MetaStable Supersymmetry Breaking

Teruhiko KAWANO

(University of Tokyo, Hongo)

０．Motivation

なぜ，MetaStable Vacua なのか？

0．Motivation

繰り込み群の考察から，ある理論の
スカラー粒子の質量が，その理論のCut-Off
からあまり離れていないところにあることが
自然であることがわかる（Naturalness）。

それ故，標準模型のHigg粒子の質量から，
この理論のCut-Offが電弱スケールから，
さほど遠いところにはないと考えても良いだろう。

超対称性（SUSY)は，このようなCut-Offを
SUSYの破れのスケールとして与えるができると
期待できる。

しかしながら，SUSYを自発的に破るような
モデルを作ることは一般に難しいことが
知られている。

例えば，Witten Indexは，質量を与えることが
できるVector-likeなゲージ理論ではSUSYが
破れないことを示している。

また，Nelson-Seibergの議論からは，
非常に一般的なSuperpotentialをもつ
理論では，R-Symmetryを持つようなもの
でないとSUSYを破ることは難しいことを
示唆している。 (Nelson-Seiberg, '94)

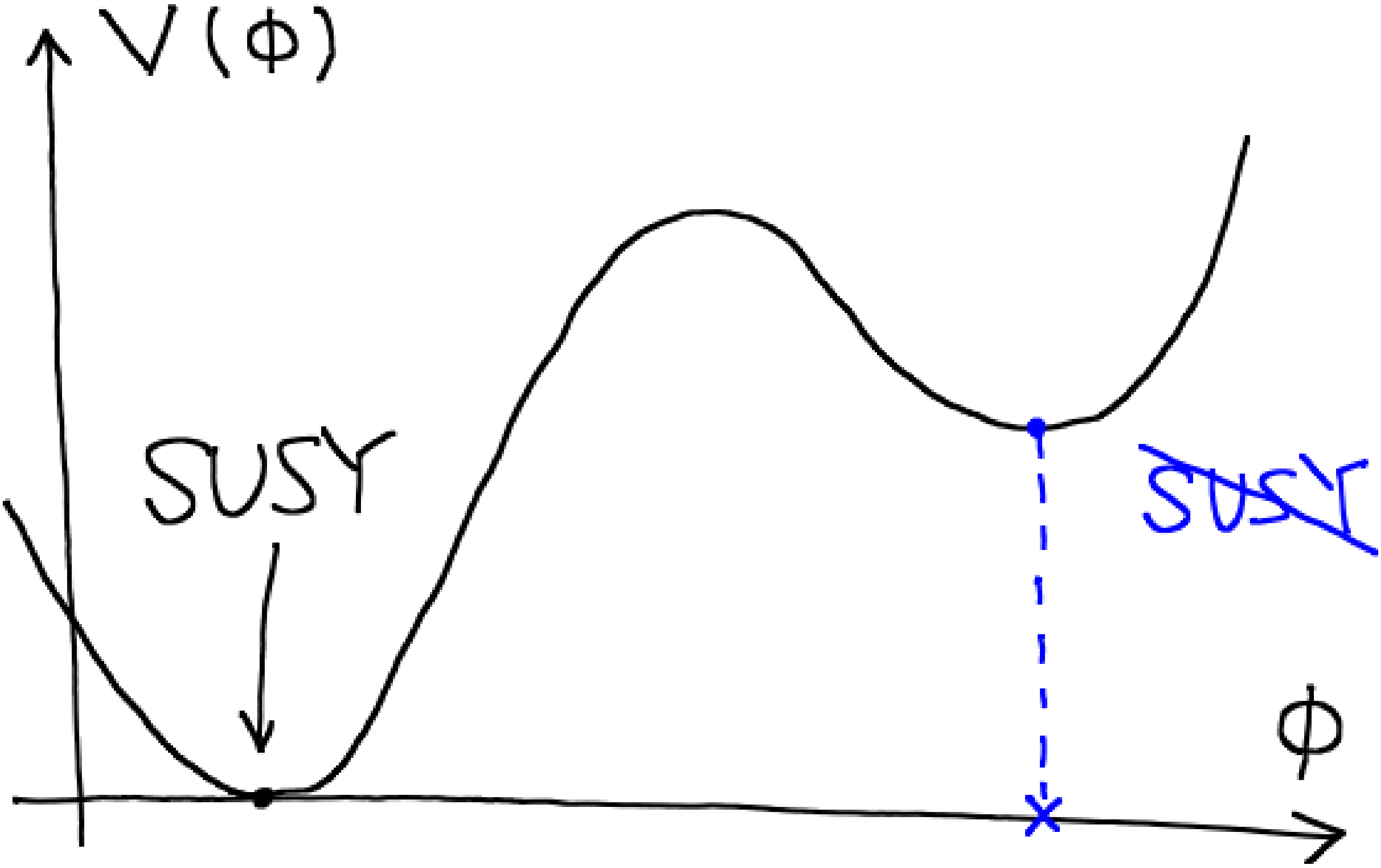
しかしながら，これらのSUSYが破れている
真空は，その理論の最低エネルギー状態に
関するものである。

一方，SUSYを保つような真空を持つ理論は，
必ずしもR-Symmetryがなくても良いし，
たくさん存在する。

したがって，その様な理論がSUSYの破れている
ような真空も持っているとすると，それはSUSYが
破れていることから最低エネルギー状態には
ならない。つまり，Meta-Stableな真空である。

しかしながら，可能性を持つ理論が多く存在
するし，R-Symmetryが必ずしも無いので，
それに伴うNG bosonを気にする必要も無い。

したがって，現象論的なモデルを考える際に，
多くの可能性を手にすることができる。



References:

- Intriligator and Seiberg,
  "Lectures on Supersymmetry Breaking,"
  hep-ph/0702069.

- Intriligator, Seiberg, and Shih,
  "Dynamical SUSY Breaking
  in Meta-Stable Vacua,"
  JHEP 0604: 021, 2006, hep-ph/0602239.

それでは，Meta-Stableな真空について，
Wess-Zumino　Modelを使って考えることにします。

1. First Look at Wess-Zumino Models at Tree Level

* Wess - Zumino Model （古典論）

Lagrangian Density

$$L = \int d^4\theta \, \Phi^\dagger \Phi + \int d^2\theta \, W(\Phi) + \text{c.c.}$$

Superpotential

$$W(\Phi) = \frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{1}{3!} \lambda \Phi^3$$

Potential

$$V(\Phi, \Phi^\dagger) = \left| \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right|^2$$

$$= \left| m\Phi + \frac{1}{2} \lambda \Phi^2 \right|^2$$

SUSY vacua の条件

$$\boxed{F = \frac{\partial W}{\partial \Phi} = 0}$$

$$\Rightarrow \Phi = 0 , \ -\frac{2m}{\lambda}$$

vacuaの条件

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0}$$

$\oplus$

matrix

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \Phi^*} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \Phi^{*2}} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \Phi^*} \end{pmatrix} \equiv M_B^2}$$

が positive definite

ひとつめの条件は、critical points の条件。

ふたつめは、極小であること の条件。

これらは、V の最小値を与える条件では必ずしもないため、一般に、meta-stable になる。

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi}\right)^* \frac{\partial^2 W}{\partial \Phi \partial \Phi}$$

$$= \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi}\right)^* \left[m + \lambda \Phi \right] = 0$$

SUSY vacua は. $\frac{\partial W}{\partial \Phi} = 0$

なので，この条件を満たすが，

それ以外にも

$$\Phi = -\frac{m}{\lambda}$$

という解があることがわかる。

この解は，

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^2} = 0}$$

を満たしている。

ふたつめの条件は、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} = \underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial \Phi}\right)^*}_{\text{1回微分}} \underbrace{\frac{\partial^3 W}{\partial \Phi^3}}_{\text{3階微分}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^* \partial \Phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^2}\right)^* \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^2}\right)}_{\text{2回微分}}$$

より

$$\Phi = -\frac{m}{\lambda}$$

の解での M_B^2 は、

$$M_B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}m^{*2} \\ -\frac{1}{2}m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列 M_B^2 は、

$$\det\begin{pmatrix} x & \frac{1}{2}m^2 \\ \frac{1}{2}m^{*2} & x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{1}{4}|m|^4$$
$$= 0$$

より固有値を

$$x = \pm\frac{1}{2}|m|^2$$

をもつので、残念ながら

positive definite でない。

しかしながら、もう少し
この model をつかって、
今の critical point を
考えることにする。

Superfield $\Phi(\theta,\bar{\theta})$ を components で書くと、

$$\boxed{\Phi = \phi + \sqrt{2}\,\theta\psi + \theta^2 F}$$

このとき、SUSY変換

$$\delta_\epsilon \psi_\alpha = \sqrt{2}\,\epsilon_\alpha F$$

より、

$$\langle F \rangle = \frac{\partial W}{\partial \Phi} \neq 0$$

は、SUSYの破れ（~~SUSY~~）を表わしている。

（※ spinor成分は ψ しかないので、$F=0$ ならば、SUSYは保たれる。）

Φ のスカラー成分 ϕ を

今，考えている"真空"

$$\phi = -\frac{m}{\lambda}$$

のまわりのゆらぎ φ で

$$\phi = -\frac{m}{\lambda} + \varphi$$

として展開すると，

$$
\begin{aligned}
V(\phi, \phi^*) = & \frac{1}{4}\left|\frac{m^2}{\lambda}\right|^2 \\
& + \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right|^2 \varphi^* \varphi \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^* \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3}\right) \varphi^2 \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right) \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3}\right)^* \varphi^{*2} \\
& + \cdots \leftarrow \text{3次の項}
\end{aligned}
$$

今の真空 $\phi = -\frac{m}{\lambda}$ は、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} = 0$$ を満たし、また、

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} = \lambda , \quad \frac{\partial W}{\partial \phi} = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{\lambda}$$

だから

$$V(\phi, \phi^*) - \frac{1}{4}\left|\frac{m^2}{\lambda}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi, \varphi^*)\begin{pmatrix} \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right|^2 & \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)\cdot\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3}\right)^* \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^*\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3}\right) & \left|\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^* \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$+$ (3次以上の項)

$$= \frac{1}{2}(\varphi, \varphi^*)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}m^{*2} \\ -\frac{1}{2}m^2 & 0 \end{pmatrix}}_{= M_B^2}\begin{pmatrix} \varphi^* \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$+$ (3次以上の項)

この mass matrix M_B^2 の

固有値が

$$\pm \frac{1}{2}|m|^2$$

だったことから、

$$\phi = -\frac{m}{\lambda}$$

のまわりでのゆらぎ φ には、

(質量)^2 が負になる tachyonic な方向が含まれていることがわかる。

したがって、この"真空"は、

不安定なので、真空として使えない。

spinor 成分 ψ の mass term は、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right)\psi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right)^* \bar{\psi}^2$$

となっているので、

今の"真空" $\phi = -\frac{m}{\lambda}$ は、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} = 0$$

を満たしているので、

spinor ψ は massless.

これは、Nambu-Goldstone fermion

(一般に Goldstino と呼ばれている。)

に対応していることがわかる。

今調べた、よく見かけるWess-Zumino Modelには、Meta-Stable Vacuaがなかった。

このような Tachyonic Modes のない Wess-Zumino Models を作る可能性はあるか？

2．古典的な Meta-Stable Vacua in Wess-Zumino Models

* 古典論的な Meta-Stable Vacua in Wess-Zumino Models

tachyonic modes が出ないような Wess-Zumino models の meta-stable vacua は存在するか？

n 個の chiral superfields

$$\phi^i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をもつ Wess-Zumino model を考える。

- Kähler Potential

$$K(\phi, \bar{\phi}) = \bar{\phi}^{\bar{i}} \phi^i$$

- Superpotential

$$W(\phi) \quad ; \quad \phi^i \text{ の多項式}$$

$$\Downarrow$$

- Potential

$$V(\phi, \bar{\phi}) = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi^i} \right|^2$$

• ~~SUSY~~ MetaStable Vacua

$$\begin{cases} ① & \dfrac{\partial W}{\partial \phi^i} \neq 0 \\ ② & \dfrac{\partial V}{\partial \phi^i} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial \phi^k}\right)^* \left(\dfrac{\partial W}{\partial \phi^k \partial \phi^i}\right) = 0 \\ ③ & M_B^2 > 0 \quad (\text{positive definite}) \end{cases}$$

このような条件を満たすϕ^iの解をv^iとして、このまわりで、ϕ^iを

$$\phi^i = v^i + \varphi^i$$

と展開して、Vを展開すると、

$$V(\phi, \bar{\phi}) = V(v, \bar{v}) + \frac{1}{2}(\varphi^i, \bar{\varphi}^{\bar{i}}) M_B^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^{\bar{j}} \\ \varphi^j \end{pmatrix} + \cdots$$

となって、

$$M_B^2 = \left(\begin{array}{c|c} W_{ik}\cdot \overline{W}_{\bar{k}\bar{j}} & \overline{W}_{\bar{k}}\cdot W_{kij} \\ \hline W_k\cdot \overline{W}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}} & \overline{W}_{\bar{i}\bar{k}}\cdot W_{kj} \end{array}\right)$$

ここで

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \phi^i}, \quad W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^i \partial \phi^j}, \quad \text{etc.}$$

これから示すことは，条件①，②を満たす，Potential V の critical points に対して，一般に，条件③は，満たせずに，古典的な Flat な方向がでてしまうことである。

（S. Ray，0607172）

まず，Flat な方向が

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^i &= \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^i}(v)\right)^* \cdot X = \overline{W}_{\bar{i}} \cdot X \\ \bar{\varphi}^{\bar{i}} &= W_i(v) \cdot \bar{X} \end{aligned}}$$

で与えられることをまず示す。

（X は chiral superfield のスカラー成分）

~~SUSY~~ metastable vacua の条件①から，

$$W_i(v) \neq 0$$

なので，この方向は必ず存在する。

そこで、Potential V の mass 項に代入すると、

条件②が $\bar{W}_{\bar{k}} \cdot W_{ki} = 0$

だったので。

$$(\varphi^i, \bar{\varphi}^{i})\, M_B^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^{\bar{j}} \\ \varphi^j \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{W}_{\bar{i}} X, W_i \bar{X})\, M_B^2 \begin{pmatrix} W_j \bar{X} \\ \bar{W}_{\bar{j}} X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_{ik} \bar{W}_{\bar{k}\bar{j}} & \bar{W}_{\bar{k}} \cdot W_{kij} \\ W_k \cdot \bar{W}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}} & \bar{W}_{\bar{i}\bar{k}} \cdot W_{kj} \end{pmatrix}$$

$$= (\varphi^i, \bar{\varphi}^{\bar{i}}) \begin{pmatrix} W_{ik} \bar{W}_{\bar{k}\bar{j}} W_j & \bar{W}_{\bar{k}} W_{kij} \bar{W}_{\bar{j}} \\ W_k \cdot \bar{W}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}} W_j & \bar{W}_{\bar{i}\bar{k}} \cdot W_{kj} \bar{W}_{\bar{j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ X \end{pmatrix}$$

$$= (\varphi^i, \bar{\varphi}^{\bar{i}}) \begin{pmatrix} 0 & \bar{W}_{\bar{k}} W_{kij} \bar{W}_{\bar{j}} \\ W_k \cdot \bar{W}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}} W_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ X \end{pmatrix}$$

$$
= (x, \bar{x}) \left(\begin{array}{c|c} 0 & W_{ijk}\bar{W}_i\bar{W}_j\bar{W}_k \\ \hline \bar{W}_{ijk}W_iW_jW_k & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x \end{pmatrix}
$$

この行列が負の固有値をもたないためには、

$$
\boxed{F = W_{ijk}\bar{W}_i\bar{W}_j\bar{W}_k = 0}
$$

でなくてはならない。

さらに，mass matrix $\mathcal{M}_B^2$ は，

任意の方向 φ^i に対して，正定値でなくてはならないので，方向ベクトル

$\bar{W}_{\bar{i}}(\bar{v})$ に直交するベクトル e^i を

$$e^i \cdot W_i(v) = 0$$

もってきて，

$$\varphi^i = \bar{W}_{\bar{i}}(\bar{v})\, X + e^i \xi$$

を，

$$(\varphi^i, \bar{\varphi}^{\bar{i}})\, \mathcal{M}_B^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^{\bar{j}} \\ \varphi^j \end{pmatrix}$$

に代入すると，

$$= (x, \bar{x}, \xi, \bar{\xi})\, M^2 \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \\ \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & 0 & F \\ & & \bar{F} & 0 \\ \hline 0 & F & |M|^2 & m^2 \\ \bar{F} & 0 & m^{*2} & |M|^2 \end{array}\right)$$

ここで

$$\begin{cases} F = e^k W_{kij} \bar{W}_{\bar{i}} \bar{W}_{\bar{j}} . \\ |M|^2 = W_{ki} \bar{W}_{\bar{k}\bar{j}} e^i \bar{e}^{\bar{j}} , \\ m^2 = \bar{W}_{\bar{k}} W_{kij} e^i e^j \end{cases}$$

となるので、

M^2 の固有値は,

$$\frac{|M|^2+|m|^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{|M|^2+|m|^2}{2}\right)^2 + |F|^2},$$

$$\frac{|M|^2-|m|^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{|M|^2-|m|^2}{2}\right)^2 + |F|^2},$$

となる。

$|F| \neq 0$ だと負の固有値を含むので,

$$F = e^k W_{kij} \overline{W_i} \overline{W_j} = 0$$

が必要.

e^k は, $e^k W_k = 0$ を満たす任意の方向だったので, 前の条件とあわせて

$$\boxed{W_{kij} \overline{W_i} \overline{W_j} = 0}$$

が必要.

今の結果

$$W_{kij}\,\overline{W_{\bar{i}}}\,\overline{W_{\bar{j}}} = 0$$

と条件②

$$\overline{W_{\bar{k}}}\,W_{kj} = 0$$

より Superpotential $W(\phi)$

と.

$$\varphi^i = \overline{W_{\bar{i}}}\,X + e^i_a\,\xi^a$$

$$(\, e^i_a \cdot W_i = 0 \,)$$

として.展開すると.

$$\dot{W}(\phi) - W(v)$$

$$= W_i \varphi^i + \frac{1}{2} W_{ij} \varphi^i \varphi^j + \frac{1}{3!} W_{ijk} \varphi^i \varphi^j \varphi^k + \cdots$$

$$= W_i \left(\bar{W}_{\bar{i}} X + e^i_a \xi^a \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{W}_{ij} \left(\bar{W}_{\bar{i}} X + e^i_a \xi^a \right)\left(\bar{W}_{\bar{j}} X + e^j_b \xi^b \right)$$

$$+ \frac{1}{3!} W_{ijk} \left(\bar{W}_{\bar{i}} X + e^i_a \xi^a \right)\left(\bar{W}_{\bar{j}} X + e^j_b \xi^b \right) \times \left(\bar{W}_{\bar{k}} X + e^k_a \xi^c \right)$$

$$+ \cdots$$

$$= |W_i|^2 X + \frac{1}{2} W_{ij} e^i_a e^j_b \xi^a \xi^b$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{k}} W_{kij} e^i_a e^j_b X \xi^a \xi^b$$

$$+ \frac{1}{3!} W_{ijk} e^i_a e^j_b e^k_c \xi^a \xi^b \xi^c$$

$$+ \cdots$$

となり，meta-stable vacua の
条件 ①，② から，変数変換で，
Superpotentialを，

$$\boxed{\begin{aligned} &W(X,\xi) \\ &= \Lambda^2 X + \frac{1}{2}(m_{ab} + f_{ab} X)\xi^a \xi^b \\ &\quad + \frac{1}{3!}\lambda_{abc}\xi^a\xi^b\xi^c + \cdots \end{aligned}}$$

という形にもっていけることがわかった。

これから，Potentialが

$$V = \left|\Lambda^2 + \frac{1}{2} f_{ab}\xi^a\xi^b + \cdots\right|^2$$
$$+ \left|(m_{ab} + f_{ab}X)\xi^b + \frac{1}{2}\lambda_{abc}\xi^b\xi^c\right|^2$$

だから，今，考えている"真空" $\xi^a = 0$
では，くりこみ可能な理論なら
・・・の項がないので，flatな方向
にXがなっていることがわかる。

今，得られた理論がくりこみ可能だとすると，場の3次までで Superpotential が与えられるので，

$$
\begin{cases}
W = \Lambda^2 X + \frac{1}{2}(m_{ab} + f_{ab} X)\phi^a \phi^b \\
\quad + \frac{1}{3!}\lambda_{abc}\phi^a \phi^b \phi^c \\
K = \bar{X} X + \bar{\phi}^a \phi^a
\end{cases}
$$

となっていることがわかる。

今考えている critical point は，

$$
\phi^a = 0, \quad X \text{ ; 任意}
$$

である。

このとき，W は X に関して linear なので，

$$
W_{XX} = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0
$$

となり，X の spinor 成分が

Nambu-Goldstone Fermion

になる。

ここでわかったことは、

繰り込み可能なWess-Zumino Modelsでは、
SUSY Breaking Meta-Stable Vacua
は、Tachyonic Modesのないようにできるが、

少なくとも一つのFlatな方向 X が
存在するために、ちゃんとした極小点に
なっていないことがわかる。

それでは、どのような繰り込み可能な
Wess-Zumino ModelsもSUSYを破るような
Meta-Stable Vacuaを持たないのであろうか？

3. Wess-Zumino Models at One-Loop Level

* Wess-Zumino Models at one-loop level

先程の model は. Superpotential

$$W = \Lambda^2 X + \frac{1}{2}(m_{ab} + f_{ab} X)\phi^a\phi^b + \frac{1}{3!}\lambda_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c$$

からわかるように, "真空" $\phi^a = 0$ を考えると, エネルギースケール E

$$E \lesssim m_{ab} + f_{ab} X$$

では. ϕ^a は. massive になるので. integrate out することになるが, それぞれ.

$$m_{ab} + f_{ab} X$$

という mass をもっているので.

結果として. X の potential がでてくる。

この X に関する potential を、
1-loop レベルで求めることにする。 (Coleman-Weinberg '73)

一般に、N 個の complex bosons φ_i に対して、Lagrangian を

$$L_B = -|\partial_\mu \varphi_i|^2 - M_{ij}^2 \varphi_i \varphi_j^* - \frac{1}{2} m_{ij}^2 \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} m_{ij}^{*2} \varphi_i^* \varphi_j^*$$

$$= \frac{1}{2} (\varphi_i^*, \varphi_i) \begin{pmatrix} \partial_\mu^2 \delta_{ij} - M_{ji}^2 & -m_{ij}^2 \\ -m_{ij}^{*2} & \partial_\mu^2 \delta_{ij} - M_{ij}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \varphi_j^* \end{pmatrix}$$

として、

$$\int \prod_{i=1}^{N} \frac{dz_i dz_i^*}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2} z^\dagger N z} = \sqrt{\frac{1}{\det N}}$$

の無限次元 version をつかうと

$$\int \prod_{i=1}^{N} \left[d\varphi_i \, d\varphi_i^{\dagger} \right] e^{i \int L_B \, d^4x}$$

$$\doteq \sqrt{\frac{1}{\mathrm{Det}\left[(p^2 + \mathcal{M}_B^2)\, \delta^4(p+q) \right]}}$$

$$\doteq e^{-\frac{i}{2} V_{3+1} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \mathrm{tr} \ln (p^2 + \mathcal{M}_B^2)}$$

$$\mathcal{M}_B^2 \equiv \begin{pmatrix} M_{ji}^2 & m^2{}_{ij} \\ m^{*2}{}_{ij} & M^2{}_{ij} \end{pmatrix}$$

となるので、effective potential は、

$$V_B = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \mathrm{tr} \ln (p_E^2 + \mathcal{M}_B^2)$$

ここで、momentum p_μ を Euclid 化して、p_E とした。

同じことを n 個の Majorana Fermions ψ_i $(i=1,\cdots,n)$

に対して、行うと、Lagrangian

$$L_F = -i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i$$
$$-\frac{1}{2} m_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2} m^*_{ij}\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j$$

より、Gaussian Integral

$$\int d\xi_{2n}\cdots d\xi_1 \, e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j}\xi_i M_{ij}\xi_j}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\epsilon_{i_1 i_2\cdots i_{2n-1} i_{2n}} M_{i_1 i_2}\cdots M_{i_{2n-1} i_{2n}}$$

$$= \mathrm{Pf}(M) = \sqrt{\det(M)}$$

をつかって、

$$\int [d\bar{\Psi}_i d\Psi_i]\, e^{i\int L_F d^4x}$$

$$= \sqrt{\mathrm{Det}\left[M(p)\,\delta^4(p+q)\right]}$$

$$= e^{\frac{i}{2} V_{3+1} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \mathrm{tr} \ln M(p)}$$

$$\equiv e^{-iV_F}$$

ここで、

$$M(p) \equiv \begin{pmatrix} m_{ij} & -\delta_{ij}\sigma^\mu p_\mu \\ -\delta_{ij}\bar{\sigma}^\mu p_\mu & m^*_{ij} \end{pmatrix}$$

よって effective potential は、

$$V_F = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \mathrm{tr} \ln (p_E^2 + M_F^2)$$

$$M_F^2 = \begin{pmatrix} m_{ik}\bar{m}_{kj} & 0 \\ 0 & m^*_{ik} m_{kj} \end{pmatrix}$$

これら２つをあわせると

$$V = V_B + V_F$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4}\left[\mathrm{tr}\ln\left(p_E^2 + M_B^2\right) - \mathrm{tr}\ln\left(p_E^2 + M_F^2\right) \right]$$

$$\doteqdot \mathrm{Const.} \times \Lambda^2\, \mathrm{tr}\left[M_B^2 - M_F^2 \right] + \frac{1}{64\pi^2}\left[\mathrm{tr}\, M_B^4 \ln\left(\frac{M_B^2}{\Lambda^2}\right) - \mathrm{tr}\, M_F^2 \ln\left(\frac{M_F^2}{\Lambda^2}\right) \right]$$

ここで、Λ は cut off.

Supersymmetricな理論では、

tree-level potentialは、

$$V = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2$$

なので、$\phi_i = v_i + \varphi_i$ として、

展開すると、φ_i, φ_i^* の2次の項が

M_B^2 を与える。

$$V = |W_i(v)|^2 + W_{ki} W_{kj}^* \varphi_i \varphi_j^*$$
$$+ \frac{1}{2} W_k^* W_{kij} \varphi_i \varphi_j$$
$$+ \frac{1}{2} W_k W_{kij}^* \varphi_i^* \varphi_j^* + \cdots$$

より、

$$M_B^2 = \begin{pmatrix} W_{ki}^* W_{kj} & W_k W_{kij}^* \\ W_k^* W_{kij} & W_{ki} W_{kj}^* \end{pmatrix}$$

また、spinor 成分 ψ_i に対しては、mass 項が、

$$\frac{1}{2} W_{ij}(v)\, \psi_i \cdot \psi_j + \frac{1}{2} W^*_{ij}(v)\, \bar{\psi}_i \cdot \bar{\psi}_j$$

となるので、

$$M_F^2 = \begin{pmatrix} W_{ki} W^*_{kj} & 0 \\ 0 & W^*_{ki} W_{kj} \end{pmatrix}$$

であることがわかり、

$$\mathrm{tr}\left[M_B^2 - M_F^2 \right] = 0$$

から、effective potential V の
2次発散 $\sim \Lambda^2$ の項が消える
ことがわかる。

まとめると.

Coleman-Weinberg Potential は.

$$\boxed{V = \frac{1}{64\pi^2}\left[\mathrm{tr}\, M_B^4 \ln\left(\frac{M_B^2}{\Lambda^2}\right) - \mathrm{tr}\, M_F^4 \ln\left(\frac{M_F^2}{\Lambda^2}\right)\right]}$$

$$M_B^2 = \left(\begin{array}{c|c} W_{ik}\overline{W}_{\bar{k}\bar{j}} & \overline{W}_{\bar{k}} W_{kij} \\ \hline W_k \cdot \overline{W}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}} & \overline{W}_{\bar{i}\bar{k}} \cdot W_{kj} \end{array}\right)$$

$$M_F^2 = \left(\begin{array}{c|c} W_{ik}\overline{W}_{\bar{k}\bar{j}} & 0 \\ \hline 0 & \overline{W}_{\bar{i}\bar{k}} \cdot W_{kj} \end{array}\right)$$

と与えられることがわかる。

この 1-loop potential を用いて、先程の model のいくつかの例で、Flat方向 X がどうなるかを見ることにする。

<u>例1</u> "minimal" model

$$\begin{cases} K = \bar{X}X + \bar{\Phi}\Phi, \\ W = \Lambda^2 X + \frac{1}{2} f X \phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 \end{cases}$$

これは、

$$\begin{cases} W_X = \Lambda^2 + \frac{1}{2} f \phi^2 \\ W_\phi = \left(fX + \frac{\lambda}{2}\phi \right)\phi \end{cases}$$

$$W_{XX} = 0$$

なので、

① SUSY vacua

$$\begin{cases} \phi = \pm\sqrt{-\frac{2}{f}\Lambda^2} \\ X = \mp\frac{\lambda}{2f}\sqrt{-\frac{2}{f}\Lambda^2} \end{cases}$$

② meta-stable vacuum

$\phi = 0$; X : 任意

$$\begin{cases} W_X = \Lambda^2 \neq 0 \\ W_\phi = W_{XX} = 0 \end{cases}$$

このとき,

$$M_B^2 = \begin{pmatrix} |fX|^2 & f\bar{\Lambda}^2 \\ \bar{f}\Lambda^2 & |fX|^2 \end{pmatrix}$$

$$M_F^2 = \begin{pmatrix} |fX|^2 & 0 \\ 0 & |fX|^2 \end{pmatrix}$$

より、chiral superfield Φ の

スカラー成分の mass^2

$$m_0^2 = |fX|^2 \pm |f\Delta^2|$$

スピナー成分の mass^2

$$m_{1/2}^2 = |fX|^2,\ |fX|^2$$

スカラー成分が tachyonic にならないためには、

$$|fX|^2 > |f\Delta^2|$$

が必要。

したがって、Coleman-Weinberg potential は、

$$V_{CW} = \frac{1}{64\pi^2}\Bigg[\left(|fX|^2 + |f\Delta^2|\right)^2 \times \ln\left[\frac{|fX|^2 + |f\Delta^2|}{M_0^2}\right] + \left(|fX|^2 - |f\Delta^2|\right)^2 \times \ln\left[\frac{|fX|^2 - |f\Delta^2|}{M_0^2}\right] - 2|fX|^4 \ln\left[\frac{|fX|^2}{M_0^2}\right]\Bigg]$$

これは、tachyon を避けるため、

$$\frac{|f\Delta^2|}{|fX|^2} < 1$$

でのみ有効。しかし、V_{CW} は、X の増加関数となっている。

このことは、1-loop potential によって、$|X|$ が小さくなる方向になるため、Φ の1つの mode が tachyonic になる。そこから、SUSY vacua に落ちるだろう。

よって、例1は、meta-stable vacua になっていない。

例2　(deformed) O'Raifeartaigh model

$$\begin{cases} K = \bar{X}X + \bar{\Phi}_1\Phi_1 + \bar{\Phi}_2\Phi_2 \\ W = \Lambda^2 X + \frac{1}{2} f X \Phi_1^2 + m\Phi_1\Phi_2 \\ \qquad + \underbrace{\frac{\lambda}{3!}\Phi_2^3} \end{cases}$$

→ このあたりが deformed.

$$\begin{cases} W_X = \Lambda^2 + \frac{1}{2} f \Phi_1^2 \\ W_{\Phi_2} = m\Phi_1 + \frac{1}{2}\lambda\Phi_2^2 \\ W_{\Phi_1} = f X \Phi_1 + m\Phi_2 \end{cases}$$

① SUSY Vacua.

$\lambda = 0 \Rightarrow$ No SUSY Vacua

$\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} \Phi_1^2 = -\frac{2}{f}\Lambda^2, \quad X = -\frac{m\Phi_2}{f\Phi_1} \\ \Phi_2^2 = -\frac{2}{\lambda} m\Phi_1 \end{cases}$$

② ~~SUSY~~ meta-stable vacua

$\phi_1 = \phi_2 = 0$, X ; 任意.

∵) $W_{\phi_1} = W_{\phi_2} = 0$ なので.

$$W_{X\phi_1} = f\phi_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = (W_X)^* W_{X\phi_1} = 0$$

$W_{XX} = W_{X\phi_2} = 0$ より.

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial \phi_2} = 0. \qquad \square$$

このとき, W の 2階微分は.

$$W_{\phi_1\phi_1} = fX, \quad W_{\phi_1\phi_2} = m$$

だけが non-zero で.

M_B^2 の"非対角成分"は.

$$(W_X)^* W_{X\phi_1\phi_1} = \Lambda^{*2} \cdot f$$

のみ non-zero

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc|cc} |m|^2+|fX|^2 & fXm^* & f^*\Lambda^2 & \\ f^*X^*m & |m|^2 & & 0 \\ \hline f\Lambda^{*2} & & |m|^2+|fX|^2 & fXm^* \\ & 0 & f^*X^*m & |m|^2 \end{array}\right) & \begin{array}{c}\phi_1^*\\ \phi_2^*\\ \phi_1\\ \phi_2\end{array} \\ \begin{array}{cccc}\phi_1 & \phi_2 & \phi_1^* & \phi_2^*\end{array} & \end{array}$$

スカラー成分の mass

$$m_0^2 = |m|^2 + \frac{1}{2}\left(|fX|^2 \pm |f\Lambda^2|\right) \pm' \sqrt{|m|^2|fX|^2 + \frac{1}{4}\left(|fX|^2 \pm |f\Lambda^2|\right)^2}$$

スピナー成分の mass

$$m_{1/2}^2 = |m|^2 + \frac{1}{2}|fX|^2 \pm \sqrt{|m|^2|fX|^2 + \frac{1}{4}|fX|^4}$$

（2重に縮退）

$X \sim 0$ あたりで安定化すること

を期待して．

$$|fX|^2 \ll |f\Lambda^2|$$

として．m_0^2 を展開すると，

$$m_0^2 \simeq |m|^2 \left(1 \pm \frac{|fX|^2}{|f\Lambda^2|}\right),$$

$$(|m|^2 \pm |f\Lambda^2|)\left(1 \pm \frac{|fX|^2}{|f\Lambda^2|}\right).$$

となるので，tachyon を

避けるため

$$|m|^2 > |f\Lambda^2|$$

が必要である。

そこで、

$\dfrac{|fX|^2}{|f\Delta^2|}$ の1次の項で、

$\dfrac{|f\Delta^2|}{|m|^2}$ に関して展開すると、

Coleman-Weinberg potential $V_{C.W.}$ は、

$$\frac{1}{64\pi^2}\left[\Sigma m_0^4 \log m_0^2 - \Sigma m_{1/2}^4 \log m_{1/2}^2\right]$$

$$= \text{const.} + \frac{1}{48\pi^2}\left|\frac{f^2\Delta^2}{m}\right|^2 |X|^2$$

$$+ \cdots$$

となって、Flat方向であった

X方向が持ち上って安定化

した。

(Huq, '76)

このように，Wess-Zumino Modelsでは，
Meta-Stable Vacuaは，古典的には、
少なくとも１つはFlatな方向 X を
持っていたが，１-loopレベルまで考慮すると，
この方向が持ち上がって安定化することが
あることがわかった。

このような例の一つが，教科書に出てくる
O'Raifeartaigh Modelである。このモデルの
deformed versionは，SUSY Vacuaを持つ。
しかし，Meta-Stable Vacuaは，このdeform-
ationに左右されていないことがわかる。

他の例は，最近，Intriligator, Seiberg,
Shihが見つけたモデル（ISS Model）である。
このモデルも一種のO'Raifeartaigh Model
であるが，そのSUSY Breakingの仕組みは，
Rank Conditionと呼ばれている。

4. Rank Condition

* Rank Condition

$M^i{}_j$: $n \times n$ chiral superfields

$A^i{}_b$: $n \times m$ 〃

$B^a{}_j$: $m \times n$ 〃

Superpotential

$$W = \mathrm{tr}\left[M^i{}_j \left(\Lambda^2 \delta^j{}_i - A^j{}_a B^a{}_i \right) \right]$$

SUSY condition

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial M^j{}_i} = \Lambda^2 \delta^i{}_j - A^i{}_a B^a{}_j = 0}$$

$n > m$ のとき，行列 $A^i{}_a B^a{}_j$ の rank が m であるので，この条件を満たせない。
(rank condition)

ex. $n=2$, $m=1$ の時.

$$\begin{cases} (A^i{}_b) = (A^1, A^2) \\ (B^a{}_j) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

rank condition

$$\begin{pmatrix} \Lambda^2 & 0 \\ 0 & \Lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 B_1 & A^1 B_2 \\ A^2 B_1 & A^2 B_2 \end{pmatrix}$$

$$(A^1 B_1)(A^2 B_2) = (\Lambda^2)^2$$

$$\parallel$$

$$(A^1 B_2)(A^2 B_1) = 0$$

矛盾.

SUSY Breaking.

Kähler Potential

$$K = |M^i{}_j|^2 + |A^i{}_a|^2 + |B^a{}_j|^2$$

Meta-Stable Vacua

$$M^i{}_j = 0$$

$$A^i{}_b = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \Lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda \\ \hline & 0 & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\Lambda\\ \ddots\\ \Lambda\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{0}\right\} n-m \end{array}$$

$$B^a{}_j = \left(\begin{array}{ccc|c} \Lambda & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \Lambda & \end{array}\right)$$

$\because)$

$$\frac{\partial W}{\partial A^j{}_a} = B^a{}_i M^i{}_j = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial B^b{}_i} = M^i{}_j A^j{}_b = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial M^i{}_j} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 0 & \\ \hline & 0 & & \Delta^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \Delta^2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{m} & \underbrace{\hphantom{xxxxx}}_{n-m} \end{array} & \end{array}$$

$$\neq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial A^k{}_a \, \partial M^i{}_j} = - \delta^j{}_k \, B^a{}_i \\[2ex] \dfrac{\partial^2 W}{\partial B^a{}_k \, \partial M^i{}_j} = - A^j{}_a \, \delta^k{}_i \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial A^k{}_a} = \left(\frac{\partial W}{\partial M^i{}_j}\right)^* \left(\frac{\partial^2 W}{\partial A^k{}_a \, \partial M^i{}_j}\right)$$

$$= - (\Delta^*)^2 \sum_{i,j = n-m}^{n} \delta^j{}_k \, B^a{}_i$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial B^a{}_k} = 0 \qquad \square$$

このとき、Global Symm.

$$SU(n) \times SU(m) \times U(1)_B \times U(1)_R$$

は、この meta-stable vacuum で、

$$SU(n-m) \times SU(m)_D \times U(1)'_B \times U(1)_R$$

に破れる。ただし、

$U(1)_B$.

$$\begin{cases} A^i{}_b \mapsto e^{i\alpha} A^i{}_b \\ B^a{}_j \mapsto e^{-i\alpha} B^a{}_j \end{cases}$$

$U(1)_R$

$$\begin{cases} M^i{}_j(\theta) \mapsto e^{2i\alpha} M^i{}_j(e^{-i\alpha}\theta) \\ A^i{}_b(\theta) \mapsto A^i{}_b(e^{-i\alpha}\theta) \\ B^a{}_j(\theta) \mapsto B^a{}_j(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases}$$

Potential

$$V = \left|\frac{\partial W}{\partial A}\right|^2 + \left|\frac{\partial W}{\partial B}\right|^2 + \left|\frac{\partial W}{\partial M}\right|^2$$

より.

$$M^i{}_j = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} Y & Z \\ \hline \tilde{Z} & X \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array}$$

$$A^i{}_b = \left(\begin{array}{c} \Delta \mathbb{1}_m + x \\ \hline \rho \end{array}\right)$$

$$B^a{}_j = \left(\begin{array}{c|c} \Delta \mathbb{1}_m + \tilde{x} & \tilde{\rho} \end{array}\right)$$

とすると

$$\left|\frac{\partial W}{\partial A^j{}_a}\right|^2 = |B^a{}_i M^i{}_j|^2$$

$$\sim \left| \left(\begin{array}{c|c} \Delta Y & \Delta Z \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \cdots \right|^2$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial B^i{}_b}\right|^2 \sim \left| \left(\begin{array}{c|c} \Delta Y & 0 \\ \hline \Delta \tilde{Z} & 0 \end{array}\right) + \cdots \right|^2$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial M^i{}_j}\right|^2$$

$$= \left| \left(\begin{array}{c|c} -\Delta(\chi+\tilde{\chi}) & -\Delta\rho \\ \hline -\Delta\tilde{\rho} & \Delta^2 - \tilde{\rho}\rho \end{array} \right) + \cdots \right|^2$$

Global Symm. の破れに

ともなう Nambu-Goldstone bosons

の他に Flat方向として、

$$M^i{}_j = \left(\begin{array}{c|c} Y & Z \\ \hline \tilde{Z} & X \end{array}\right)$$

$$A^i{}_b = \left(\begin{array}{c} \Delta \mathbb{1}_m + \chi \\ \hline \rho \end{array}\right)$$

$$B^a{}_j = \left(\begin{array}{c|c} \Delta \mathbb{1}_m + \tilde{\chi} & \tilde{\rho} \end{array}\right)$$

としたとき、

$$X, \quad \mathrm{Re}(\chi - \tilde{\chi}^T)$$

がFlat方向になるが、Coleman-Weinberg Potentialで安定化する。

例1 $\mathcal{N}=2$ $U(N_c)$ QCD

- Global Symm. $U(n)$ をゲージ化.

$\mathcal{N}=2$ Vector Multiplet

(W_α, Φ)

$\mathcal{N}=2$ Hyper Multiplet

$(\tilde{Q}^i, Q_i)$ $(i=1,\cdots,N_f)$

Superpotential ($\mathcal{N}=1$ の意味で)

$$W_{\mathcal{N}=2} = \tilde{Q}^i \Phi Q_i$$

$$\oplus$$

$\mathcal{N}=2$ Fayet-Illipoulos term

$$W_{FI} = \Lambda^2 \,\mathrm{tr}\,\Phi$$

superpotential

$$W = \mathrm{tr}\left[\Phi\left(\Lambda^2 + Q_i \tilde{Q}^i\right)\right]$$

より、これは、$N_c > N_f$ のとき、rank condition が満たされる。

特に、$N_c = 2$, $N_f = 1$ では、Gauge Symm. $U(2)$ が $U(1)$ に破れて、摂動計算が信頼できるので、1-loop ポテンシャルを使って、meta-stable vacua を確証できる。

例2　$\mathcal{N}=1$ $SU(N_c)$ QCD

(ISS, '06)

- Global Symm. $SU(m)$をゲージ化

Matters

N_f Fundamentals

$(\tilde{Q}^i, Q_i)$　$(i=1,\cdots,N_f)$

Gauge singlets

$M^i{}_j$　$(i,j=1,\cdots,N_f)$

Superpotential

$$W = \mathrm{tr}\left[M^i{}_j\left(\Lambda^2\delta^i_j - Q^i\tilde{Q}_j\right)\right]$$

- $N_f > N_c$ のとき.
  Rank Condition が満たされる。
- $N_f > 3N_c$ のとき.
  IR free になるので. 全ての計算が摂動論で行なえる。
  Coleman-Weinberg Potential の計算が信頼できる。
- 一見すると, SUSY Breaking Vacuum しかないように見えるが, 実は. non-perturbative 効果まで考えると, SUSY Vacua が存在する。

SUSY vacua.

$$\boxed{\begin{gathered} M^i{}_j = M\delta^i{}_j \\ M \gg \Lambda \\ Q^i = 0, \quad \tilde{Q}_j = 0 \end{gathered}}$$

このとき, Fundamentals

$(\tilde{Q}_i, Q^i)$ は massive なので

integrate out すると, pure

$SU(N_c)$ Y.-M. theory になって

gaugino condensation

$$\langle W^\alpha W_\alpha \rangle \sim \Lambda_L^3$$

を起こす。

1 - loop matching condition

$$\Lambda_L^{3N_c} = \Lambda_{QCD}^{3N_c - N_f} \det (M^i{}_j)$$

より，gaugino condensation

は，superpotential に，

$$W_{dyn.} \sim \Lambda_L^3$$

$$\sim \left(\Lambda_{QCD}^{3N_c - N_f} \det (M^i{}_j) \right)^{\frac{1}{N_c}}$$

という項を加えるので，

effective superpotential は，

$$W_{eff} \sim \Lambda^2 \mathrm{tr} M^i{}_j + W_{dyn.}$$

となる。

それゆえ，SUSY condition

$$\frac{\partial W_{eff}}{\partial M^i{}_j} = 0$$

より

$$\boxed{M \sim \Lambda \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{QCD}} \right)^{\frac{3N_c - N_f}{N_f - N_c}}}$$

となり，この真空は，SUSY

を保つ。

- Decay Rate of the Meta-Stable Vacua

Meta-Stable Vacuum

$$M^i{}_j = 0,$$

$$\tilde{Q}^i = \left(\begin{array}{c} \Lambda \mathbb{1} \\ \hline 0 \end{array}\right), \quad Q_j = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda \mathbb{1} & 0 \end{array}\right)$$

から

SUSY Vacuum

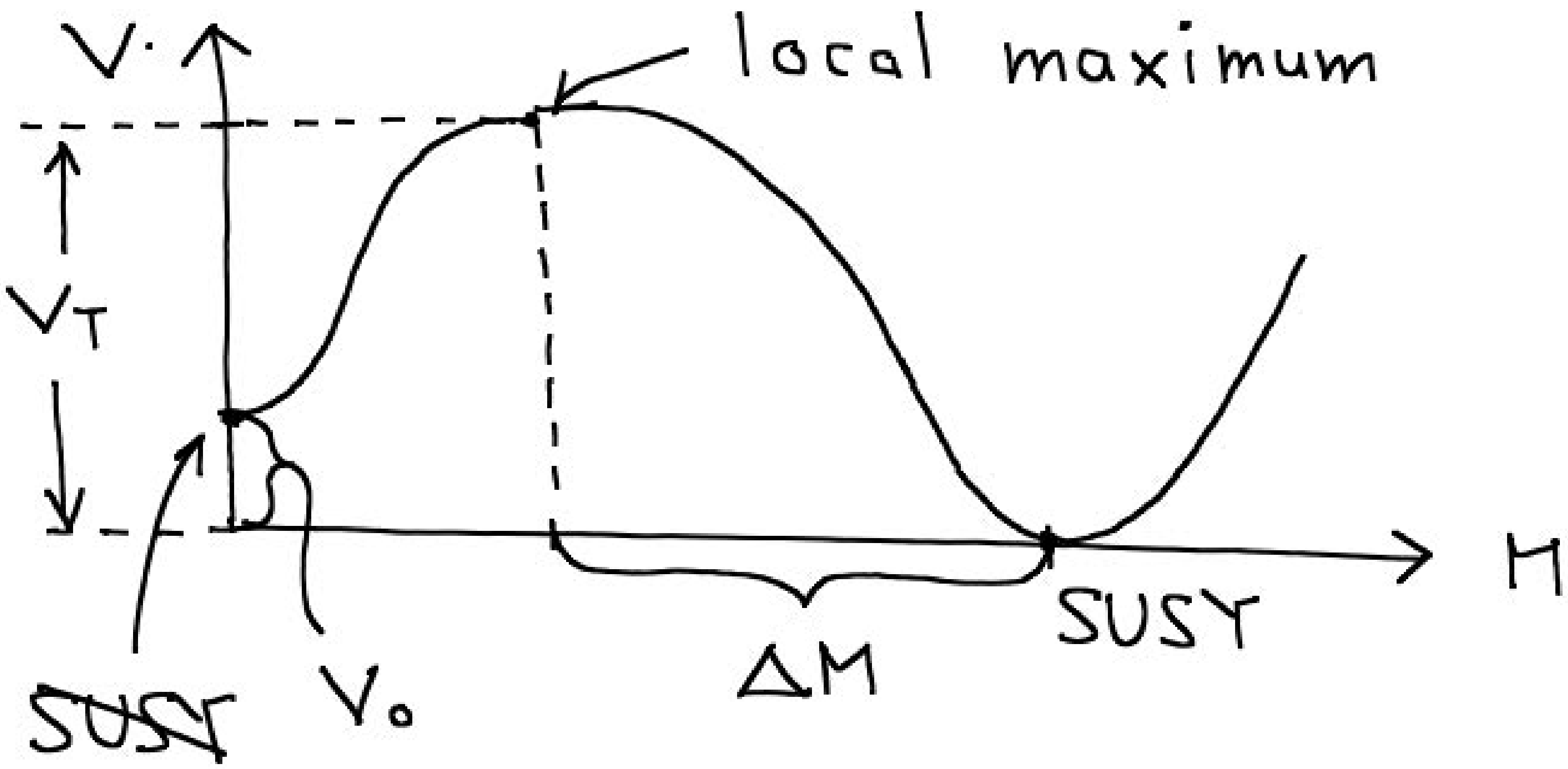
$$M^i{}_j = \Lambda \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{QCD}}\right)^{\frac{3N_c - N_f}{N_f - N_c}} \delta^i{}_j$$

$$\tilde{Q}^i = Q_j = 0$$

へのDecay Rate

$$\Gamma \sim e^{-B}$$

は,



local maximum

$$M^i_j = 0, \quad \tilde{Q}^i = Q_j = 0$$

を通ったとして，評価すると，

(Duncan & Jensen, '92)

$$\begin{cases} V_T \sim V_0 \sim \Lambda^4 \\ \Delta M \sim \Lambda \left(\dfrac{\Lambda_{QCD}}{\Lambda} \right)^{\frac{N_f - 3N_c}{N_f - N_c}} \end{cases}$$

より，

$$\boxed{B \sim \frac{(\Delta M)^4}{V_0} \sim \left(\frac{\Lambda_{QCD}}{\Lambda} \right)^{\frac{N_f - 3N_c}{N_f - N_c}} \gg 1}$$

したがって．長期間安定できる。

今まで摂動論が使えるようなIR freeである
O'Raifeartaigh Type Modelsを考察してきた。

これらのモデルは，高エネルギーでは、
asymptotically free な理論の低エネルギー
をうまく記述できるモデルと考えても良いだろう。

ISS Model は，実際にそのようなモデルに
なっている。

5. Intriligator-Seiberg-Shih (ISS) Model

* ISS model

(ISS '06)

$\mathcal{N}=1$ SUSY massive QCD

N_f Fundamentals $(\underline{q}^i, \tilde{\underline{q}}_i)$

$(i = 1, \cdots, N_f)$

Superpotential

$$\boxed{W = m\, \underline{q}^i_a\, \tilde{\underline{q}}^a_i}$$

$(i = 1, \cdots, N_f)$
$(a = 1, \cdots, \tilde{N}_c)$

Symmetry

	$SU(\tilde{N}_c)$	$SU(N_f)$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
$\underline{q}^i_a$	$\square^*$	$\square$	$+1$	$\frac{N_f - \tilde{N}_c}{N_f}$
$\tilde{\underline{q}}^a_i$	$\square$	$\square^*$	-1	$\frac{N_f - \tilde{N}_c}{N_f}$
$\tilde{W}^a_{\alpha\, b}$	adj.	1	0	1

- Asymptotic Freedom

$$3\tilde{N}_c - N_f > 0$$

- Dual (Magnetic) Description

$$\tilde{N}_c + 1 \leq N_f < 3\tilde{N}_c$$

$$\begin{cases} \tilde{N}_c + 1 \leq N_f < \frac{3}{2}\tilde{N}_c & \text{magnetic の記述は、IR Free} \\ \frac{3}{2}\tilde{N}_c < N_f < 3\tilde{N}_c & \end{cases}$$

non-Abelian Coulomb phase

magnetic の記述は、asymptotic free.

これゆえ、IR の記述で摂動論が意味をもつためには、magnetic free phase である

$$\boxed{\tilde{N}_c + 1 \leq N_f < \frac{3}{2}\tilde{N}_c}$$

が適当.

- Magnetic Theory

$\mathcal{N}=1$ SUSY $SU(N_f-\tilde{N}_c)$ QCD

N_f Fundamentals $(Q_i, \tilde{Q}^i)$

$\oplus$

Gauge Singlets $M^i{}_j$

Superpotential

$$W = m M^i{}_i + \frac{1}{\mu} Q_i M^i{}_j \tilde{Q}^j$$

Symmetry $(N_c \equiv N_f - \tilde{N}_c)$

	$\boxed{SU(N_c)}$	$SU(N_f)$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
$Q_i{}^a$	$\square$	$\square^*$	$\frac{\tilde{N}_c}{N_c}$	$\frac{\tilde{N}_c}{N_f}$
$\tilde{Q}^i{}_a$	$\square^*$	$\square$	$-\frac{\tilde{N}_c}{N_c}$	$\frac{\tilde{N}_c}{N_f}$
$M^i{}_j$	1	adj	0	$2\frac{N_c}{N_f}$
$W_\alpha{}^a{}_b$	adj.	1	0	1

- Gauge Inv. Operators

	electric		magnetic
meson	$q^i_a \tilde{q}^a_j$	$\sim$	M^i_j

baryons

$$B \sim (q)^{\tilde{N}_c} \sim (Q)^{N_c}$$

$$\tilde{B} \sim (\tilde{q})^{\tilde{N}_c} \sim (\tilde{Q})^{N_c}$$

- Asymptotic Freedom

$$3N_c - N_f$$

$$= 3(N_f - \tilde{N}_c) - N_f$$

$$= 2N_f - 3\tilde{N}_c < 0$$

確かに IR Free.

magnetic theory で

$$M^i{}_j \to -\mu M^i{}_j$$

として

$$\Lambda^2 = -m\mu$$

とかえると、superpotential は

$$\therefore W = \Lambda^2 \mathrm{tr} M - Q_i M^i{}_j \tilde{Q}^j$$

となり、先の rank condition

を満たす例に一致する。

このように、O'Raifeartaigh type model の1つの例は、massive な Fundamentals をもつ SQCD という簡単なモデルを、UV を記述する microscopic 理論としてもっている。

通常のQCDのように、electric theory の dynamical scale $\Lambda_{ele.}$ の下で、magnetic theory が、その低エネルギーの振舞をうまく記述しているとすると、quarks $(q^i, \tilde{q}_i)$ の mass m は、Λ_{ele} より小さくとっておかないと、Λ_{ele} の下では、pure Y.-M. theory となって、欲しい magnetic theory が得られないので、

$$\boxed{m \ll \Lambda_{ele.}}$$

が必要である。

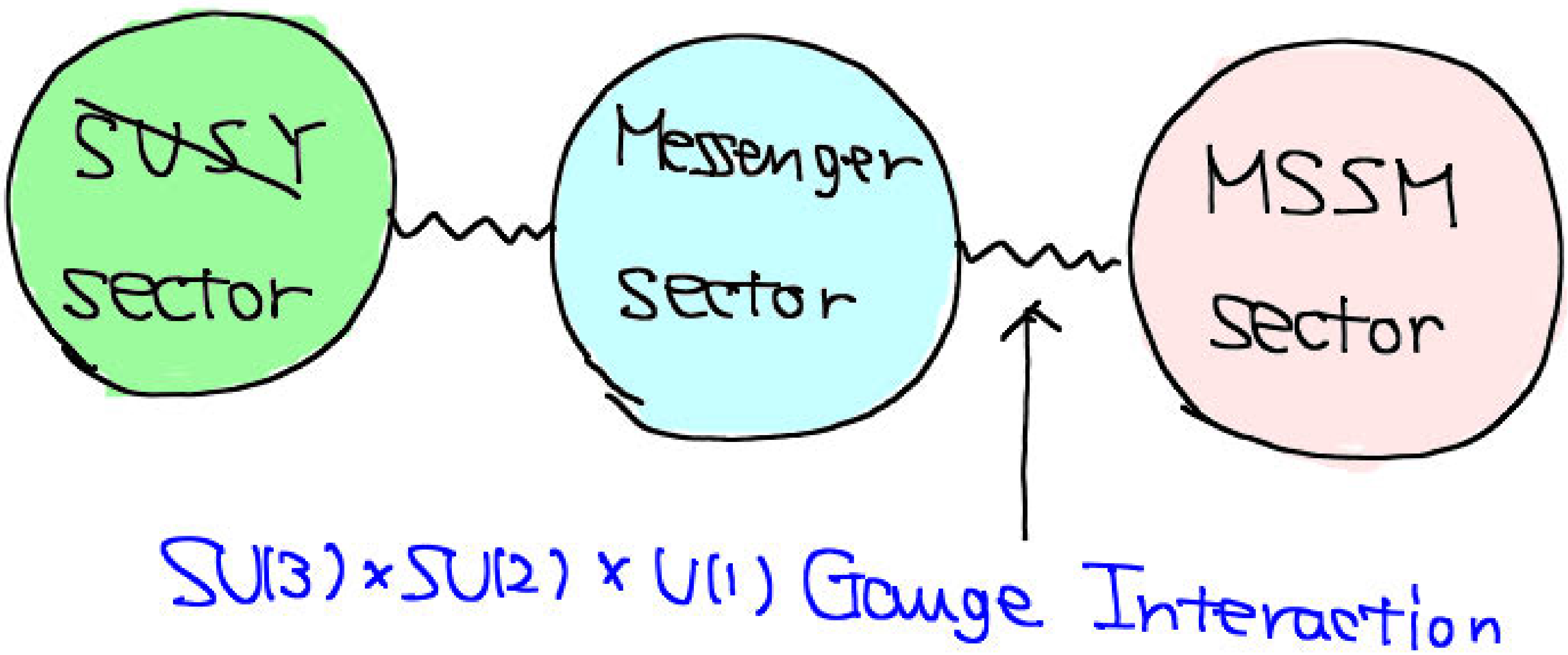
このように，SUSYを破る Meta-Stable Vacuaを
もつようなモデルを考察してきた。

これらを使って，現象論的なモデルを作るには，
このSUSYの破れを使って，標準模型のSUSY
版に存在する，通常の粒子（クォーク，レプトン
グルーオン，$W^{\pm}$，Z，フォトン）などのSUSYの
相方に質量を与える必要がある。

このため，特に，ここでは，Gauge Mediation
について考えることにする。

6. Gauge Mediation of SUSY Breaking

Gauge Mediation



SUSYを破るセクターから、
その効果を、通常のQuarkやLeptonのSuperpartnersに質量を与えるように、Messengerによって伝えられる。
これは、Standard ModelのSU(3)×SU(2)×U(1)ゲージ相互作用を通して伝わるので、余分なFCNC, ~~CP~~等、Flavor問題を引き起こさない。

Fields

X $\in$ ~~SUSY~~ sector

$f, \tilde{f}$ $\in$ messenger sector

これらは. $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
の Quantum # をもっている。

λ : standard model の
$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の
gaugino $\begin{pmatrix} \text{gluino} \\ \text{wino} \\ \text{bino} \end{pmatrix}$

$\tilde{q}, \tilde{\ell}$: squark, slepton

Superpotential

$$W = X f \tilde{f}$$

VEV in ~~SUSY~~ sector

$$\boxed{\langle X \rangle = M + \theta^2 F}$$

scalar成分の VEV

F成分の VEV $\sim (\cancel{\text{SUSY}}\ \text{scale})^2$

この時、Potential

$$V = M \psi_f \cdot \psi_{\tilde{f}} + M^2 (|f|^2 + |\tilde{f}|^2)$$
$$+ F f \tilde{f} + F^* f^* \tilde{f}^*$$

$\psi_f , \psi_{\tilde{f}}$: spinor成分

$f , \tilde{f}$: scalar成分.

さらに，

$$V = M\,\psi_f \cdot \psi_{\tilde{f}} + \frac{1}{2}\,\vec{f}^{\dagger} \left(\begin{array}{cc|cc} M^2 & & & F \\ & M^2 & F & \\ \hline & F^* & M^2 & \\ F^* & & & M^2 \end{array}\right) \vec{f}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f^* \\ \tilde{f}^* \\ f \\ \tilde{f} \end{pmatrix}$$

とみると．
spinor成分の mass

$$m_{1/2} = M$$

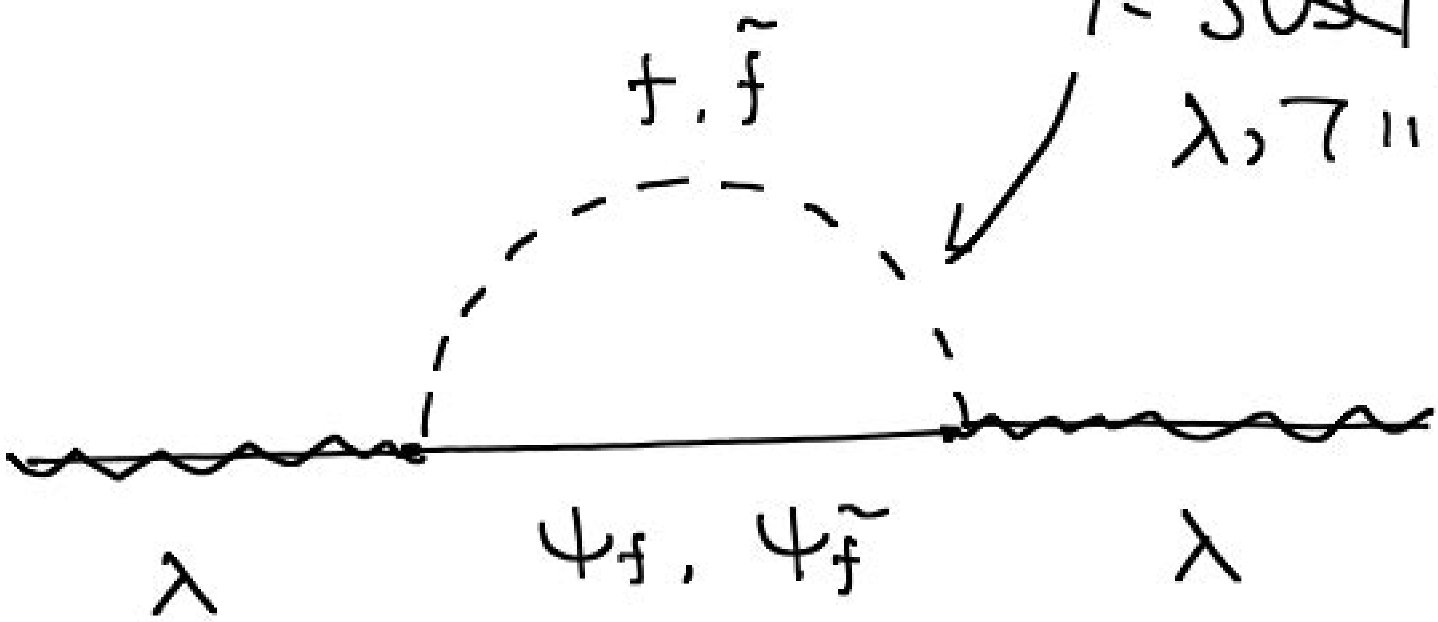
scalar成分の mass

$$m_0^2 = M^2 \pm \sqrt{|F|^2}$$

がわかる。 ($M^2 \geq \sqrt{|F|^2}$; 必要)

Soft $\cancel{\text{SUSY}}$ masses in MSSM

$f, \tilde{f}$ の propagator に $\cancel{\text{SUSY}}$ の効果が入っていす。



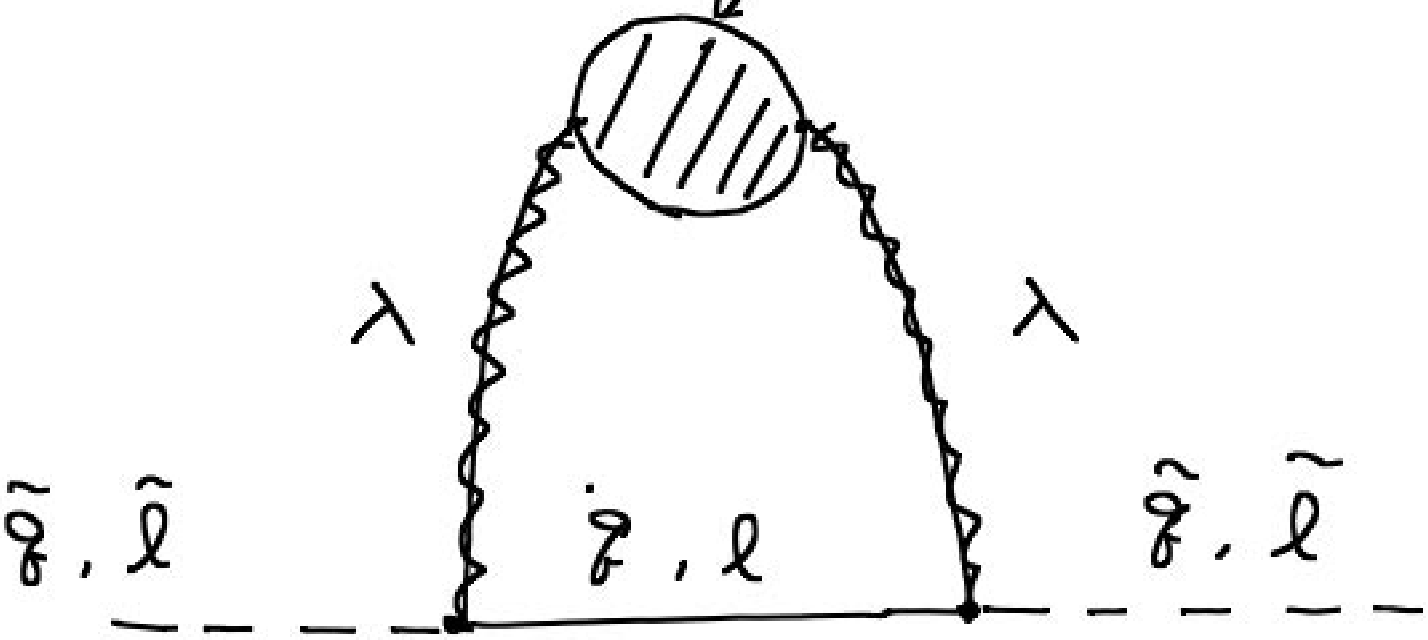
gaugino の soft $\cancel{\text{SUSY}}$ mass

$$\mathcal{L}_{\lambda\,\mathrm{mass}} \sim \int d^2\theta \, \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\theta^2 F}{M} W^\alpha W_\alpha + \mathrm{c.c.}$$

$$\sim \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{F}{M} \lambda^\alpha \lambda_\alpha + \mathrm{c.c.}$$

$$(W_\alpha = \lambda_\alpha + \cdots)$$

上の図から gaugino λ の propagator に SUSY の効果が入っている。



squark, slepton の soft SUSY mass.

L_{squark}

$$\sim \int d^4\theta \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 \frac{\theta^2 F}{M} \cdot \frac{\bar{\theta}^2 F^*}{M} Q_i^\dagger Q_i$$

$$\sim \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 \left|\frac{F}{M}\right|^2 \tilde{q}_i^* \tilde{q}_i$$

* Gaugino, Squark, Slepton mass

$$\boxed{M_s \sim \underbrace{\frac{g^2}{16\pi^2}} \frac{|F|}{M}}$$

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
gauge coupling

* Gravitino mass

$$\boxed{M_{3/2} \sim \frac{|F|}{M_p}}$$

M_p : プランク スケール

それでは，ISS Modelを基にして，
このGauge Mediationを実現するモデルを
いくつか紹介することにします。

ひとつは，Gauge Mediationの一つである
Direct Mediationを実現するモデルで，

北野-大栗-大河内　(PRD75, -ph/0612139)

もうひとつは，通常のGauge Mediationで，

村山-野村 (PRL98, -ph/0612186)

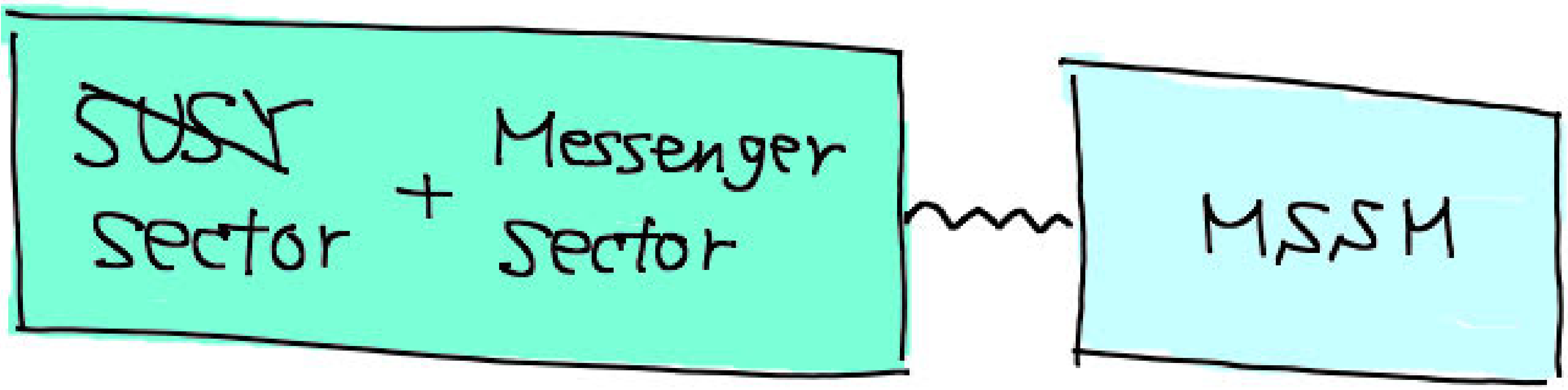
を取り上げることにします。

特に，ISS Modelは，R-Symmetryを保つ
理論だったので，このR-Symmetryをどのように
破るかが一つのポイントになります。

7. Phenomenological Models with ISS Model

* Direct Mediation of ISS

(Kitano-Ooguri-Ookouchi '06)



ISS model

$$W = \Lambda^2 \,\mathrm{tr}\, M - Q_i M^i{}_j \tilde{Q}^j$$

$$M^i{}_j = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} Y & Z \\ \hline \tilde{Z} & X \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, N_c \\ \}\, N_f - N_c \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{N_c} & \underbrace{\quad}_{N_f - N_c} \end{array} & \end{array}$$

ココをゲージ化する。

Global Symm. $SU(N_f)$のうち、
$SU(N_c)$に $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
を埋めこんで、ゲージ化する。

このとき，meta-stable vacua

$$Q_i = \left(\Lambda \mathbb{1}_{N_c} \mid 0 \right)$$

$$\tilde{Q}_j = \left(\frac{\Lambda \mathbb{1}_{N_c}}{0} \right)$$

$$M^i{}_j = 0$$

は、もともとのゲージ群 $SU(N_c)$

は、破れるが，このゲージ群と，今，

ゲージ化した $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

とのDiagonal Partである

$$SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$$

は，ゲージ群として残る。

このことを念頭において，

$$\delta Q_i = \left(x \mid \rho \right),$$

$$\delta \tilde{Q}^j = \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{\rho}} \right)$$

とゆらぎ部分を分けると.

$$W = \Lambda^2 \mathrm{tr} X + \Lambda (Y \tilde{x} + \tilde{Z} \tilde{\rho}) + \Lambda (x Y + \rho Z) - \rho X \tilde{\rho} + \cdots$$

となり，ゲージ群 $SU(N_c)$ と Global Symm. $SU(N_c)$ の対角部分 $SU(N_c)_D$ に対して.

$$\begin{cases} Y, x, \tilde{x} & \text{adj.} \\ \rho, \tilde{Z} & \square \\ \tilde{\rho}, Z & \square^* \end{cases}$$

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \subset SU(N_c)_D$$

より，Superpotentialの形

$$W = -\rho X \tilde{\rho} + \cdots$$

をみると，ρ，$\tilde{\rho}$ が messenger として自動的に出てくることがわかる。

また，R-symm. を破る項として，

$$m Z \tilde{Z}$$

を Superpotential に加えると

全体の Superpotential は、

$$(\tilde{\rho}, Z)\begin{pmatrix} X & \Delta \\ \Delta & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ \tilde{Z} \end{pmatrix}$$

という項をもつが、

ゲージ群の β-関数と

holomorphy をつかうと、

gaugino の mass 項を

F_X の1次の項までについては、

計算できて、(Giudice & Rattazzi, '97)

$m = 0$ では、gaugino mass

がないことがわかる。

また、この ~~R-symm.~~ 項

$$m Z \tilde{Z}$$

は、meson $M^i{}_j$ の成分なので、

UV 理論で考えると、

クォーク場 (q^i, $\tilde{q}_j$)

$$M^i{}_j \sim q^i \tilde{q}_j$$

の 4 点

$$\frac{1}{M_p} \left(q^i \tilde{q}_j \right)^2$$

という non-renormalizable 項

から来ていることがわかる。

* A Simple Gauge Mediation Model

(Murayama & Nomura '06)

$\boxed{\text{ISS model} \oplus \text{Messengers}}$

Superpotential

$$W = m\, q^i{}_a \tilde{q}^a{}_i + m_f f \tilde{f}$$

$$\underbrace{+ \frac{\lambda}{M_p} q^i{}_a \tilde{q}^a{}_i f \tilde{f}}_{\cancel{R\text{-symm.}}\ \text{term.}}$$

$f, \tilde{f}$: messengers で
$SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$
の下で、□ と □* 表現

$q^i, \tilde{q}_j$: $SU(\tilde{N}_c)$ ゲージ群の
□ と □* 表現の N_f ペア.

meson

$$M^i{}_j \sim \frac{1}{\tilde{\Lambda}_{QCD}} \underline{q}^i{}_a \underline{\tilde{q}}^a{}_j$$

として、Seiberg dual をとると、

$$W = \underbrace{\Lambda^2 \operatorname{tr} M - M^i{}_j \tilde{Q}^j Q_i}_{\text{ISS part}} + \underbrace{\left(m_f + \lambda \frac{\hat{\Lambda}_{QCD}}{M_P} \operatorname{tr} M \right) f \hat{f}}_{\text{messenger part}}$$

- Meta-Stable Vacuum

ISS vacuum

$\oplus$

$\langle f \rangle = \langle \hat{f} \rangle = 0$

messenger sector は、

$$W = \cdots + \underbrace{\left(m_f + \lambda \frac{\tilde{\Lambda}_{QCD}}{M_p} \mathrm{tr} M \right) f \tilde{f}}_{\substack{\wr \\ X f \tilde{f}}}$$

と見なすと

$$\begin{cases} \langle X \rangle = m_f \\ F_X = \lambda \dfrac{\tilde{\Lambda}_{QCD}}{M_p} \cdot \underbrace{\Lambda^2}_{\mathrm{tr} M \text{ の } F \text{ 成分.}} \end{cases}$$

これにより、gaugino mass, squark, slepton masses は、

$$M_s \simeq \underbrace{\frac{g^2}{16\pi^2}}_{SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y \text{ coupling constants}} \frac{F_X}{\langle X \rangle} \sim \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\lambda \tilde{\Lambda}_{QCD}}{M_p} \frac{\Lambda^2}{m_f}$$

- このように，特に，パラメータを fine tuneしなくても楽に現象論的な要請を満たすことができる。

- この理論のもつ次元をもつパラメータは，gaugino condensation を利用する方法（Dine-Feng-Silverstein, '06）をつかって Hierarchy を"説明"できる。（Aharony-Seiberg, '06）

- また，ストリング理論に埋め込むことも可能

（TK-Ooguri-Ookouchi, '07）