r| = \langle 0|U_r$ ;  $U_r \equiv (\frac{2}{r})^{\mathcal{L}_0}$  と書ける。特に  $r = 1$  のとき identity state  $\langle \mathcal{I}|$ ,  $r = 2$  のとき conformal vacuum  $\langle 0|$ ,  $r = \infty$  のとき sliver state  $\langle \infty|$  になる。ここで、 $U_r = (\frac{2}{r})^{\mathcal{L}_0} = (\frac{2}{r})^{L_0} e^{-\frac{r^2-4}{3r^2}L_2 + \frac{r^4-16}{30r^4}L_4 + \dots}$  に注意すると  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2}f_r(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2}\tan(\frac{2}{r}\arctan z) = \arctan z$  より sliver state は  $\langle \infty| = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle 0|U_r = \langle 0|U_{\tan}^{-1}$  のように表現できる。(wedge state の ket  $|r\rangle$  はこれらの BPZ 共役である。)

**内積とスター積** 作用の定義に現れる BPZ 内積は通常  $\langle \phi_1, \phi_2\rangle = \langle I \circ \phi_1(0)\phi_2(0)\rangle_{\text{UHP}}$ ;  $I(z) \equiv -1/z$  であらわされる。 $\tilde{z}$ -座標系でみると  $\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2\rangle = \langle I \circ \phi_1(0)\phi_2(0)\rangle_{C_\pi} = \langle \phi_1(\pm\pi/2)\phi_2(0)\rangle_{C_\pi}$ , となる。相互作用をあらわすスター積は  $\langle \chi, \phi_1 * \phi_2\rangle = \langle f_{(1)} \circ \chi(0) f_{(2)} \circ \phi_1(0) f_{(3)} \circ \phi_2(0)\rangle_{\text{UHP}}$ ,  $\forall\chi(z)$ ;  $f_{(n)}(z) = h^{-1}(e^{(2-n)\frac{2\pi}{3}i}h(z)\frac{2}{3}) = \tan(\frac{(2-n)\pi}{3} + \frac{2}{3}\arctan z)$  によって定義されているが、これを  $\tilde{z}$ -座標系でみると  $\langle \tilde{\chi}, \tilde{\phi}_1 * \tilde{\phi}_2\rangle = \langle s \circ \chi(\pm 3\pi/4) s \circ \phi_1(\pi/4) s \circ \phi_2(-\pi/4)\rangle_{C_\pi}$ ;  $s(\tilde{z}) = \frac{2}{3}\tilde{z}$  となることより、 $\tilde{\phi}_1(0)|0\rangle * \tilde{\phi}_2(0)|0\rangle = U_3^\dagger U_3 \tilde{\phi}_1(\pi/4)\tilde{\phi}_2(-\pi/4)|0\rangle$  という公式が得られる。これは一般化できて

$$\begin{aligned} & U_r^\dagger U_r \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1) \cdots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n)|0\rangle * U_s^\dagger U_s \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_1) \cdots \tilde{\psi}_m(\tilde{y}_m)|0\rangle \\ &= U_{r+s-1}^\dagger U_{r+s-1} \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1 + \frac{\pi}{4}(s-1)) \cdots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n + \frac{\pi}{4}(s-1)) \\ & \quad \times \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_1 - \frac{\pi}{4}(r-1)) \cdots \tilde{\psi}_m(\tilde{y}_m - \frac{\pi}{4}(r-1))|0\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

となり、Witten のスター積の結合性を満たすことがわかる。(Fig. 2) 特に挿入された場がないときこれは wedge state の間の可換代数:  $|r\rangle * |s\rangle = |r+s-1\rangle$  に帰着する。

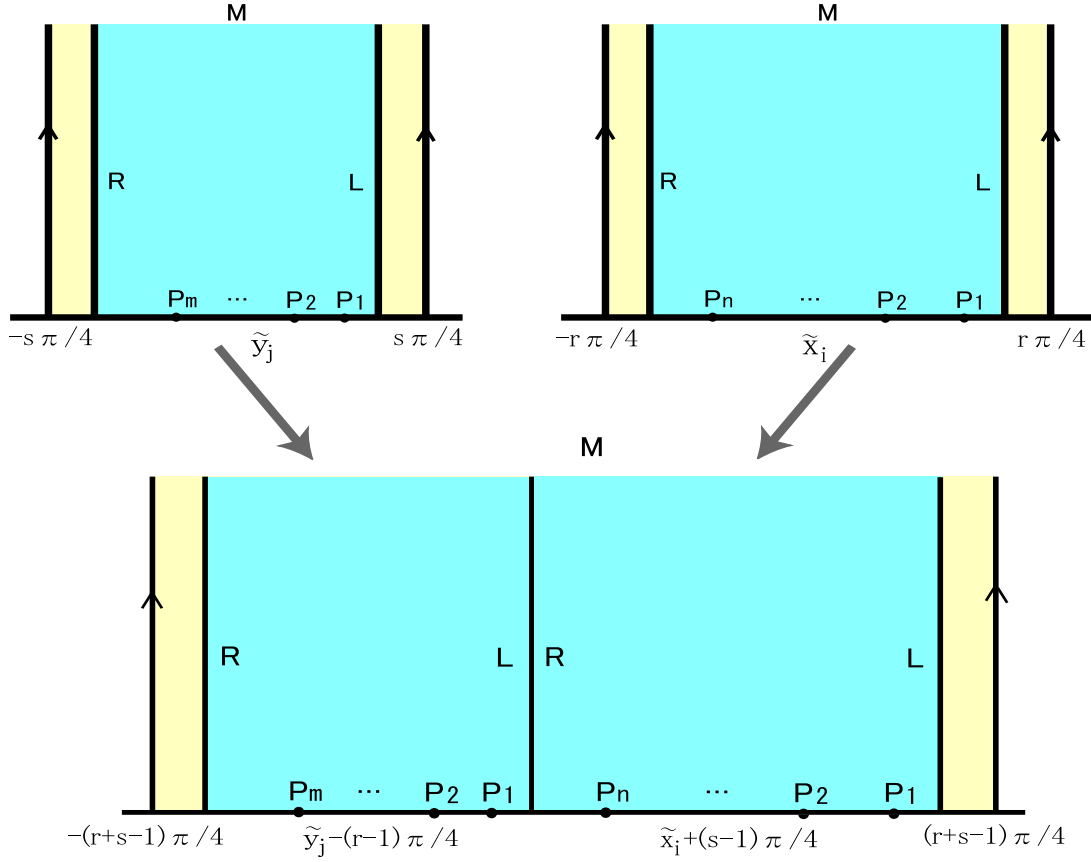


Figure 2: 右上図 ( $C_{r\pi/2}$ ) と左上図 ( $C_{s\pi/2}$ ) のそれぞれの両側 (全幅  $\pi/2$ ) の領域を切り取ってそれぞれの  $R$  と  $L$  で貼り合わせて  $C_{(r+s-1)\pi/2}$  内の領域に写したのが下図。

部分代数 スター積の公式 (1) および  $\{Q_B, \tilde{c}(\tilde{z})\} = \tilde{c}\tilde{\partial}\tilde{c}(\tilde{z}), \{Q_B, \hat{B}\} = \hat{L}$  ( $\hat{L} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^\dagger, \hat{B} \equiv \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger$ ) に注意すると

$$\hat{L}^n \tilde{c}_{p_1} \tilde{c}_{p_2} \cdots \tilde{c}_{p_N} |0\rangle, \hat{B} \hat{L}^m \tilde{c}_{q_1} \tilde{c}_{q_2} \cdots \tilde{c}_{q_M} |0\rangle \text{ の線形結合はスター積と } Q_B \text{ の作用で閉じる。}$$

実際、(1) から

$$\begin{aligned} & \hat{L}^n \tilde{c}_{p_1} \tilde{c}_{p_2} \cdots \tilde{c}_{p_N} |0\rangle * \hat{L}^m \tilde{c}_{q_1} \tilde{c}_{q_2} \cdots \tilde{c}_{q_M} |0\rangle \\ &= \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{k_1 \leq p_1} \cdots \sum_{k_N \leq p_N} \sum_{l_1 \leq q_1} \cdots \sum_{l_M \leq q_M} D_{n,m, \sum_{i=1}^M (q_i - l_i), \sum_{i=1}^N (p_i - k_i)}^L \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sum_{i=1}^N(p_i-k_i)+\sum_{i=1}^M(q_i-l_i)} (-1)^{\sum_{i=1}^M(q_i-l_i)} \binom{1-k_1}{1-p_1} \cdots \binom{1-k_N}{1-p_N} \binom{1-l_1}{1-q_1} \cdots \binom{1-l_M}{1-q_M} \\
& \quad \times \hat{\mathcal{L}}^L \tilde{c}_{k_1} \cdots \tilde{c}_{k_N} \tilde{c}_{l_1} \cdots \tilde{c}_{l_M} |0\rangle, \\
D_{n,m,k,l}^N & \equiv \frac{n!m!}{N!} (-2)^{n+m-N} \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \binom{k}{n-j} \binom{N-j+l}{m} \quad (3)
\end{aligned}$$

となり、 $\hat{B}$  が入った式は

$$\begin{aligned}
(\hat{B}\phi_1) * \phi_2 &= \hat{B}(\phi_1 * \phi_2) + (-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \frac{\pi}{2} \phi_1 * B_1 \phi_2, \\
\phi_1 * (\hat{B}\phi_2) &= (-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \hat{B}(\phi_1 * \phi_2) - (-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \frac{\pi}{2} (B_1 \phi_1) * \phi_2, \\
(\hat{B}\phi_1) * (\hat{B}\phi_2) &= -(-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \frac{\pi}{2} \hat{B} B_1(\phi_1 * \phi_2) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (B_1 \phi_1) * (B_1 \phi_2)
\end{aligned}$$

および  $\{B_1, \tilde{c}_p\} = \delta_{p,1}$  を使うとよい。

### 3 解の ansatz

前節の部分代数に着目すると、運動方程式  $Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$  の解の ansatz として

$$\Psi = \sum_{n \geq 0; p \leq 1} f_{n,p} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_p |0\rangle + \sum_{n \geq 0; p, q \leq 1} f_{n,p,q} \hat{B} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle \quad (4)$$

を採ると、この形の解が存在する可能性がある。さらに解を構成するための補助条件として、 $\tilde{z}$ -座標系における Siegel ゲージ条件： $B_0 \Psi = 0$  ( $\leftrightarrow 2f_{n,p,0} + (n+1)f_{n+1,p} = 0$ ) および twist 対称性： $(-1)^{L_0+1} \Psi = \Psi$  ( $\leftrightarrow f_{n,p} = 0, (p: \text{even}), f_{n,p,q} = 0, (p+q: \text{even})$ ) も課しておく。このとき  $Q_B \Psi + \Psi * \Psi$  を計算して零になるように各係数  $f_{n,p} (p: \text{odd}), f_{n,p,q} (p+q: \text{odd})$  を決めればよい。簡単のため、ゲージ条件を自明に満たす  $f_{n,p} = \frac{(-1)^n \pi^{-p}}{2^{n-2p+1} n!} f_{n-p+1}, f_{n,p,q} = \frac{(-1)^{n+q} \pi^{-p-q}}{2^{n-2(p+q)+3} n!} f_{n-p-q+2}$  という形を仮定すると

$$\begin{aligned}
& Q_B \Psi + \Psi * \Psi \\
&= \sum_{\substack{N \geq 0; p, q \leq 1 \\ p+q: \text{odd}}} \frac{(-1)^N \pi^{-p-q}}{N! 2^{N+2-2(p+q)}} \left[ (p-q - (-1)^q N) f_{N+1-p-q} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{k=0 \\ k+l: \text{odd}}}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^l \sum_{m=0}^{N-j+k} \binom{N}{j} \binom{l}{n} \binom{N-j+k}{m} (-1)^l f_{n+1+j-p-k} f_{m+1-q-l} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k=0 \\ k+l:\text{even}}}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{N-j+k+l} \binom{N}{j} \binom{N-j+k+l}{n} (-1)^{l+q} f_n f_{j+2-k-l-p-q} \left[ \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle \right. \\
& + \sum_{\substack{N \geq 0; p, q, r \leq 1 \\ p+q+r:\text{odd}}} \frac{(-1)^N \pi^{-p-q-r}}{N! 2^{N+4-2(p+q+r)}} \left[ -(-1)^r 2(p-q) f_{N+2-p-q-r} \right. \\
& + \sum_{k_1=0}^{1-p} \sum_{k_2=0}^{1-q} \sum_{l=0}^{1-r} \binom{1-p}{k_1} \binom{1-q}{k_2} \binom{1-r}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{k_2+l} \sum_{m=0}^{N-j+k_1} \binom{N}{j} \binom{k_2+l}{n} \binom{N-j+k_1}{m} \\
& \left. \left. \times ((-1)^{q+l} - (-1)^{r+k_2}) f_{n+1+j-p-k_1} f_{m+2-q-r-k_2-l} \right] \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q \tilde{c}_r |0\rangle \quad (5)
\end{aligned}$$

となり、特に  $\hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_1 \tilde{c}_0 |0\rangle$  の係数が零という式は

$$-\frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2}\right)^N \left( (N-1) \frac{f_N}{N!} + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{f_n f_m}{n! m! (N-n-m)!} \right) = 0 \quad (6)$$

となる。この(6) ( $N = 0, 1, \dots$ ) の連立方程式を  $f_n$  の母関数:  $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n$  の微分方程式に読み替えると  $(x \frac{d}{dx} - 1) f(x) = -e^x f(x)^2$  となり、これを解くと積分定数  $\lambda$  を含む解:  $f(x) = \frac{\lambda x}{\lambda e^x - 1}$  が得られる。したがって、運動方程式の解 (の候補) として

$$\begin{aligned}
\Psi_\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \geq -1, p:\text{odd}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} f_{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p, q \geq -1, p+q:\text{odd}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2(p+q)+3}} f_{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$f_n = \begin{cases} B_n & (\lambda = 1) \\ -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,0}\lambda & (\lambda \neq 1) \end{cases} \quad (8)$$

( $B_n$ :ベルヌイ数、 $\text{Li}_n(z)$ :多重対数関数) が得られた。これが本当に  $Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$  の解になっていることを示すには(8)のようにあらわされた  $f_n$  により(5)の  $\hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle, \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q \tilde{c}_r |0\rangle$  の係数が全て零になることを証明する必要がある。(少なくとも  $\mathcal{L}_0$ -レベルの低い数百項について実際に零になっていることは *Mathematica* を用いて確かめられた。) 次節では(7)を別の表示に書き換えて、これが実際に運動方程式の解になっていることを確かめる。

## 4 運動方程式の解

wedge state  $|r\rangle$  から作った ghost 数 1 の

$$\psi_r \equiv \frac{2}{\pi^2} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[ \hat{\mathcal{B}} \tilde{c} \left(-\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c} \left(\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{\pi}{2} \left( \tilde{c} \left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c} \left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle = \frac{2}{\pi^2} c_1 |0\rangle * \hat{\mathcal{B}} |r\rangle * c_1 |0\rangle$$

$$= \sum_{\substack{n \geq 0; p \geq -1 \\ p: \text{odd}}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} r^{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle + \sum_{\substack{n \geq 0; p, q \geq -1 \\ p+q: \text{odd}}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2p+2q+3}} r^{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle \quad (9)$$

を用いると、(7)は

$$\Psi_\lambda = \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r |_{r=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} \partial_r^k \psi_r |_{r=0} \quad (10)$$

のようにあらわされる。これを  $\lambda$  の幕で形式的に展開すると

$$\Psi_\lambda = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{n \partial_r} \partial_r \psi_r |_{r=0} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r |_{r=n} \quad (11)$$

となり、各項は  $\Lambda_0 \equiv \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{B}} c_1 |0\rangle + \frac{1}{2} |0\rangle$  を用いて

$$-\partial_r \psi_r |_{r=0} = Q_B \Lambda_0, \quad -\partial_r \psi_r |_{r=n} = (Q_B \Lambda_0) * (\Lambda_0)^n \quad (12)$$

となるので、 $Q_B$  の冪零性およびスター積に関する分配則より運動方程式  $Q_B \Psi_\lambda + \Psi_\lambda * \Psi_\lambda = 0$  が  $\lambda$  の各幕毎に成り立つことがわかる。さらに

$$\Psi_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r |_{r=n} = \lambda (Q_B \Lambda_0) \frac{1}{1 - \lambda \Lambda_0} = e^{-\Lambda} * Q_B e^\Lambda, \quad (13)$$

$$\Lambda = -\log(1 - \lambda \Lambda_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} (\Lambda_0)^n. \quad (14)$$

のように pure gauge の形に書き換えることもできる。[4] しかし

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 U_N | \Lambda \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-\lambda)} + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \log(1-\lambda), \quad (15)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 U_N | e^\Lambda \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 - \frac{1}{\lambda} \log(1-\lambda), \quad (16)$$

のように  $\lambda = 1$  ではゲージパラメータ  $\Lambda$  あるいは  $e^\Lambda$  が特異な振舞いをするので、別に考える必要がある。  $\lambda = 1$  のときは  $\partial_r^n \psi_r |_{r=\infty} = \delta_{n,0} \psi_\infty$  および Euler-Maclaurin formula

$$\sum_{k=a}^{b-1} f'(k) = \sum_{n=0}^N \frac{B_n}{n!} (f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)) - \frac{(-1)^N}{N!} \int_0^1 dt B_N(t) \sum_{k=a}^{b-1} f^{(N+1)}(k+t), \quad (17)$$

( $B_n(t) \equiv \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k t^{n-k}$ :ベルヌイ多項式) を用いると (10) は

$$\Psi_{\lambda=1} = \psi_\infty - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\partial_r^n \psi_r|_{r=\infty} - \partial_r^n \psi_r|_{r=0}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \psi_N - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n} \right) \quad (18)$$

のように展開できる。(ただし (17) で  $f(t) = \psi_t, a = 0, b = \infty, N \rightarrow \infty$  とし剰余項を無視できるとした。) 形式的には右辺の第 1 項は消える :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = \frac{2}{\pi^2} c_1 |0\rangle * \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \left( \mathcal{B}_0 + \frac{N-2}{N} \mathcal{B}_0^\dagger \right) |N\rangle + \frac{2}{N} \mathcal{B}_0^\dagger |N\rangle \right] * c_1 |0\rangle = 0 \quad (19)$$

ので  $Q_B \Psi_{\lambda=1} + \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} = 0$  も成り立つ。ところが実は  $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N$  という部分は potential height の計算および解のまわりの cohomology の議論においては無視できない。(18) の右辺の表示で最初に  $N$  を有限にして計算し最後に  $N \rightarrow \infty$  の極限をとるという「正則化」を定めたとみなす。

## 5 Potential height

$S[\Psi_\lambda]/V_{26} = -\frac{1}{g^2 V_{26}} \left[ \frac{1}{2} \langle \Psi_\lambda, Q_B \Psi_\lambda \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi_\lambda, \Psi_\lambda * \Psi_\lambda \rangle \right]$  を  $\psi_n$  を用いた解の表示 (11)(18) で評価する。基本となる量は

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle / V_{26} &= \frac{1}{\pi^2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi(m-n)}{m+n+2} \right) \right) \left( -1 + \frac{m+n+2}{\pi} \sin \left( \frac{2\pi}{m+n+2} \right) \right) \\ &+ 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{m+n+2} \right) \left[ -\frac{m+n+1}{\pi^2} + \frac{mn}{\pi^2} \cos \left( \frac{\pi(m-n)}{m+n+2} \right) + \frac{(m+n+2)(m-n)}{2\pi^3} \sin \left( \frac{\pi(m-n)}{m+n+2} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m * \psi_k \rangle / V_{26} &= \frac{(n+m+k+3)^2}{\pi^3} \sin^2 \left( \frac{\pi}{n+m+k+3} \right) \\ &\times \left[ \sin \left( \frac{2\pi(n+1)}{n+m+k+3} \right) + \sin \left( \frac{2\pi(m+1)}{n+m+k+3} \right) + \sin \left( \frac{2\pi(k+1)}{n+m+k+3} \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

であり、これらを適当に微分して和を計算すればよい。特に

$$\sum_{m=0}^n \langle \partial_r \psi_r|_{r=m}, Q_B \partial_s \psi_s|_{s=n-m} \rangle = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} \langle \partial_r \psi_r|_{r=m}, \partial_s \psi_s|_{s=k} * \partial_t \psi_t|_{t=n-m-k} \rangle = 0, \quad (23)$$

が成り立つので  $S[\Psi_\lambda]/V_{26}$  は  $|\lambda| < 1$  のとき零になる。これは (13) より  $\Psi_\lambda$  が pure gauge 解とみなせることと合っている。 $\lambda = 1$  のとき (18) の右辺で極限をとる前の式を  $S[\Psi_{\lambda=1}]$  に代入すると

$$\sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} F_{m,n} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n F_{m,n-m} + \left( \sum_{n=0}^N \sum_{m=N-n+1}^{N_1} + \sum_{n=N+1}^{N_2} \sum_{m=0}^{N_1} \right) F_{m,n}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} F_{n,m,k} &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} F_{m,k,n-m-k} + \left( \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^{N-k} \sum_{n=N-k-m+1}^N + \sum_{k=1}^N \sum_{m=N-k+1}^N \sum_{n=0}^N \right) F_{n,m,k} \\
&+ \left( \sum_{n=N+1}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^N + \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=0}^N \sum_{k=N+1}^{N_3} + \sum_{n=0}^N \sum_{m=N+1}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} + \sum_{n=N+1}^{N_1} \sum_{m=N+1}^{N_2} \sum_{k=N+1}^{N_3} \right) F_{n,m,k} \quad (25)
\end{aligned}$$

のそれぞれ右辺第1項に対応する和は(22)(23)より零になる。したがって(20)(21)の $n+m, n+m+k$ が大きいところだけが効くので、求める potential height は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_K(n, m) &\equiv \lim_{n+m \rightarrow \infty} \langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle / V_{26} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi(m-n)}{m+n} \right) \right) + \frac{2mn}{(m+n)^2} \cos \left( \frac{\pi(m-n)}{m+n} \right) + \frac{m-n}{\pi(m+n)} \sin \left( \frac{\pi(m-n)}{m+n} \right), \quad (26) \\
\mathcal{F}_V(n, m, k) &\equiv \lim_{n+m+k \rightarrow \infty} \langle \psi_n, \psi_m * \psi_k \rangle / V_{26} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \sin \left( \frac{2\pi n}{n+m+k} \right) + \sin \left( \frac{2\pi m}{n+m+k} \right) + \sin \left( \frac{2\pi k}{n+m+k} \right) \right] \quad (27)
\end{aligned}$$

を使ってあらわされる。これらは

$$\mathcal{F}_K(ax, ay) = \mathcal{F}_K(x, y), \quad \mathcal{F}_K(x, 0) = \mathcal{F}_K(0, y) = 0, \quad (28)$$

$$\mathcal{F}_V(ax, ay, az) = \mathcal{F}_V(x, y, z), \quad \mathcal{F}_V(x, y, 0) = \mathcal{F}_V(x, 0, z) = \mathcal{F}_V(0, y, z) = 0, \quad (29)$$

を満たす関数である。 $S[\Psi_{\lambda=1}]$ の中の $\langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle$ ,  $\langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle$ の各弦場 $\Psi_\lambda$ を $N_1 = r_1 N, N_2 = r_2 N, (N_3 = r_3 N)$  (ただし $r_1, r_2, (r_3) \geq 1$ )で正則化して $N \rightarrow \infty$ の極限をとって評価しよう。まず2次の項は

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{\lambda=1}^{(N_1)}, Q_B \Psi_{\lambda=1}^{(N_2)} \rangle / V_{26} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \langle \psi_{N_1}, Q_B \psi_{N_2} \rangle / V_{26} - \sum_{m=0}^{N_1} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q_B \psi_{N_2} \rangle / V_{26} - \sum_{n=0}^{N_2} \langle \psi_{N_2}, Q_B \partial_r \psi_r |_{r=n} \rangle / V_{26} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q_B \partial_s \psi_s |_{s=n} \rangle / V_{26} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathcal{F}_K(r_1 N, r_2 N) - \sum_{m=0}^{N_1} \frac{1}{N} \partial_x \mathcal{F}_K(xN, r_2 N) |_{m=xN} - \sum_{n=0}^{N_2} \frac{1}{N} \partial_y \mathcal{F}_K(r_1 N, yN) |_{n=yN} \right. \\
&\quad \left. + \left( \sum_{n=0}^N \frac{1}{N} \sum_{m=N-n+1}^{N_1} \frac{1}{N} + \sum_{n=N+1}^{N_2} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N_1} \frac{1}{N} \right) \partial_x \partial_y \mathcal{F}_K(xN, yN) |_{m=xN, n=yN} \right] \\
&= \mathcal{F}_K(r_1, r_2) - \int_0^{r_1} dx \partial_x \mathcal{F}_K(x, r_2) - \int_0^{r_2} dy \partial_y \mathcal{F}_K(r_1, y) + \int_0^1 dy \int_{1-y}^{r_1} dx \partial_x \partial_y \mathcal{F}_K(x, y)
\end{aligned}$$



$$+ \int_1^{r_2} dy \int_0^{r_1} dx \partial_x \partial_y \mathcal{F}_K(x, y) = - \int_0^1 dt \mathcal{F}_K(1-t, t) = -\frac{3}{\pi^2} \quad (30)$$

と評価でき、3次の項も同様に

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{\lambda=1}^{(N_1)}, \Psi_{\lambda=1}^{(N_2)} * \Psi_{\lambda=1}^{(N_3)} \rangle / V_{26} = 2 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \mathcal{F}_V(1-v-u, u, v) = \frac{3}{\pi^2} \quad (31)$$

となり、共に正則化したときの  $N_i$  の比によらない有限な値が得られる。まとめると

$$\frac{S[\Psi_{\lambda=1}]}{V_{26}} = -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{3}{\pi^2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\pi^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2 g^2} = T_{25} \quad (32)$$

となり、 $\Psi_{\lambda=1}$  における potential height が D25-brane tension に等しいことがわかった。ここで (30) と (31) より、計算途中で (19) にあたる部分は有限な寄与を与えるが、 $\langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle + \langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle = 0$  つまり運動方程式と  $\Psi_{\lambda=1}$  自身の内積は零になっていることに注意する。これは (18) において  $\psi_N$  の係数が正しいことを示している。[4][5]

## 6 Vanishing cohomology

非自明な解  $\Psi_{\lambda=1}$  のまわりで作用を展開すると  $S[\Psi_{\lambda=1} + \Psi'] = S[\Psi']|_{Q_B \rightarrow Q'_B} + S[\Psi_{\lambda=1}]$  の形になり、新しい BRST operator  $Q'_B$  は  $Q'_B B = Q_B B + \Psi_{\lambda=1} * B - (-1)^{\text{gh}(B)} B * \Psi_{\lambda=1}$  で与えられる。このとき、この  $Q'_B$  を作用させて identity state  $\mathcal{I}$  になる弦場  $A$  が存在する：

$$A \equiv \frac{1}{2\mathcal{L}_0} \hat{B} \mathcal{I} = \frac{\pi}{2} B_1^L \int_1^2 dr |r\rangle, \quad Q'_B A = \mathcal{I}. \quad (33)$$

( $B_1^L \equiv \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{\pi} \hat{B}$ ) この  $A$  を用いて形式的に  $\mathcal{I}$  がスター積に関して単位元であることを使うと  $Q'_B B = 0 \Rightarrow B = \mathcal{I} * B = (Q'_B A) * B = Q'_B (A * B) + A * (Q'_B B) = Q'_B (A * B)$  となるので、 $Q'_B$  の cohomology は自明である。[3]

コメント Takahashi-Tanimoto の解 [6] などこれまで知られていた解析解は identity state を用いて構成されたものであり potential height の計算 (正則化) が難しかった。Schnabl の解は identity state を除く wedge state の列を用いているので、potential height の値が有限になりえたと思われる。それでも Schnabl の解での potential height の計算は正則化なしだと条件収束する無限和になる。また、解の周りの新しい BRST operator の cohomology が自明になることの証明は、Takahashi-Tanimoto の解 [6] を用いたもの [7] があり、その結果は全てのゴースト数を含む空間全体では自明ではなかったが、Schnabl の解  $\Psi_{\lambda=1}$  を用いた Ellwood-Schnabl の証明では少なくとも形式的には全てのゴースト数を含む空間全体で自明である。

## 7 まとめと展望

Wittenの開弦の場の理論の枠組みで、Schnablが構成した解析解  $\Psi_{\lambda=1}$ (18) は D25-brane の tension の値を丁度与えていることが示された。さらにその解のまわりの BRST operator の cohomology が自明になっていることが、これをかけて identity state になる弦場  $A$ (33) を具体的に構成することにより示された。したがって Schnabl の解析解  $\Psi_{\lambda=1}$  は Sen の予想における非摂動論的真空をあらわしていると思われる。

関連する今後の課題としては、「解」の最初の表示 (7) における直接証明は？ ghost 数 0 の弦場に対する toy model つまり  $(\mathcal{L}_0 - 1)\Psi + \Psi * \Psi = 0$  (ここで  $[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0^*] = s(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^*)$ ,  $\mathcal{L}_0^*$  は  $\mathcal{L}_0$  の BPZ 共役。) の他の解 ( $s \neq 1$ )[8] に対応する運動方程式の解は？ 従来の Siegel ゲージの数値解や Takahashi-Tanimoto の解との関係は？ Sen の予想の低い次元の D brane に対応する解析解は？ non-BPS brane 上の Berkovits の WZW 型の超弦の場の理論の解析解は？ などがある。

最近の進展により少しずつではあるが弦の場の理論の非摂動論的扱いが可能になりつつある。

謝辞 私にこのようなレビュートークの機会を与えてくださった研究会世話人の方々、および Schnabl の解に関していろいろと議論をしてくださった川野輝彦氏、高橋智彦氏、寺嶋靖治氏、瀬々将吏氏に感謝します。

## References

- [1] M. Schnabl, “Analytic solution for tachyon condensation in open string field theory,” arXiv:hep-th/0511286.
- [2] D. Gaiotto and L. Rastelli, “Experimental string field theory,” JHEP **0308**, 048 (2003) [arXiv:hep-th/0211012].
- [3] I. Ellwood and M. Schnabl, “Proof of vanishing cohomology at the tachyon vacuum,” arXiv:hep-th/0606142.
- [4] Y. Okawa, “Comments on Schnabl’s analytic solution for tachyon condensation in Witten’s open string field theory,” JHEP **0604**, 055 (2006) [arXiv:hep-th/0603159].
- [5] E. Fuchs and M. Kroyter, “On the validity of the solution of string field theory,” JHEP **0605**, 006 (2006) [arXiv:hep-th/0603195].
- [6] T. Takahashi and S. Tanimoto, “Marginal and scalar solutions in cubic open string field theory,” JHEP **0203**, 033 (2002) [arXiv:hep-th/0202133].
- [7] I. Kishimoto and T. Takahashi, “Open string field theory around universal solutions,” Prog. Theor. Phys. **108**, 591 (2002) [arXiv:hep-th/0205275].
- [8] L. Rastelli and B. Zwiebach, “Solving open string field theory with special projectors,” arXiv:hep-th/0606131.