

弦の場の理論における解析解 についての最近の進展

岸本 功



Introduction

26次元のbosonic string theoryにおいて、
Wittenのcubicな開弦の場の理論を考える。作用は

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

で与えられる。

1999年頃からこの弦の場の理論を用いてSenの予想を「証明」しようとする
さまざまな努力がなされてきた。

「レベル切断近似」を用いて数値的には確かめられてきた。

c.f. ,....., Gaiotto-Rastelli “Experimental string field theory”(2002)

昨年(2005年)11月、M. SchnablがSenの予想を解析的に証明した、とする
論文を出した。

➡ ここでは主にこれをレビューする。

弦場:

$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

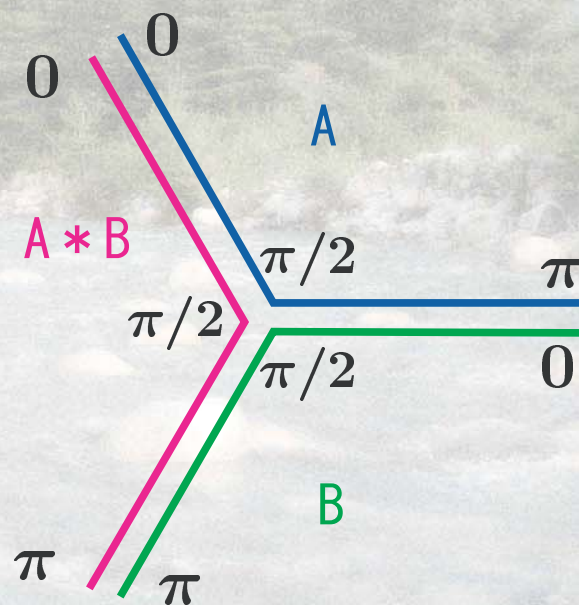
BRST operator:

$$Q_B = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c \right)$$

interaction ~ スター積:

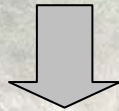
ゲージ変換:

$$\delta_\Lambda \Psi = Q_B \Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$



Senの予想

- 非摂動論的真空が存在してそこではD25ブレンが消えている。
- 非摂動論的真空では開弦の励起がない。
- 非摂動論的真空上のソリトン解が存在しDp(<25)ブレンをあらわす。



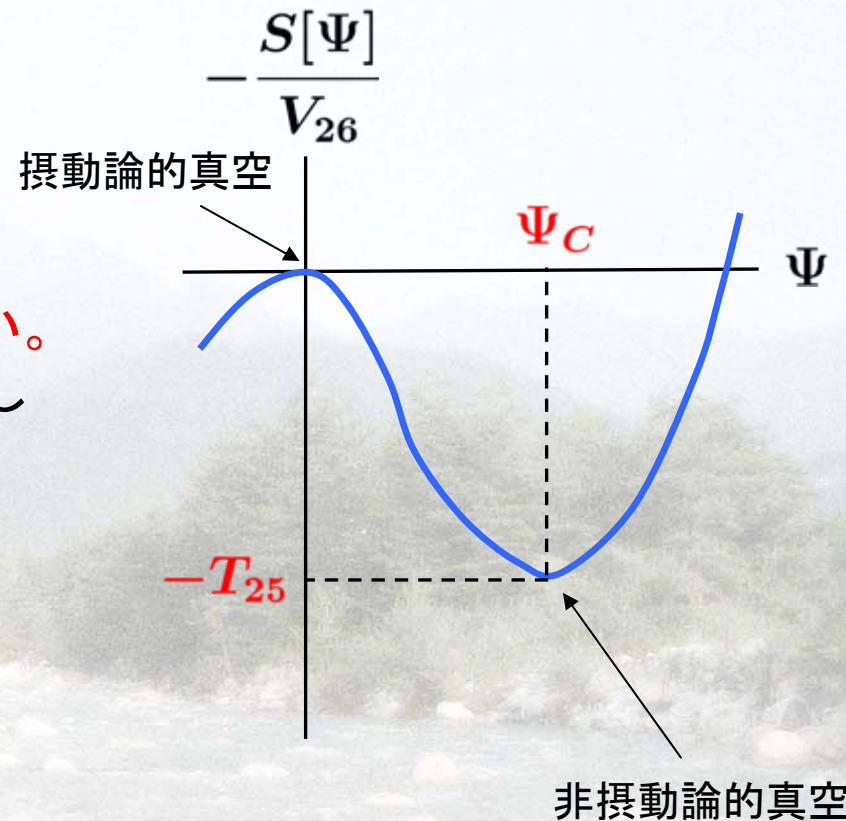
証明

- 運動方程式 $Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$
の解 Ψ_C を構成してそこでの

Potential height=D25brane tension:
[Schnabl(2005)]

$$\frac{S[\Psi_C]}{V_{26}} = \frac{1}{2\pi^2 g^2} = T_{25}$$

- Ψ_C のまわりのBRST operator Q'_B : $Q'_B A = Q_B A + \Psi_C * A - (-1)^{\text{gh}(A)} A * \Psi_C$
のcohomologyが自明になっている。
[Ellwood-Schnabl(2006)]



References

M. Schnabl,

“Analytic solution for tachyon condensation in open string field theory,”
hep-th/0511286.

Y. Okawa,

“Comments on Schnabl's analytic solution for tachyon condensation
in Witten's open string field theory,” JHEP0604, 055 (2006) [hep-th/0603159]

E. Fuchs and M. Kroyter,

“On the validity of the solution of string field theory,”
JHEP0605, 006 (2006) [hep-th/0603195]

L. Rastelli and B. Zwiebach,

“Solving open string field theory with special projectors,” hep-th/0606131.

I. Ellwood and M. Schnabl,

“Proof of vanishing cohomology at the tachyon vacuum,” hep-th/0606142.

(+ 高橋氏、川野氏、寺嶋氏、瀬々氏らとの議論)

Contents

- Introduction
- 準備
 - Wedge state
 - 内積とスター積
 - ghost数ゼロのtoy model
 - 部分代数
- 解のansatz
- 運動方程式の解
- Potential height
- Vanishing cohomology
 - コメント
- まとめと展望

準備

上半面 (UHP, \mathcal{Z}) から半無限シリンダー (C_π, \tilde{z}) への map

$$\tilde{z} = \arctan z$$

のもとで conformal weight h のプライマリ場 ϕ は

$$\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \left(\frac{dz}{d\tilde{z}} \right)^h \phi(z) = (\cos \tilde{z})^{-2h} \phi(\tan \tilde{z}) = U_{\tan} \phi(z) U_{\tan}^{-1},$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \sum_n \tilde{\phi}_n \tilde{z}^{-n-h}, \quad \phi(z) = \sum_n \phi_n z^{-n-h},$$

$$\tilde{\phi}_n = \oint_0 \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+h-1} \tilde{\phi}(\tilde{z}) = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} (\arctan z)^{n+h-1} (1+z^2)^{h-1} \phi(z)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \phi_m \oint_0 \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{z}^{n+h-1} (\cos \tilde{z})^{-2h} (\tan \tilde{z})^{-m-h} = \sum_{m=n}^{\infty} \phi_m \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} (\arctan z)^{n+h-1} (1+z^2)^{h-1} z^{-m-h},$$

のように関係づいている。特に、

$$\mathcal{L}_0 \equiv \tilde{\mathcal{L}}_0 = L_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} L_{2k}, \quad K_1 \equiv \tilde{L}_{-1} = L_1 + L_{-1},$$

$$\mathcal{B}_0 \equiv \tilde{b}_0 = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} b_{2k}, \quad B_1 \equiv \tilde{b}_{-1} = b_1 + b_{-1}.$$

を以下の計算でよく使う。

\mathcal{L}_0, K_1 は \tilde{z} -座標系では定数倍、定数シフトを引き起こす。
特にweight h のプライマリ ϕ の上では

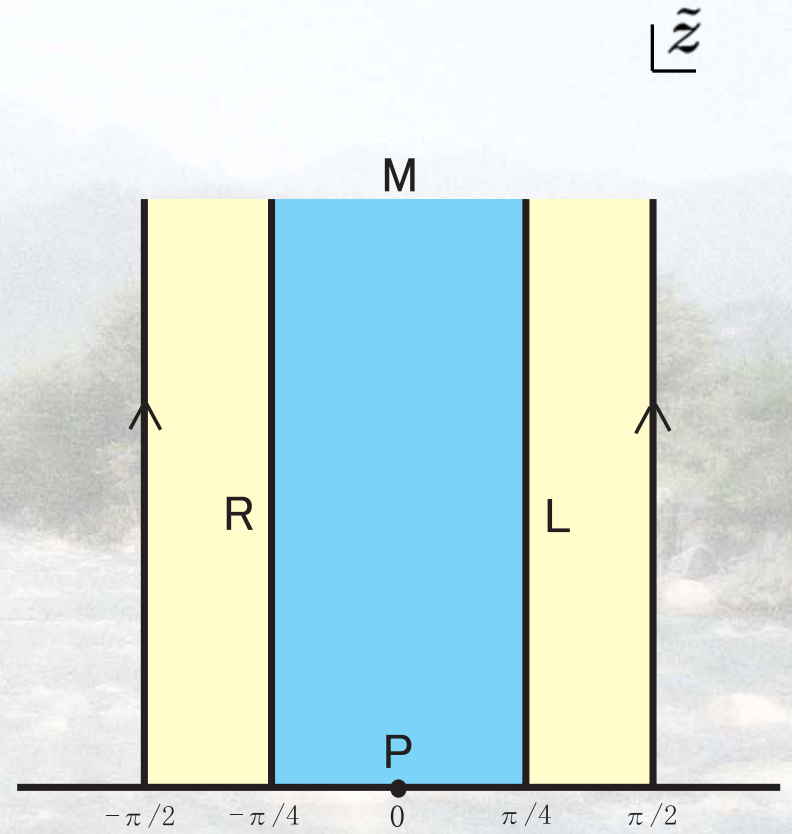
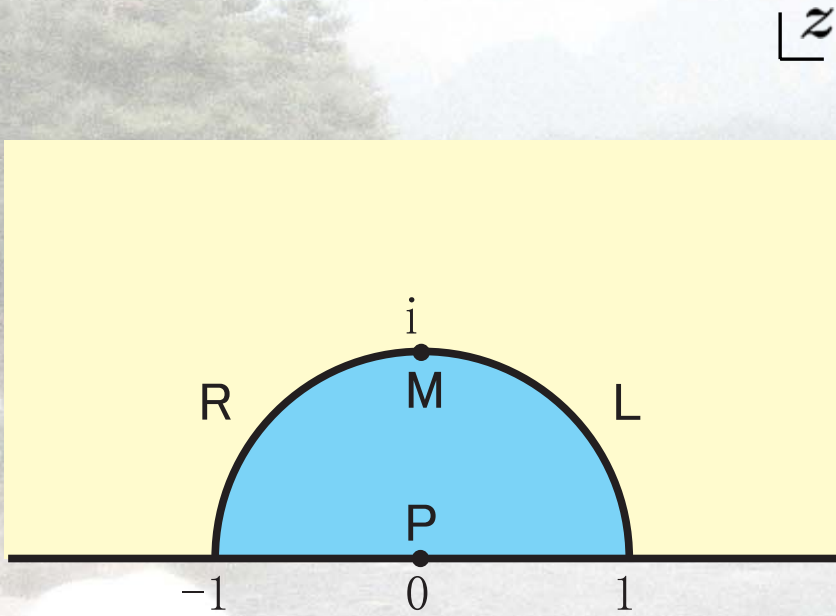
$$\lambda^{\mathcal{L}_0} \tilde{\phi}(\tilde{z}) \lambda^{-\mathcal{L}_0} = \lambda^h \tilde{\phi}(\lambda \tilde{z}), \quad e^{\alpha K_1} \tilde{\phi}(\tilde{z}) e^{-\alpha K_1} = \tilde{\phi}(\tilde{z} + \alpha).$$

C_π 上の相関関数はUHP上の相関関数を用いて計算できる:

$$\langle \phi_1(\tilde{z}_1) \phi_2(\tilde{z}_2) \cdots \phi_N(\tilde{z}_N) \rangle_{C_\pi} = \langle \tilde{\phi}_1(\tilde{z}_1) \tilde{\phi}_2(\tilde{z}_2) \cdots \tilde{\phi}_N(\tilde{z}_N) \rangle_{\text{UHP}}.$$

$$\begin{aligned} \text{特に、} \quad & \langle c(\tilde{x}) c(\tilde{y}) c(\tilde{z}) \rangle_{C_\pi} = \langle \tilde{c}(\tilde{x}) \tilde{c}(\tilde{y}) \tilde{c}(\tilde{z}) \rangle_{\text{UHP}} \\ & = \cos^2 \tilde{x} \cos^2 \tilde{y} \cos^2 \tilde{z} \langle c(\tan \tilde{x}) c(\tan \tilde{y}) c(\tan \tilde{z}) \rangle_{\text{UHP}} \\ & = \sin(\tilde{x} - \tilde{y}) \sin(\tilde{x} - \tilde{z}) \sin(\tilde{y} - \tilde{z}) V_{26} \end{aligned}$$

をpotential heightの計算で使う。



$$\arctan z = \tilde{z}$$

Wedge state

Wedge state $|r\rangle$ は

$$f_r(z) = h^{-1}(h(z)^{\frac{2}{r}}) = \tan\left(\frac{2}{r} \arctan z\right),$$

$$h(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

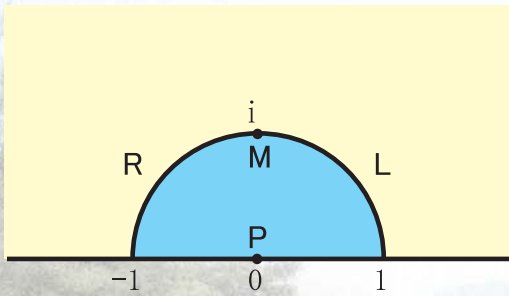
を用いて $\langle r|\phi\rangle = \langle f_r[\phi(0)]\rangle_{\text{UHP}}, \quad \forall \phi(z)$

で定義されるもので、

$$\langle r| = \langle 0|U_r, \quad U_r = \left(\frac{2}{r}\right)^{\mathcal{L}_0},$$

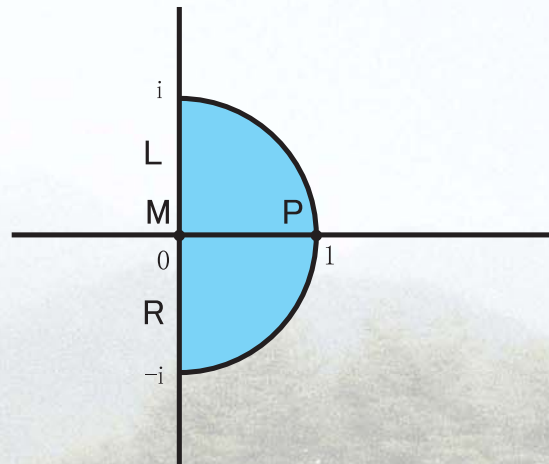
$$|r\rangle = U_r^\dagger|0\rangle, \quad U_r^\dagger = \left(\frac{2}{r}\right)^{\mathcal{L}_0^\dagger},$$

$$\mathcal{L}_0^\dagger = L_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} L_{-2k}.$$



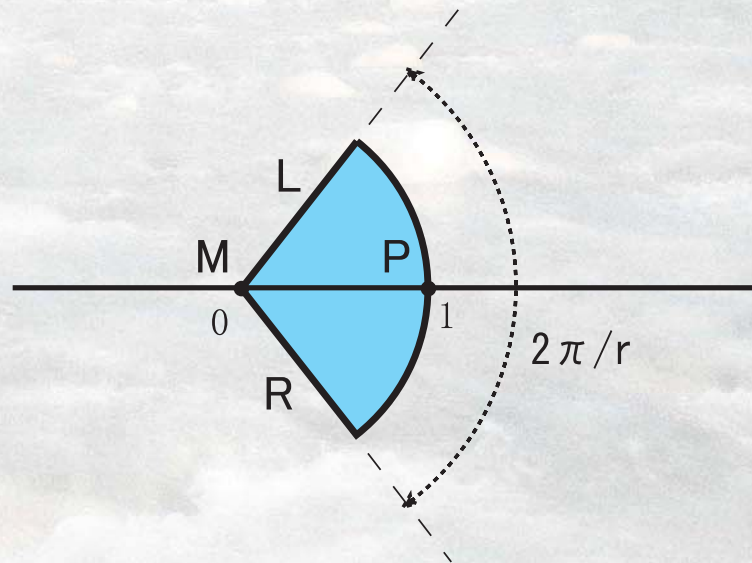
h

→



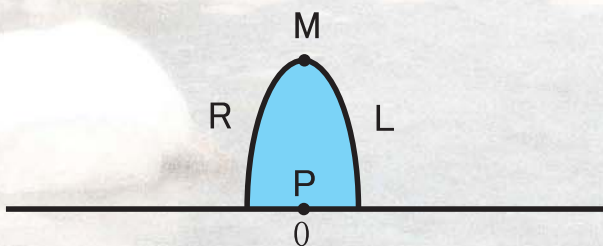
$z^{2/r}$

↓



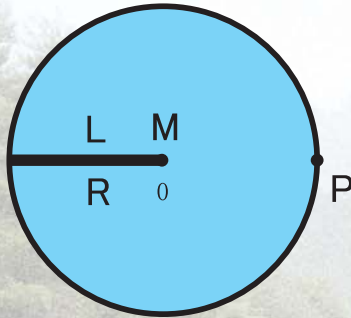
h^{-1}

←



※ $r=1$ のとき identity state, $r=2$ のとき conformal vacuum, $r=\infty$ のとき sliver state

identity stateを表すmapでは



sliver stateを表すmapでは



特に

$$U_r = \left(\frac{2}{r}\right)^{L_0} = \left(\frac{2}{r}\right)^{L_0} e^{-\frac{r^2-4}{3r^2}L_2 + \frac{r^4-16}{30r^4}L_4 + \dots}$$

に注意すると $r \rightarrow \infty$ がとれる:

$$\langle \infty | = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle 0 | U_r = \langle 0 | U_{\arctan} = \langle 0 | U_{\tan}^{-1},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} f_r(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \tan \left(\frac{2}{r} \arctan z \right) = \arctan z.$$

内積とスター積

• BPZ内積: $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle I \circ \phi_1(0) \phi_2(0) \rangle_{\text{UHP}}, \quad I(z) \equiv -1/z,$

は \tilde{z} -座標系でみると $\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \rangle = \langle I \circ \phi_1(0) \phi_2(0) \rangle_{C_\pi} = \langle \phi_1(\pm\pi/2) \phi_2(0) \rangle_{C_\pi},$

• スター積は

$$\langle \chi, \phi_1 * \phi_2 \rangle = \langle f_{(1)} \circ \chi(0) f_{(2)} \circ \phi_1(0) f_{(3)} \circ \phi_2(0) \rangle_{\text{UHP}}, \quad \forall \chi(z)$$

$$f_{(n)}(z) = h^{-1}(e^{(2-n)\frac{2\pi}{3}i} h(z)^{\frac{2}{3}}) = \tan\left(\frac{(2-n)\pi}{3} + \frac{2}{3} \arctan z\right),$$

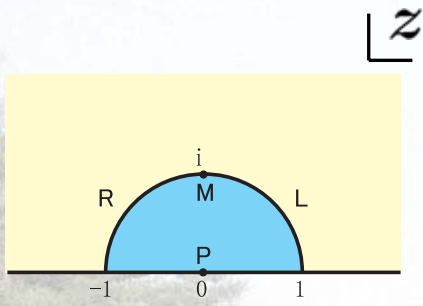
で定義される。 \tilde{z} -座標系でみると

$$\langle \tilde{\chi}, \tilde{\phi}_1 * \tilde{\phi}_2 \rangle = \langle s \circ \chi(\pm 3\pi/4) s \circ \phi_1(\pi/4) s \circ \phi_2(-\pi/4) \rangle_{C_\pi}$$

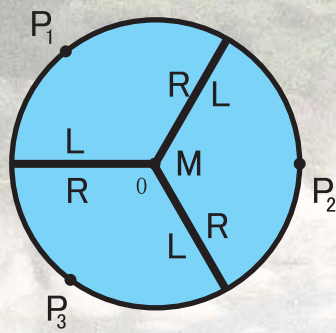
$$s(\tilde{z}) = \frac{2}{3}\tilde{z}$$

となることより、

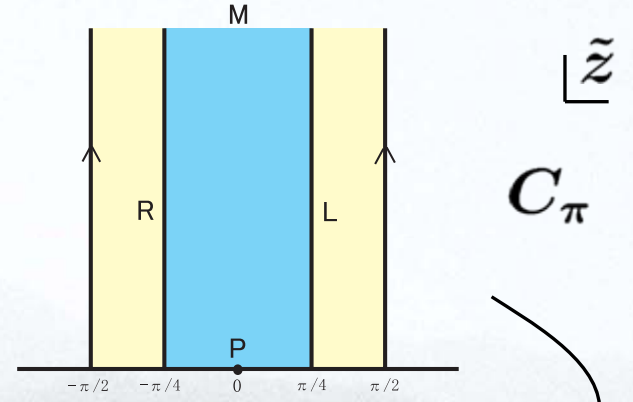
$$\tilde{\phi}_1(0)|0\rangle * \tilde{\phi}_2(0)|0\rangle = U_3^\dagger U_3 \tilde{\phi}_1(\pi/4) \tilde{\phi}_2(-\pi/4)|0\rangle.$$



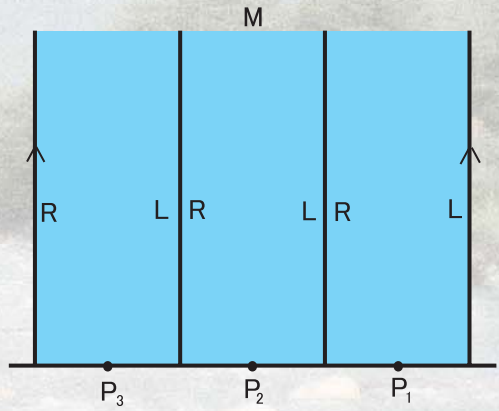
3つ貼り合わせる



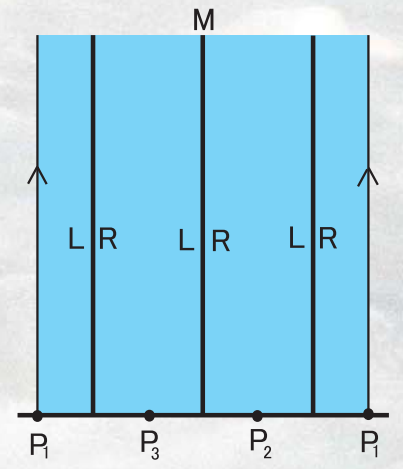
$\pi/4$ ずらして2/3倍



C_π



$C_{\frac{3\pi}{2}}$



C_π

一般に

$$U_r^\dagger U_r \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1) \cdots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n) |0\rangle * U_s^\dagger U_s \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_1) \cdots \tilde{\psi}_m(\tilde{y}_m) |0\rangle \\ = U_{r+s-1}^\dagger U_{r+s-1} \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1 + \frac{\pi}{4}(s-1)) \cdots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n + \frac{\pi}{4}(s-1)) \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_1 - \frac{\pi}{4}(r-1)) \cdots \tilde{\psi}_m(\tilde{y}_m - \frac{\pi}{4}(r-1)) |0\rangle$$

が成り立つ。この公式はスタ一積の結合性とconsistentになっている。

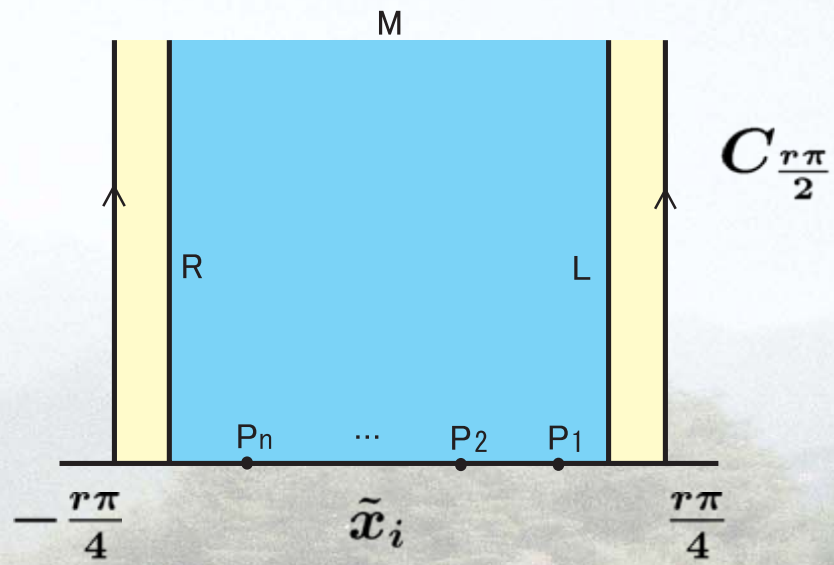
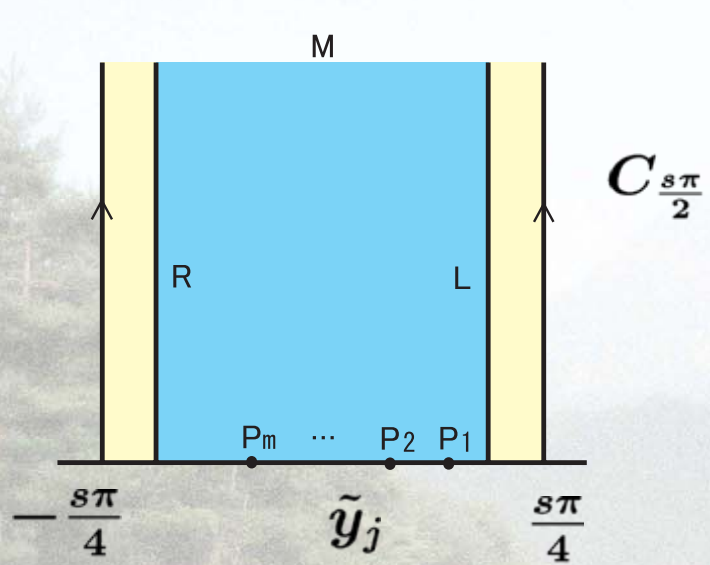
※ $U_r^\dagger U_r = e^{-\frac{r-2}{2}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^\dagger)}$ に注意しておく。

※とくに、場のinsertionがないとき、 $|r\rangle = U_r^\dagger |0\rangle = U_r^\dagger U_r |0\rangle$

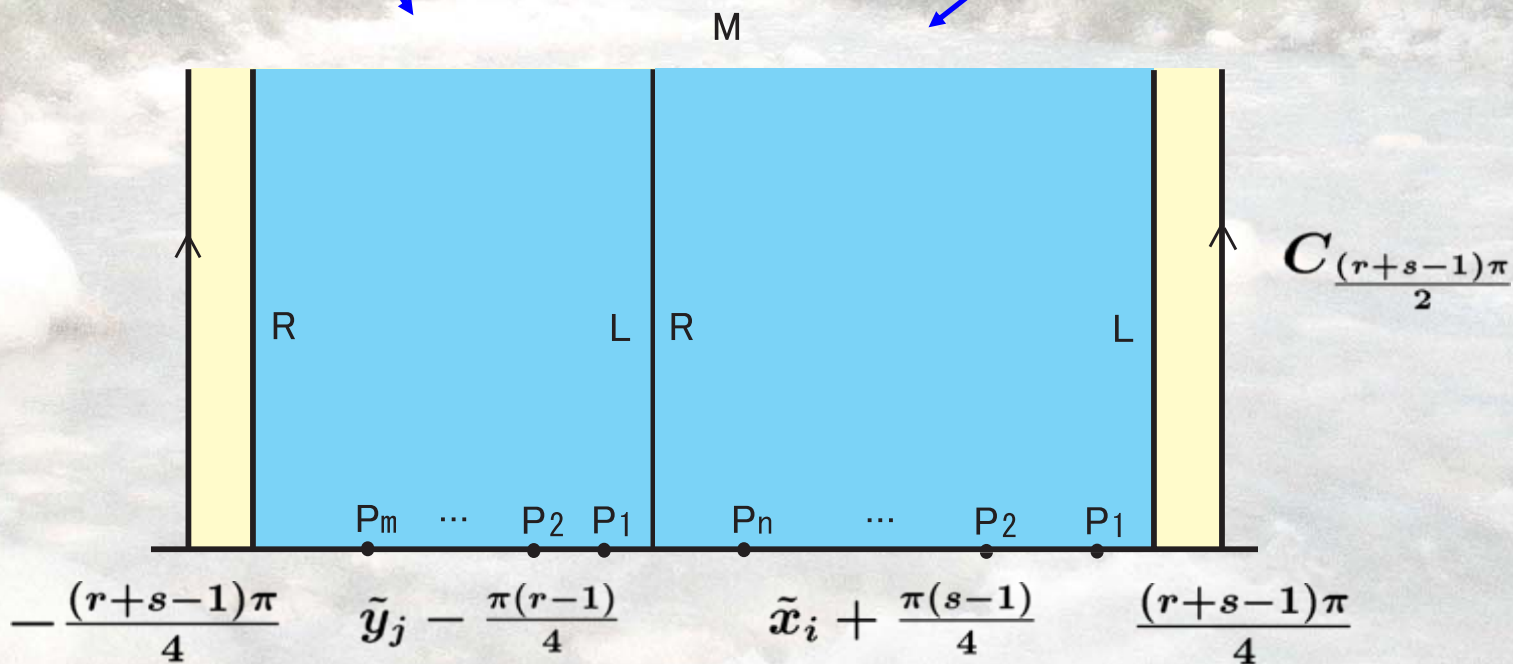
より、wedge stateの可換な代数: $|r\rangle * |s\rangle = |r + s - 1\rangle$
に帰着する。

wedge stateのうち

$|r = 1\rangle$ (identity state)と $|r = \infty\rangle$ (sliver state)がスタ一積に関する projectorになっていることがわかる。



貼り合わせる



ghost数ゼロのtoy model

Projectorの式: $\Psi * \Psi = \Psi$

より難しいが、運動方程式: $Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$

よりは簡単なghost数ゼロの弦場に対する非線型方程式:

$$(\mathcal{L}_0 - 1)\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

を考える。

※Gaiotto-Rastelli-Sen-Zwiebach (2002)による $(L_0 - 1)\Psi + \Psi * \Psi = 0$ のレベル切断を用いた解析により、本物のタキオン真空解に「近い」数値パターンを示すという観測結果があった。

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} f_n \hat{\mathcal{L}}^n |0\rangle, \quad \hat{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^\dagger$$

というansatzで解こう。

2種類の解がある:

$$f_n = \begin{cases} B_n & \leftarrow \text{ベルヌイ数} \\ -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,1}\lambda & (\lambda \neq 1) \quad \leftarrow \text{polylogarithm} \end{cases}$$

共に形式的に和をとると $\Psi = \frac{\lambda}{2} \frac{\hat{\mathcal{L}}_0}{1 - \lambda e^{-\frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_0}} |0\rangle$

とまとまる。(ただし前者は $\lambda=1$ とした。)

これを λ の冪で再展開すると、wedge state (の微分) の和で表される:

$$\Psi = \begin{cases} |\infty\rangle - \sum_{n=2}^{\infty} \partial_r |r\rangle|_{r=n} & (\lambda = 1) \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} \partial_r |r\rangle|_{r=n} & (\lambda \neq 1) \end{cases} .$$

※ $\lambda=1$ のときのみ sliver state $|\infty\rangle$ が現れるのはもともと $|0\rangle$ という項を含む解なので。

このtoy modelは $[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0^*] = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^*$ (★:BPZ共役)

という代数に着目すると一般化できる。つまり、 $[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0^*] = s(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^*)$
という別の \mathcal{L}_0 があるとして

$$(\mathcal{L}_0 - 1)\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

という方程式を考えるとその解は

$$\Psi = \left[{}_1F_1(1, 1 + 1/s, x/2) + 2(1/\lambda - 1)x^{-1/s}e^{x/2} \right]^{-1} |\mathcal{I}\rangle,$$
$$x \equiv (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^*)/s$$

と表される。(${}_1F_1$ は合流型超幾何関数, $|\mathcal{I}\rangle$ はidentity state)

※ $s=1$ がwedge stateに関連したSchnablの解の場合。

$s \neq 1$ の場合の代数を実現するconformal frameについても議論されている。

butterfly state, moth stateに関連した具体例も知られている。

部分代数

- スター積の公式および $\{Q_B, \tilde{c}(\tilde{z})\} = \tilde{c}\tilde{d}\tilde{c}(\tilde{z}), \{Q_B, \hat{B}\} = \hat{\mathcal{L}}$
(ここで $\hat{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^\dagger, \hat{B} \equiv B_0 + B_0^\dagger$) に注意すると

$$\hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{p_1} \tilde{c}_{p_2} \cdots \tilde{c}_{p_N} |0\rangle, \quad \hat{B} \hat{\mathcal{L}}^m \tilde{c}_{q_1} \tilde{c}_{q_2} \cdots \tilde{c}_{q_M} |0\rangle,$$

の線形結合はスター積と Q_B の作用で閉じる。

※それぞれ \mathcal{L}_0 -レベル(固有値)

$n - p_1 - p_1 \cdots - p_N, 1 + m - q_1 - q_2 \cdots - q_M$ を持つ。

※ \mathcal{L}_0 -レベル h_1, h_2 を持つ上記の形の項同士のスター積をとったとき出てくる項の \mathcal{L}_0 -レベル h_{12} は $h_{12} \geq h_1 + h_2$

※運動方程式は $Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$

なので上記の形の線形結合で解が見つかる可能性がある。

具体的には

$$\begin{aligned}
 & \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{p_1} \tilde{c}_{p_2} \cdots \tilde{c}_{p_N} |0\rangle * \hat{\mathcal{L}}^m \tilde{c}_{q_1} \tilde{c}_{q_2} \cdots \tilde{c}_{q_M} |0\rangle \\
 &= \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{k_1 \leq p_1} \cdots \sum_{k_N \leq p_N} \sum_{l_1 \leq q_1} \cdots \sum_{l_M \leq q_M} D_{n,m, \sum_{i=1}^M (q_i - l_i), \sum_{i=1}^N (p_i - k_i)}^L \\
 & \quad \times \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\sum_{i=1}^N (p_i - k_i) + \sum_{i=1}^M (q_i - l_i)} (-1)^{\sum_{i=1}^M (q_i - l_i)} \binom{1 - k_1}{1 - p_1} \cdots \binom{1 - k_N}{1 - p_N} \binom{1 - l_1}{1 - q_1} \cdots \binom{1 - l_M}{1 - q_M} \\
 & \quad \times \hat{\mathcal{L}}^L \tilde{c}_{k_1} \cdots \tilde{c}_{k_N} \tilde{c}_{l_1} \cdots \tilde{c}_{l_M} |0\rangle
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 D_{n,m,k,l}^N &= \frac{n!m!}{N!} (-2)^{n+m-N} \oint_{r=0} \frac{dr}{2\pi i} \oint_{s=0} \frac{ds}{2\pi i} \frac{(r+s+1)^N (r+1)^k (s+1)^l}{r^{n+1} s^{m+1}} \\
 &= \frac{n!m!}{N!} (-2)^{n+m-N} \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \binom{k}{n-j} \binom{N-j+l}{m}
 \end{aligned}$$

となる。 $\hat{\mathcal{B}}$ が入った項は

$$(\hat{\mathcal{B}}\phi_1) * \phi_2 = \hat{\mathcal{B}}(\phi_1 * \phi_2) + (-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \frac{\pi}{2} \phi_1 * B_1 \phi_2,$$

$$\phi_1 * (\hat{\mathcal{B}}\phi_2) = (-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \hat{\mathcal{B}}(\phi_1 * \phi_2) - (-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \frac{\pi}{2} (B_1 \phi_1) * \phi_2,$$

$$(\hat{\mathcal{B}}\phi_1) * (\hat{\mathcal{B}}\phi_2) = -(-1)^{\text{gh}(\phi_1)} \frac{\pi}{2} \hat{\mathcal{B}} B_1(\phi_1 * \phi_2) + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 (B_1 \phi_1) * (B_1 \phi_2),$$

および $\{B_1, \tilde{c}_p\} = \delta_{p,1}$ を使うとよい。

解のansatz

ほしい解はghost数1なので

$$\Psi = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ p \leq 1}} f_{n,p} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_p |0\rangle + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ p, q \leq 1}} f_{n,p,q} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle$$

の形を仮定して係数を決めよう。

Siegelゲージ条件: $b_0 \Psi = 0$ の対応物を課しておく:

$$\mathcal{B}_0 \Psi = 0 \Leftrightarrow 2f_{n,p,0} + (n+1)f_{n+1,p} = 0.$$

さらに、twist対称性: $(-1)^{L_0+1} \Psi = \Psi$

$$\Leftrightarrow f_{n,p} = 0, (p : \text{even}), f_{n,p,q} = 0, (p+q : \text{even})$$

も課しておく。

実際、

$$Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0, \quad \mathcal{B}_0 \Psi = 0,$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{L}_0 \Psi = -\mathcal{B}_0(\Psi * \Psi) = -\frac{\pi}{4} \left((B_1^R \Psi) * \Psi + \Psi * B_1^L \Psi \right)$$

\mathcal{L}_0 -レベルの低い部分の係数を決めて右辺に代入すると左辺のより高い \mathcal{L}_0 -レベルの係数が決まっていく。

$Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$ の \mathcal{L}_0 -レベル-1,0の部分から

$$f_{0,1} - \frac{\pi}{2} f_{0,1}^2 = 0, \quad \frac{1}{4} f_{0,1}^2 - f_{0,1} f_{1,1} = 0$$

⇒ 2種類の解がある:

$$f_{0,1} = \frac{2}{\pi}, \quad f_{1,1} = \frac{1}{2\pi}, \quad \dots \quad : \text{タキオン真空解}$$

$$f_{0,1} = 0, \quad f_{1,1} = -\frac{1}{\pi} \beta, \quad \dots \quad : \text{pure gauge解}$$

一般には

$$\begin{aligned}
 & Q_B \Psi + \Psi * \Psi \\
 &= \sum_{\substack{N \geq 0 \\ p, q \leq 1}} \left[\frac{p-q}{2} f_{n,p+q} + f_{n-1,p,q} \right. \\
 &+ \sum_{k=0}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \sum_{n,m \geq 0} (-1)^l \left(\frac{\pi}{4} \right)^{k+l} D_{n,m,l,k}^N \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} (f_{n,k+p} f_{m,l+q} + \pi^2 f_{n,1,p+k} f_{m,1,q+l}) \\
 &+ \left. \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \sum_{n,m \geq 0} (1 + (-1)^{k+l}) \left(\frac{\pi}{4} \right)^{k+l} D_{n,m,k+l,0}^N \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} f_{n,1} f_{m,p+k,q+l} \right] \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle \\
 &+ \sum_{\substack{N \geq 0 \\ p, q, r \leq 1}} \left[-(p-q) f_{N,p+q,r} + \sum_{k_1=0}^{1-p} \sum_{k_2=0}^{1-q} \sum_{l=0}^{1-r} \sum_{n,m \geq 0} ((-1)^{k_1} - (-1)^{k_2+l}) \left(\frac{\pi}{4} \right)^{k_1+k_2+l} D_{n,m,k_2+l,k_1}^N \right. \\
 &\quad \times \binom{1-p}{k_1} \binom{1-q}{k_2} \binom{1-r}{l} f_{n,p+k_1} f_{m,q+k_2,r+l} \\
 &+ \left. \pi \sum_{k_1=0}^{1-p} \sum_{k_2=0}^{1-q} \sum_{l=0}^{1-r} \sum_{n,m \geq 0} ((-1)^{k_1} + (-1)^{k_2+l}) \left(\frac{\pi}{4} \right)^{k_1+k_2+l} D_{n,m,k_2+l,k_1}^N \right. \\
 &\quad \times \left. \binom{1-p}{k_1} \binom{1-q}{k_2} \binom{1-r}{l} f_{n,p+k_1,1} f_{m,q+k_2,r+l} \right] \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q \tilde{c}_r |0\rangle
 \end{aligned}$$

がゼロになるように係数を決めればよい。

ここでゲージ条件を満たす取り方として(それぞれ $p, p+q$ が奇数の場合)

$$f_{n,p} = \frac{(-1)^n \pi^{-p}}{2^{n-2p+1} n!} f_{n-p+1}, \quad f_{n,p,q} = \frac{(-1)^{n+q} \pi^{-p-q}}{2^{n-2(p+q)+3} n!} f_{n-p-q+2}$$

として、運動方程式をあらわに書き下すと

$$Q_B \Psi + \Psi * \Psi$$

$$= \sum_{\substack{N \geq 0; p, q \leq 1 \\ p+q:\text{odd}}} \frac{(-1)^N \pi^{-p-q}}{N! 2^{N+2-2(p+q)}} \left[(p-q - (-1)^q N) f_{N+1-p-q} \right. \\ + \sum_{\substack{k=0 \\ k+l:\text{odd}}}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^l \sum_{m=0}^{N-j+k} \binom{N}{j} \binom{l}{n} \binom{N-j+k}{m} (-1)^l f_{n+1+j-p-k} f_{m+1-q-l} \\ + \sum_{\substack{k=0 \\ k+l:\text{even}}}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{N-j+k+l} \binom{N}{j} \binom{N-j+k+l}{n} (-1)^{l+q} f_n f_{j+2-k-l-p-q} \left. \right] \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle \\ + \sum_{\substack{N \geq 0; p, q, r \leq 1 \\ p+q+r:\text{odd}}} \frac{(-1)^N \pi^{-p-q-r}}{N! 2^{N+4-2(p+q+r)}} \left[-(-1)^r 2(p-q) f_{N+2-p-q-r} \right. \\ + \sum_{k_1=0}^{1-p} \sum_{k_2=0}^{1-q} \sum_{l=0}^{1-r} \binom{1-p}{k_1} \binom{1-q}{k_2} \binom{1-r}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{k_2+l} \sum_{m=0}^{N-j+k_1} \binom{N}{j} \binom{k_2+l}{n} \binom{N-j+k_1}{m} \\ \left. \times ((-1)^{q+l} - (-1)^{r+k_2}) f_{n+1+j-p-k_1} f_{m+2-q-r-k_2-l} \right] \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q \tilde{c}_r |0\rangle$$

$$\stackrel{!}{=} 0.$$

特に $\hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_1 \tilde{c}_0 |0\rangle$ の係数を見ると

$$-\frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2}\right)^N \left((N-1) \frac{f_N}{N!} + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{f_n f_m}{n! m! (N-n-m)!} \right) \stackrel{!}{=} 0.$$

これを f_n の母関数 $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n$ の微分方程式に書き直すと

$$\left(x \frac{d}{dx} - 1 \right) f(x) = -e^x f(x)^2$$

でありこれを解くと $f(x) = \frac{\lambda x}{\lambda e^x - 1}$ となる。

$$\lambda = 1 \text{ のとき } f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

$f_n = B_n$: ベルヌイ数 \implies タキオン真空解

$$\lambda \neq 1 \text{ のとき } f(x) = \frac{\lambda x}{\lambda e^x - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} x + \dots$$

$f_n = -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,1}\lambda \implies$ pure gauge解
($\lambda = \beta/(\beta - 1)$)

運動方程式の解であるためにはここで求めた f_n でその他の

$$\hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle, \quad \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q \tilde{c}_r |0\rangle$$

の係数が全てゼロになることを証明する必要がある。

*Mathematica*を用いて一部(有限個)は具体的にチェックできた。

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \geq -1, p:\text{odd}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} f_{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p, q \geq -1, p+q:\text{odd}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2(p+q)+3}} f_{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle, \end{aligned}$$

$$f_n = \begin{cases} B_n & (\lambda = 1) \\ -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,0}\lambda & (\lambda \neq 1) \end{cases} .$$

別の表示に書き換えて、運動方程式の解であることを確かめよう！

運動方程式の解

Wedge state $|r\rangle$ から作った、ghost数1の

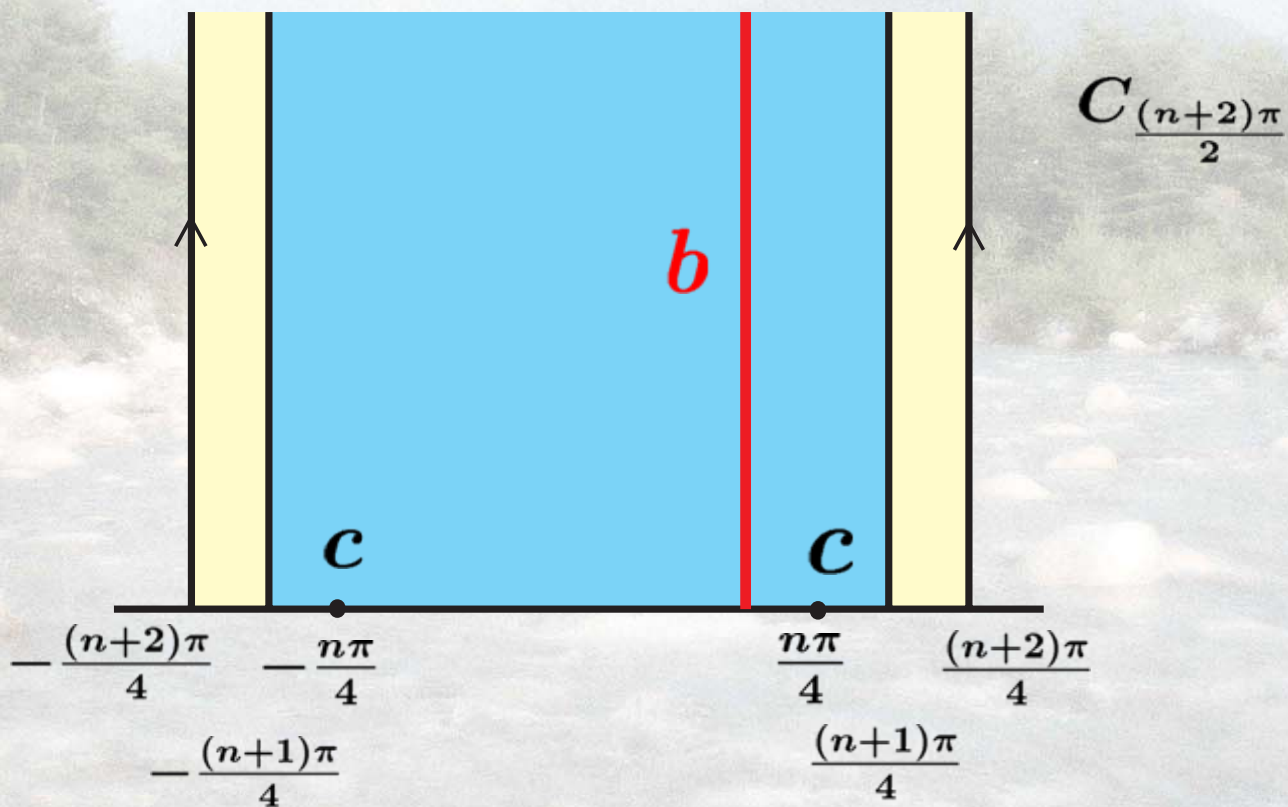
$$\begin{aligned}\psi_r &\equiv \frac{2}{\pi^2} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[\hat{\mathcal{B}} \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{\pi}{2} \left(\tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle \\ &= \frac{2}{\pi^2} c_1 |0\rangle * \hat{\mathcal{B}} |r\rangle * c_1 |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \geq -1, p: \text{odd}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} r^{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p, q \geq -1, p+q: \text{odd}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2p+2q+3}} r^{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle\end{aligned}$$

を考えよう。

これはゲージ条件を満たす: $\mathcal{B}_0 \psi_r = 0$

$$\psi_n = \frac{2}{\pi} \tilde{c}(0)|0\rangle * B_1^L |n\rangle * \tilde{c}(0)|0\rangle,$$

$$B_1^L \equiv \int_{C_L} \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{b}(\tilde{z}).$$



「解」は ψ_r を用いて表すことができる:

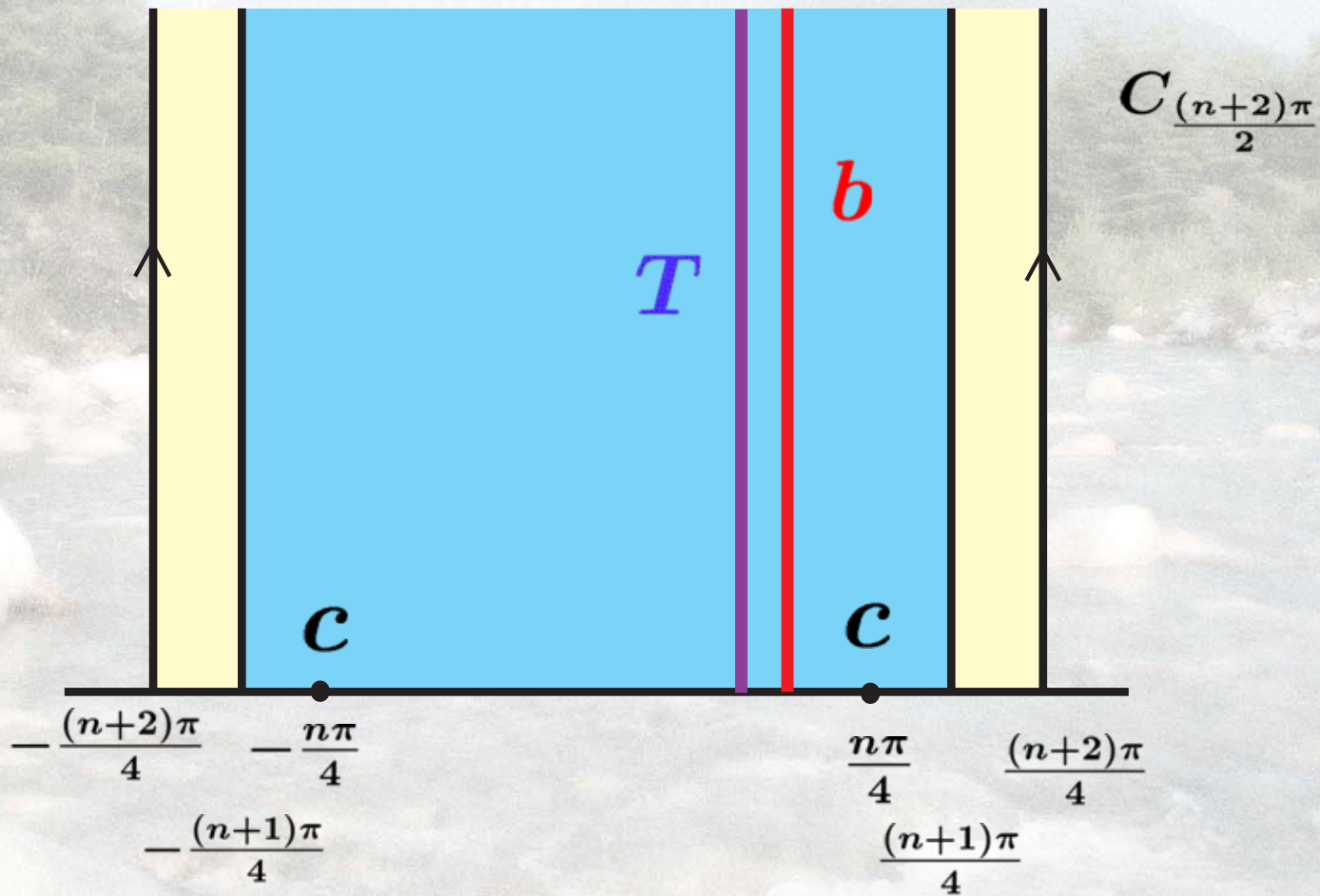
$$\begin{aligned}\Psi_\lambda &\equiv \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r |_{r=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} \partial_r^k \psi_r |_{r=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \geq -1, p: \text{odd}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} f_{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p, q \geq -1, p+q: \text{odd}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2(p+q)+3}} f_{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle.\end{aligned}$$

これを λ の冪で形式的に展開すると:

$$\Psi_\lambda = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{n\partial_r} \partial_r \psi_r |_{r=0} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r |_{r=n}.$$

λ の冪ごとに運動方程式を確かめよう。

$$-\partial_r \psi_r|_{r=n} = \tilde{c}(0)|0\rangle * B_1^L K_1^L |n\rangle * \tilde{c}(0)|0\rangle, \quad K_1^L \equiv \int_{C_L} \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \tilde{T}(\tilde{z}).$$



$$\Lambda_0 \equiv \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{B}} c_1 |0\rangle + \frac{1}{2} |0\rangle \quad \text{を使うと、各項は}$$

$$-\partial_r \psi_r |_{r=0} = Q_B \Lambda_0 ,$$

$$-\partial_r \psi_r |_{r=n} = (Q_B \Lambda_0) * \underbrace{\Lambda_0 * \cdots * \Lambda_0}_n .$$

と書ける。よって Q_B : nilpotent; スター積に関して derivation, より

$$Q_B \partial_r \psi_r |_{r=0} = 0 ,$$

$$Q_B \partial_r \psi_r |_{r=n} = \sum_{m=0}^{n-1} \partial_r \psi_r * \partial_s \psi_s |_{r=m, s=n-1-m} .$$

が成り立つ。つまり、

$$Q_B \Psi_\lambda + \Psi_\lambda * \Psi_\lambda = 0 .$$

運動方程式を満たすことは、 Ψ_λ を pure gauge の形に書きなおせることからわかる：

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda &= -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r |_{r=n} = \lambda(Q_B \Lambda_0) \frac{1}{1 - \lambda \Lambda_0} \\ &= e^{-\Lambda} * Q_B e^\Lambda,\end{aligned}$$

$$\Lambda = -\log(1 - \lambda \Lambda_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} (\Lambda_0)^n.$$

このゲージパラメータは $\lambda = 1$ で特異な振る舞いをする。たとえば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 U_N | \Lambda \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-\lambda)} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \log(1-\lambda),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 U_N | e^\Lambda \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 - \frac{1}{\lambda} \log(1-\lambda),$$

からわかる。

$\lambda = 1$ のときは、 $\partial_r^n \psi_r|_{r=\infty} = \delta_{n,0} \psi_\infty$ および Euler-Maclaurin formula:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f'(k) = \sum_{n=0}^N \frac{B_n}{n!} (f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)) - \frac{(-1)^N}{N!} \int_0^1 dt B_N(t) \sum_{k=a}^{b-1} f^{(N+1)}(k+t),$$

$$B_n(t) \equiv \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k t^{n-k}, \quad (\text{Bernoulli polynomial})$$

を使うと次のように展開できる:

ただし $f(t) = \psi_t, a = 0, b = \infty, N \rightarrow \infty$ とおいて剰余項を無視できるとした。

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda=1} &\equiv \frac{\partial_r}{e^{\partial_r} - 1} \psi_r|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=0} \\ &= \psi_\infty - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\partial_r^n \psi_r|_{r=\infty} - \partial_r^n \psi_r|_{r=0}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\psi_N - \sum_{n=0}^N \frac{B_n}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=n} \right) \end{aligned}$$

ここで形式的には第1項は消える:

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi^2} c_1 |0\rangle * \hat{\mathcal{B}} |N\rangle * c_1 |0\rangle \\ &= \frac{2}{\pi^2} c_1 |0\rangle * \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\mathcal{B}_0 + \frac{N-2}{N} \mathcal{B}_0^\dagger \right) |N\rangle + \frac{2}{N} \mathcal{B}_0^\dagger |N\rangle \right] * c_1 |0\rangle = 0\end{aligned}$$

ので、この $\Psi_{\lambda=1}$ は運動方程式の解である。

※ただし、この第1項はpotential heightの計算や解のまわりのcohomologyの議論では効いてくるので、無視できない。

最初Nを有限にして計算し、最後に $N \rightarrow \infty$ の極限をとる、という「正則化」を定めた。

※以上の再展開が正当であるとする $\Psi_{\lambda=1}$ が運動方程式の解であることから、ベルヌイ数に関する無限個の2次の恒等式を導いたことになる。

※ $|\lambda| < 1$ (pure gauge解) のときも、形式的には

$$\Psi_\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\lambda^{N+1} \psi_N - \sum_{n=0}^N \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r |_{r=n} \right)$$

と書ける。すると先に $\lambda = 1$ としたものが「タキオン真空解」である。

Potential height

$$\frac{S[\Psi_\lambda]}{V_{26}} = -\frac{1}{g^2 V_{26}} \left[\frac{1}{2} \langle \Psi_\lambda, Q_B \Psi_\lambda \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi_\lambda, \Psi_\lambda * \Psi_\lambda \rangle \right]$$

を ψ_n を用いた解の表示で評価しよう。

基本となる量は

$$\begin{aligned} & \langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle / V_{26} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(m-n)}{m+n+2} \right) \right) \left(-1 + \frac{m+n+2}{\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{m+n+2} \right) \right) \\ & \quad + 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{m+n+2} \right) \left[-\frac{m+n+1}{\pi^2} + \frac{mn}{\pi^2} \cos \left(\frac{\pi(m-n)}{m+n+2} \right) + \frac{(m+n+2)(m-n)}{2\pi^3} \sin \left(\frac{\pi(m-n)}{m+n+2} \right) \right], \\ & \langle \psi_n, \psi_m * \psi_k \rangle / V_{26} \\ &= \frac{(n+m+k+3)^2}{\pi^3} \sin^2 \left(\frac{\pi}{n+m+k+3} \right) \\ & \quad \times \left[\sin \left(\frac{2\pi(n+1)}{n+m+k+3} \right) + \sin \left(\frac{2\pi(m+1)}{n+m+k+3} \right) + \sin \left(\frac{2\pi(k+1)}{n+m+k+3} \right) \right]. \end{aligned}$$

これらを適当に微分して和を計算すればよい。

特に
$$\sum_{m=0}^n \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q_B \partial_s \psi_s |_{s=n-m} \rangle = 0,$$

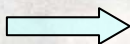
$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, \partial_s \psi_s |_{s=k} * \partial_t \psi_t |_{t=n-m-k} \rangle = 0,$$

が成り立つことがわかる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} F_{m,n} &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n F_{m,n-m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=N-n+1}^{N_1} + \sum_{n=N+1}^{N_2} \sum_{m=0}^{N_1} \right) F_{m,n}, \\ \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} F_{n,m,k} &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} F_{m,k,n-m-k} + \left(\sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^{N-k} \sum_{n=N-k-m+1}^N + \sum_{k=1}^N \sum_{m=N-k+1}^N \sum_{n=0}^N \right) F_{n,m,k} \\ &+ \left(\sum_{n=N+1}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^N + \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=0}^N \sum_{k=N+1}^{N_3} + \sum_{n=0}^N \sum_{m=N+1}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} + \sum_{n=N+1}^{N_1} \sum_{m=N+1}^{N_2} \sum_{k=N+1}^{N_3} \right) F_{n,m,k} \end{aligned}$$

$(N \leq N_1, N_2, N_3)$ に注意すると $|\lambda| < 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{S[\Psi_\lambda]}{V_{26}} &= -\frac{1}{g^2 V_{26}} \left[\frac{1}{2} \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} \lambda^{m+n+2} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q_B \partial_s \psi_s |_{s=n} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \lim_{N_1, N_2, N_3 \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} \lambda^{n+m+k+3} \langle \partial_r \psi_r |_{r=n}, \partial_s \psi_s |_{s=m} * \partial_t \psi_t |_{t=k} \rangle \right] \\ &= \lim_{N=\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\lambda^N) + \lim_{N=\min(N_1, N_2, N_3) \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\lambda^N) \\ &= 0 \end{aligned}$$


pure gauge解であることとconsistent!

$\lambda = 1$ のとき、「剰余項」は有限で残りうるので慎重に評価する。



$m + n, n + m + k$ が大きい部分。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_K(n, m) &\equiv \lim_{n+m \rightarrow \infty} \langle \psi_n, Q_B \psi_m \rangle / V_{26} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(m-n)}{m+n} \right) \right) + \frac{2mn}{(m+n)^2} \cos \left(\frac{\pi(m-n)}{m+n} \right) + \frac{m-n}{\pi(m+n)} \sin \left(\frac{\pi(m-n)}{m+n} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_V(n, m, k) &\equiv \lim_{n+m+k \rightarrow \infty} \langle \psi_n, \psi_m * \psi_k \rangle / V_{26} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\sin \left(\frac{2\pi n}{n+m+k} \right) + \sin \left(\frac{2\pi m}{n+m+k} \right) + \sin \left(\frac{2\pi k}{n+m+k} \right) \right].\end{aligned}$$

特に

$$\mathcal{F}_K(ax, ay) = \mathcal{F}_K(x, y), \quad \mathcal{F}_K(x, 0) = \mathcal{F}_K(0, y) = 0,$$

$$\mathcal{F}_V(ax, ay, az) = \mathcal{F}_V(x, y, z), \quad \mathcal{F}_V(x, y, 0) = \mathcal{F}_V(x, 0, z) = \mathcal{F}_V(0, y, z) = 0,$$

に注意する。

$\langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle, \langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle$ の各弦場 $\Psi_{\lambda=1}$ を

$$N_1 = r_1 N, N_2 = r_2 N, (N_3 = r_3 N) \quad (r_1, r_2, (r_3) \geq 1)$$

で正則化して $N \rightarrow \infty$ の極限をとって評価しよう。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{\lambda=1}^{(N_1)}, Q_B \Psi_{\lambda=1}^{(N_2)} \rangle / V_{26}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\langle \psi_{N_1}, Q_B \psi_{N_2} \rangle / V_{26} - \sum_{m=0}^{N_1} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q_B \psi_{N_2} \rangle / V_{26} - \sum_{n=0}^{N_2} \langle \psi_{N_2}, Q_B \partial_r \psi_r |_{r=n} \rangle / V_{26} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q_B \partial_s \psi_s |_{s=n} \rangle / V_{26} \right]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathcal{F}_K(r_1 N, r_2 N) - \sum_{m=0}^{N_1} \frac{1}{N} \partial_x \mathcal{F}_K(x N, r_2 N) - \sum_{n=0}^{N_2} \frac{1}{N} \partial_y \mathcal{F}_K(r_1 N, y N) \right. \\ \left. + \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{N} \sum_{m=N-n+1}^{N_1} \frac{1}{N} + \sum_{n=N+1}^{N_2} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N_1} \frac{1}{N} \right) \partial_x \partial_y \mathcal{F}_K(x N, y N) \right]$$

$$= \mathcal{F}_K(r_1, r_2) - \int_0^{r_1} dx \partial_x \mathcal{F}_K(x, r_2) - \int_0^{r_2} dy \partial_y \mathcal{F}_K(r_1, y) \\ + \int_0^1 dy \int_{1-y}^{r_1} dx \partial_x \partial_y \mathcal{F}_K(x, y) + \int_1^{r_2} dy \int_0^{r_1} dx \partial_x \partial_y \mathcal{F}_K(x, y)$$

$$= \mathcal{F}_K(r_1, r_2) - \mathcal{F}_K(r_1, r_2) - \mathcal{F}_K(r_1, r_2) \\ + \mathcal{F}_K(r_1, 1) - \int_0^1 dy \partial_y \mathcal{F}_K(x, y) |_{x=1-y} + \mathcal{F}_K(r_1, r_2) - \mathcal{F}_K(r_1, 1)$$

$$= - \int_0^1 dt \mathcal{F}_K(1-t, t) = - \frac{3}{\pi^2}.$$

r_1, r_2 によらない有限な値!

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{\lambda=1}^{(N_1)}, \Psi_{\lambda=1}^{(N_2)} * \Psi_{\lambda=1}^{(N_3)} \rangle / V_{26} \\
&= \frac{1}{V_{26}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\langle \psi_{N_1}, \psi_{N_2} * \psi_{N_3} \rangle - \sum_{n=0}^{N_1} \langle \partial_r \psi_r |_{r=n}, \psi_{N_2} * \psi_{N_3} \rangle - \sum_{m=0}^{N_2} \langle \psi_{N_1}, \partial_r \psi_s |_{s=m} * \psi_{N_3} \rangle \right. \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N_3} \langle \psi_{N_1}, \psi_{N_2} * \partial_t \psi_t |_{t=k} \rangle + \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, \partial_s \psi_s |_{s=n} * \psi_{N_3} \rangle + \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_3} \langle \partial_r \psi_r |_{r=n}, \psi_{N_2} * \partial_t \psi_t |_{t=k} \rangle \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} \langle \psi_{N_1}, \partial_s \psi_s |_{s=m} * \partial_t \psi_t |_{t=k} \rangle - \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} \langle \partial_r \psi_r |_{r=n}, \partial_s \psi_s |_{s=m} * \partial_t \psi_t |_{t=k} \rangle \right] \\
&= \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) - \int_0^{r_1} dx \partial_x \mathcal{F}_V(x, r_2, r_3) - \int_0^{r_2} dy \partial_y \mathcal{F}_V(r_1, y, r_3) - \int_0^{r_3} dz \partial_z \mathcal{F}_V(r_1, r_2, z) \\
&\quad + \int_0^{r_1} dx \int_0^{r_2} dy \partial_x \partial_y \mathcal{F}_V(x, y, r_3) + \int_0^{r_1} dx \int_0^{r_3} dz \partial_x \partial_z \mathcal{F}_V(x, r_2, z) + \int_0^{r_2} dy \int_0^{r_3} dz \partial_y \partial_z \mathcal{F}_V(r_1, y, z) \\
&\quad - \left(\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_{1-y}^1 dx + \int_0^1 dz \int_{1-z}^1 dy \int_0^1 dx + \int_1^{r_1} dx \int_0^{r_2} dy \int_0^1 dz + \int_0^{r_1} dx \int_0^1 dy \int_1^{r_3} dz \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dx \int_1^{r_2} dy \int_0^{r_3} dz + \int_1^{r_1} dx \int_1^{r_2} dy \int_1^{r_3} dz \right) \partial_x \partial_y \partial_z \mathcal{F}_V(x, y, z) \\
&= \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) - \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) - \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) - \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) \\
&\quad + \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) + \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) + \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) \\
&\quad - \mathcal{F}_V(1, 1, 1) + \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \partial_y \partial_z \mathcal{F}_V(x, y, z) |_{x=1-y-z} \\
&\quad - \mathcal{F}_V(r_1, r_2, 1) + \mathcal{F}_V(1, r_2, 1) - \mathcal{F}_V(r_1, 1, r_3) + \mathcal{F}_V(r_1, 1, 1) - \mathcal{F}_V(1, r_2, r_3) + \mathcal{F}_V(1, 1, r_3) \\
&\quad - \mathcal{F}_V(r_1, r_2, r_3) + \mathcal{F}_V(r_1, r_2, 1) + \mathcal{F}_V(r_1, 1, r_3) + \mathcal{F}_V(1, r_2, r_3) \\
&\quad - \mathcal{F}_V(r_1, 1, 1) - \mathcal{F}_V(1, r_2, 1) - \mathcal{F}_V(1, 1, r_3) + \mathcal{F}_V(1, 1, 1) \\
&= 2 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \mathcal{F}_V(1-v-u, u, v) = \frac{3}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

r_1, r_2, r_3 によらない有限な値!

$$\begin{aligned} \frac{S[\Psi_{\lambda=1}]}{V_{26}} &= -\frac{1}{g^2 V_{26}} \left[\frac{1}{2} \langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{g^2} \left(-\frac{3}{2\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2 g^2} = T_{25} \end{aligned}$$

⇒ $\Psi_{\lambda=1}$ の解に対し、正しいD25ブレーンのテンションの値が出た！

※運動方程式と解自身の内積はゼロである：

$$\langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle + \langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle = 0$$

この計算およびpotential heightの計算で正則化したときの第1項は無視できない。

※ $\langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle, \langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle$ の計算では正則化の $N_1, N_2, (N_3)$ の比によらない。
 実際、結果はそれぞれ次のように書き直せる：

$$\langle \Psi_{\lambda=1}, Q_B \Psi_{\lambda=1} \rangle / V_{26} = - \int_0^1 dt \mathcal{F}_K(1-t, t) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \langle \psi_{N-n}, Q_B \psi_n \rangle / V_{26},$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\lambda=1}, \Psi_{\lambda=1} * \Psi_{\lambda=1} \rangle / V_{26} &= 2 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \mathcal{F}_V(1-u-v, u, v) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2/2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^{N-k} \langle \psi_{N-m-k}, \psi_m * \psi_k \rangle / V_{26} \end{aligned}$$

ψ_n を使わない解の表示でのpotential heightの評価は？

→ 解析的にやるのは難しいが、各 \mathcal{L}_0 レベルごとに式を書き下すことはできる：

$$\begin{aligned} \frac{S[\Psi_\lambda]}{V_{26}} &= -\frac{1}{g^2 V_{26}} \left[\frac{1}{2} \langle \Psi_\lambda, Q_B \Psi_\lambda \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi_\lambda, \Psi_\lambda * \Psi_\lambda \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{6g^2 V_{26}} \langle \Psi_\lambda, Q_B \Psi_\lambda \rangle \quad \leftarrow \text{運動方程式を使った} \\ &= -\frac{1}{6g^2 V_{26}} \lim_{z \rightarrow 1} \langle z^{\mathcal{L}_0} \Psi_\lambda, Q_B z^{\mathcal{L}_0} \Psi_\lambda \rangle \\ &= -\frac{1}{6g^2} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{n,m,k,l \geq 0} \frac{\pi^{2(k+l-1)} (-1)^{n+m+k+l}}{2^{n+m+2(k+l)-1} (2k)! (2l+1)!} \binom{n+m}{n} \binom{n+m+2(k+l)-3}{n+m} \right. \\ &\quad \times \left((m-2l-1) f_{n+2k} f_{m+2l} + (m-2l+2k-1) f_n f_{m+2(k+l)} \right) z^{n+m+2(k+l-1)} \\ &\quad + \sum_{n,m,k,l \geq 0} \frac{\pi^{2(k+l-1)} (-1)^{n+m+k+l}}{2^{n+m+2(k+l)} (2k)! (2l+1)!} \binom{n+m}{n} \binom{n+m+2(k+l-1)}{n+m} \\ &\quad \times \left((2l-2k+1-m) f_{n+1} f_{m+2(k+l)} + (4l+1-m) f_{n+2(k+l)+1} f_m \right. \\ &\quad \left. \left. + (4l-2k+1-m) f_{n+2l+1} f_{m+2k} + (2l+1-m) f_{n+2k+1} f_{m+2l} \right) z^{n+m+2(k+l)-1} \right]. \\ f_n &= \begin{cases} B_n & (\lambda = 1) \\ -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,0}\lambda & (\lambda \neq 1) \end{cases}. \end{aligned}$$

ψ_n を使った解の表示の結果とコンシステントであるならば、

$$\frac{S[\Psi_\lambda]}{V_{26} T_{25}} = -\frac{\pi^2}{3V_{26}} \langle \Psi_\lambda, Q_B \Psi_\lambda \rangle = \begin{cases} 1 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

となるはず。

z の冪級数としてあらわに書き下すと

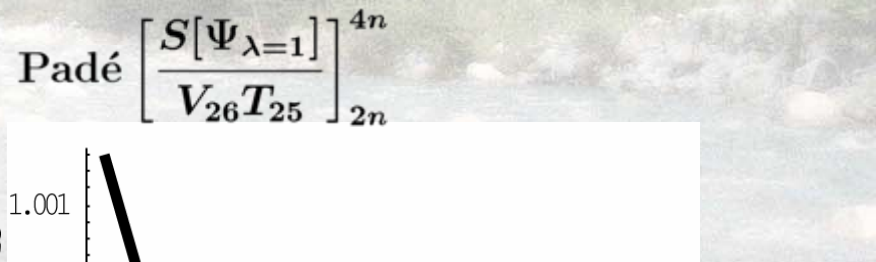
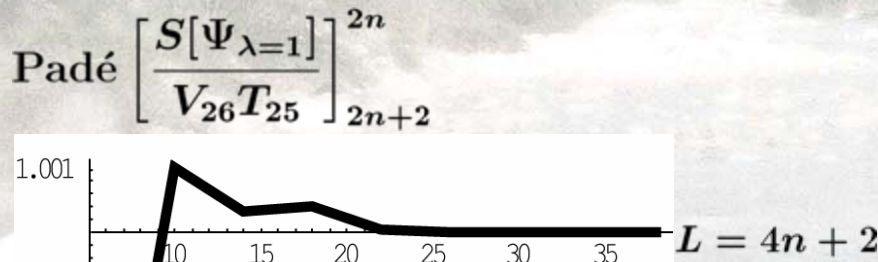
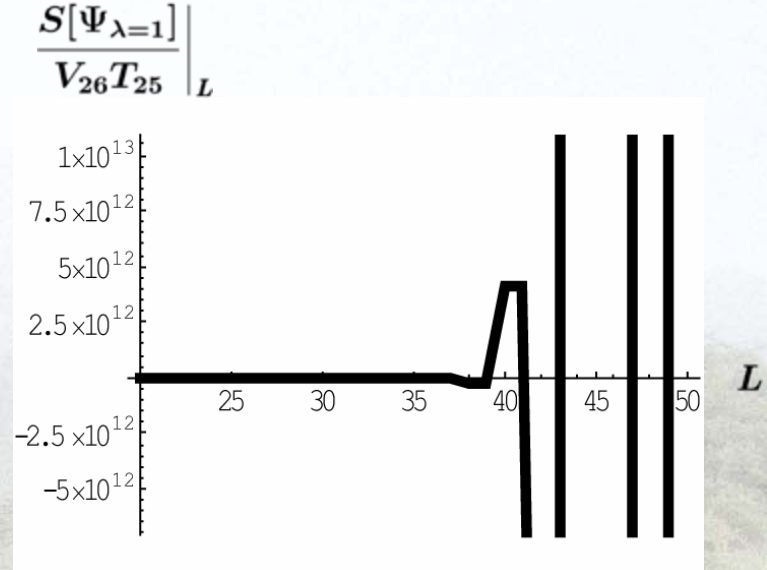
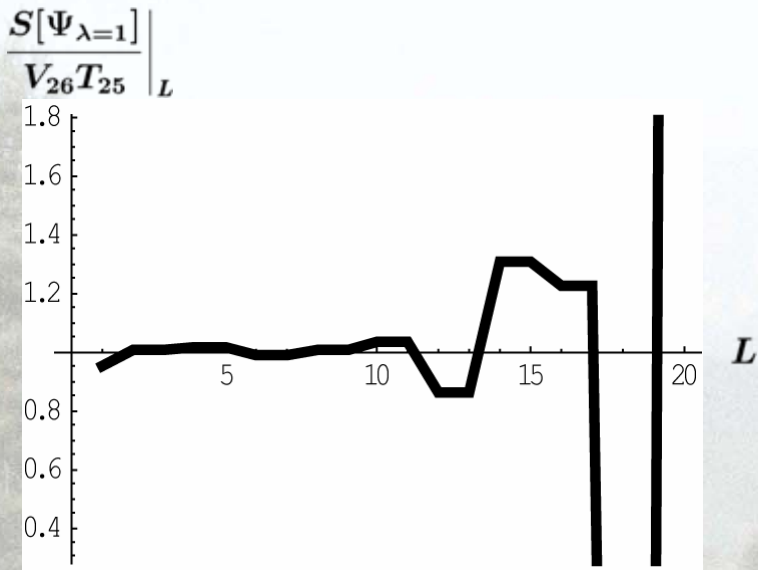
$$-\frac{\pi^2}{3V_{26}} \langle z^{\mathcal{L}_0} \Psi_{\lambda=1}, Q_B z^{\mathcal{L}_0} \Psi_{\lambda=1} \rangle =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \pi^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3\pi^2} - \frac{4}{\pi^2 z^2} + \left(-\frac{1}{90} - \frac{\pi^2}{1920} \right) z^2 + \left(\frac{17}{5040} - \frac{11\pi^2}{17920} - \frac{\pi^4}{193536} \right) z^4 + \right. \\ & \left. \left(-\frac{113}{60480} + \frac{2413\pi^2}{1935360} - \frac{137\pi^4}{5806080} - \frac{\pi^6}{22118400} \right) z^6 + \left(\frac{601}{380160} - \frac{27241\pi^2}{12165120} + \frac{1291\pi^4}{8110080} - \frac{1951\pi^6}{1751777280} - \frac{\pi^8}{2724986880} \right) z^8 + \right. \\ & \left. \left(-\frac{143719}{76876800} + \frac{11201779\pi^2}{2460057600} - \frac{300005\pi^4}{442810368} + \frac{118841\pi^6}{7569408000} - \frac{153511\pi^8}{3099672576000} - \frac{691\pi^{10}}{243465191424000} \right) z^{10} + \right. \\ & \left. \left(\frac{29441}{10063872} - \frac{17571989\pi^2}{1610219520} + \frac{2959153\pi^4}{1073479680} - \frac{1147337\pi^6}{8918138880} + \frac{10323953\pi^8}{8115506380800} - \frac{807701\pi^{10}}{417368899584000} - \frac{\pi^{12}}{47087773286400} \right) z^{12} \right) \\ & + \mathcal{O}(z^{14}) \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi^2}{3V_{26}} \langle z^{\mathcal{L}_0} \Psi_{\lambda \neq 1}, Q_B z^{\mathcal{L}_0} \Psi_{\lambda \neq 1} \rangle =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \pi^2 \left(-\frac{\pi^2 z^2 \lambda^4}{8(-1+\lambda)^4} + \right. \\ & z^3 \left(-\frac{3\lambda^4(1+\lambda)}{2(-1+\lambda)^5} - \frac{\pi^2 \lambda^4(1+\lambda)}{8(-1+\lambda)^5} + \frac{\pi^2 \lambda^3(1+4\lambda+\lambda^2)}{16(-1+\lambda)^5} - \frac{3\lambda^3(2+9\lambda+3\lambda^2)}{8(-1+\lambda)^5} + \frac{\lambda^3(4+19\lambda+7\lambda^2)}{6(-1+\lambda)^5} - \frac{\pi^2 \lambda^3(1+13\lambda+10\lambda^2)}{48(-1+\lambda)^5} + \right. \\ & \left. \frac{\lambda^3(2+17\lambda+11\lambda^2)}{24(-1+\lambda)^5} - \frac{\pi^2 \lambda^3(2+17\lambda+11\lambda^2)}{48(-1+\lambda)^5} \right) + z^4 \left(-\frac{3\lambda^4(1+\lambda)^2}{2(-1+\lambda)^6} - \frac{9\pi^2 \lambda^4(1+\lambda)^2}{32(-1+\lambda)^6} - \frac{2\lambda^4(1+4\lambda+\lambda^2)}{(-1+\lambda)^6} - \right. \\ & \left. \frac{9\pi^2 \lambda^4(1+4\lambda+\lambda^2)}{16(-1+\lambda)^6} + \frac{\pi^4 \lambda^4(1+4\lambda+\lambda^2)}{96(-1+\lambda)^6} + \frac{5\pi^2 \lambda^3(1+11\lambda+11\lambda^2+\lambda^3)}{32(-1+\lambda)^6} - \frac{\pi^2 \lambda^3(5+64\lambda+73\lambda^2+14\lambda^3)}{32(-1+\lambda)^6} \right) \Bigg) + \mathcal{O}(z^5) \end{aligned}$$

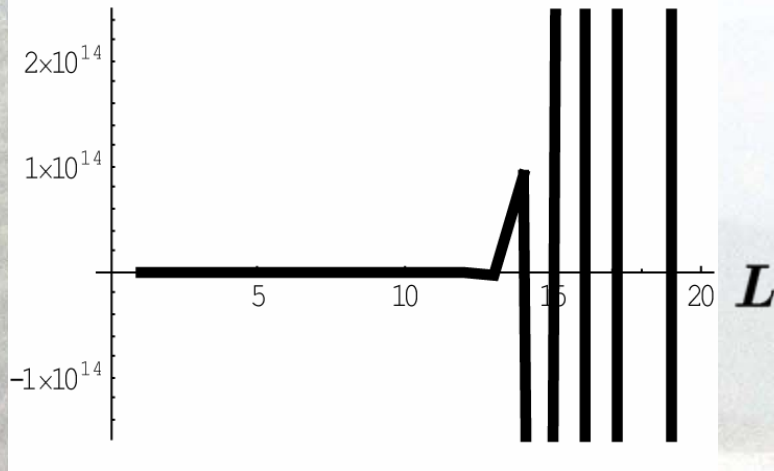
\mathcal{L}_0 -レベル切断による結果 ($\lambda = 1$):



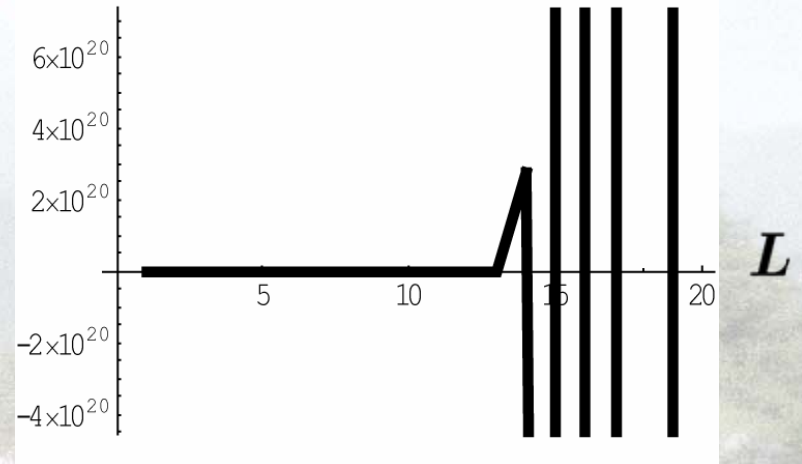
素朴に評価すると途中から発散するが、Padé近似 (z の有理式で近似して $z=1$ で評価) をすると正しい値が出ている。

\mathcal{L}_0 -レベル切断による結果 ($\lambda \neq 1$):

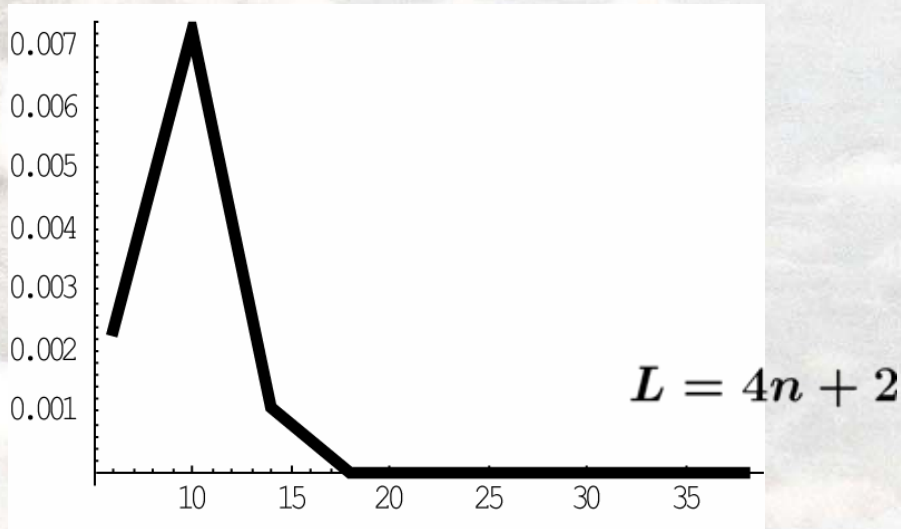
$$\frac{S[\Psi_{\lambda=0.5}]}{V_{26}T_{25}} \Big|_L$$



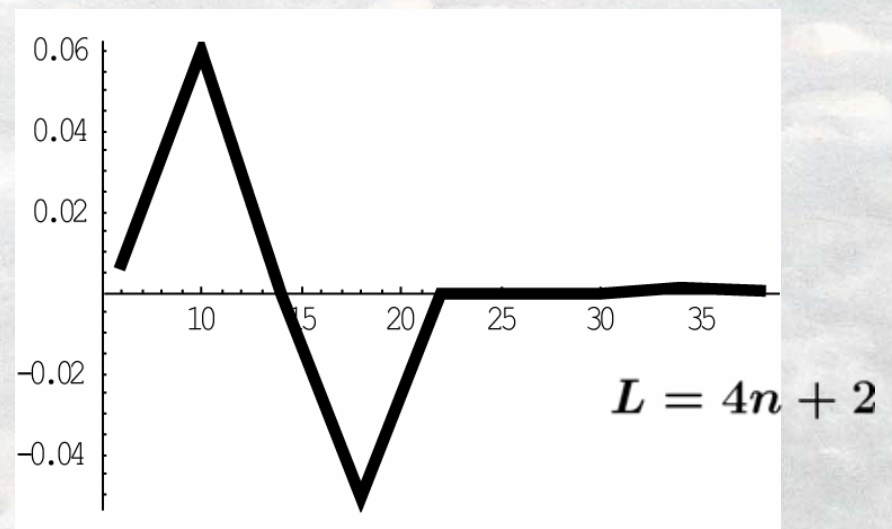
$$\frac{S[\Psi_{\lambda=0.75}]}{V_{26}T_{25}} \Big|_L$$



$$\text{Padé} \left[\frac{S[\Psi_{\lambda=0.5}]}{V_{26}T_{25}} \right]_{2n+2}^{2n}$$



$$\text{Padé} \left[\frac{S[\Psi_{\lambda=0.75}]}{V_{26}T_{25}} \right]_{2n+2}^{2n}$$



Vanishing cohomology

「タキオン真空解」 $\Psi_{\lambda=1}$ のまわりで作用を展開すると

$$S[\Psi_{\lambda=1} + \Psi'] = S[\Psi']|_{Q_B \rightarrow Q'_B} + S[\Psi_{\lambda=1}].$$

新しいBRSTオペレータ Q'_B は

$$Q'_B B = Q_B B + \Psi_{\lambda=1} * B - (-1)^{\text{gh}(B)} B * \Psi_{\lambda=1}.$$

このとき Q'_B の「逆」である弦場 A が存在する:

$$A \equiv \frac{1}{2\mathcal{L}_0} \hat{\mathcal{B}} \mathcal{I} = \frac{\pi}{2} B_1^L \int_1^2 dr |r\rangle,$$
$$Q'_B A = \mathcal{I}.$$

($\mathcal{I} = |r = 1\rangle$ はidentity state)

この A を使うと、

$$Q'_B B = 0$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{I} * B = (Q'_B A) * B = Q'_B (A * B) + A * (Q'_B B) \\ &= Q'_B (A * B). \end{aligned}$$

したがって、 Q'_B のコホモロジーは自明である。

$$\begin{aligned} \ast \quad Q'_B \mathcal{I} &= Q_B \mathcal{I} + \Psi_{\lambda=1} * \mathcal{I} - \mathcal{I} * \Psi_{\lambda=1} \\ &= 0 + \Psi_{\lambda=1} - \Psi_{\lambda=1} = 0 \end{aligned}$$

に注意すると、逆に Q'_B のコホモロジーが自明であるならば、

$$\mathcal{I} = Q'_B A$$

を満たす A が存在する。

コメント

- Takahashi-Tanimotoの解などこれまで知られていた解析解はidentity stateを用いて構成されたものでありpotential heightの計算(正則化)が難しかった。
- Schnablの解はidentity stateを除くwedge stateの列を用いているので、potential heightの値が有限になりえたと思われる。
- それでもSchnablの解でのpotential heightの計算は正則化なしだと条件収束する無限和になる。
- Cohomologyが自明になることの証明はTakahashi-Tanimotoの解(2002)を用いたもの[I.K.-Takahashi(2002)]があり、それは全てのゴースト数を含む空間全体では自明ではなかったが、Ellwood-Schnablの証明では少なくとも形式的には全体で自明である。

まとめと展望

- Wittenの開弦の場の理論の枠組みで、Schnablが構成した解析解はD25ブレーンのテンションの値を丁度与えていることが示された。
- その解のまわりのBRST operatorのcohomologyが自明になっていることが、これをかけてidentity stateになる弦場Aを具体的に構成することにより示された。
- Schnablの解析解はSenの予想における非摂動論的真空をあらわしていると思われる。

- 「解」の最初の表示における直接証明は？
- toy modelの他の解に対応する解は？
- Siegelゲージの数値解やTakahashi-Tanimotoの解との関係は？
- Senの予想の低い次元のDブレーンに対応する解析解は？
- 非BPSブレーン上のBerkovitsのWZW型の超弦の場の理論の解析解は？
- ...
- 弦の場の理論の非摂動論的扱いが可能になりつつある！