Comments on Stability of Noncommutative Spaces

京都大学大学院理学研究科　畔柳 竜生
E-mail: aze@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

4 次元のボゾン的な非可換時空上のゲージ理論が連続理論として定義できない可能性について、長年 UV/IR mixing などの観点から指摘されてきた。本研究ではいくつかの 4 次元の平坦な非可換時空上のボゾン的ゲージ理論について、行列模型を用いて定式化することを試みた。そして、上記の可能性を支持する結果を得た。解析の手順としては次のとおりである。

- 行列模型の古典解として非可換空間を構成し、その接平面として平坦な非可換時空を作る。
- 平坦な非可換時空上の場の理論としての double scaling limit を決める (つまり非可換パラメータを固定したうえで、連続極限をとる)。
- 行列模型の古典解である非可換空間とそれがつぶれた典型的な配位のエネルギー差が上記の double scaling limit でどのように振舞うかを調べ、量子的な揺らぎによる不安定性を議論する。それにより、その非可換空間を用いて作られた平坦な非可換時空上の場の理論が連続理論として定義されているかを判定する。

では具体例として次の行列模型を考える。

$$S = \frac{1}{g^2} Tr\Big(-\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{2i\alpha}{3} f_{\mu\nu\rho} A_\mu A_\nu A_\rho\Big).$$

ただし、ここで A_μ $(\mu = 1, 2, \cdots 6)$ は $N \times N$ Hermite 行列、$f_{\mu\nu\rho}$ は $SU(2) \times SU(2)$ の Lie 代数の構造定数。この行列模型の古典解としては、非可換 $S^2 \times S^2$ が知られているので、その任意の一点の近傍に注目することで、平坦な非可換な時空を作る。すると、そこでの非可換ゲージ理論 (4 次元平坦時空上のゲージ理論で adjoint スカラー場が 2 つ) としての double scaling limit は、非可換パラメータを固定した上で連続極限を取るという要請から $1/g^2 \sim \log N$ $(N \to \infty)$ で与えられることがわかる. これを用いて、非可換 $S^2 \times S^2$ とそれがつぶれた典型的な配位である $A_\mu = 0$ とのエネルギー差を計算すると $\Delta S \sim N/g^2 \sim N \log N$ である。しかし、この差は量子的な揺らぎ $O(N^2)$ に比べて小さいため、上記の double scaling limit において非可換 $S^2 \times S^2$ は不安定になる。したがって、上記の方法では 2 つ adjoint スカラー場をもつ 4 次元の平坦な非可換時空上のゲージ理論を作ることができないと帰結される。

References

[1] M. Van Raamsdonk, JHEP **0111** (2001) 006
A. Armoni and E. Lopez, Nucl. Phys **B632** (2002) 240

[2] T. Azeyanagi, M. Hanada and T. Hirata, arXiv:0806.3252