Wilson Loops in Five Dimensional Cohomological Field Theories

大阪大学大学院理学研究科　野間　唯
E-mail: yuhii@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp m

我々は五次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論に於いて、五次元方向に巻き付いた Wilson ループの相関関数を厳密に計算した。特に Wilson ループの一点関数がインスタントンモジュライ上のツイストされたディラック作用素の同変指数で与えられるという関係を導いた [1]。

相関関数を厳密に計算するには、位相的場の理論、トーラス作用、局所化公式がキーワードとなる。$\mathbb{R}^4\times S^1$ 上の五次元の理論を位相的場の理論として扱うには、全ての場を S^1 方向に対し周期的にとり、S^1 の座標 t に依る四次元の理論として扱い、トポロジカルツイストをする事により得られる事が知られている。パラメータ ε_1, ε_2 で特徴付けられるある背景場中で理論を考えると、理論にトーラス作用が自然に導入され、スカラー超電荷 Q に対する変換は変更を受ける。超対称多重項は三つ存在し、そのうち二つはラグランジュの未定係数として働く。そして、その運動方程式を解くと場 A, ψ, $A_t+i\varphi$ は、インスタントンモジュライ空間$\times\,\mathbb{R}^4$ 上の不変束の T^2 同変曲率のループ空間上のアナログを成す事が分かる。

この理論に於いて、五次元方向に巻き付いた Wilson ループ $\mathrm{Tr}\left(P\exp(-\int_{S^1}(A_t+i\varphi)(x))\right)$ の相関関数を考える。ε_1, $\varepsilon_2\neq 0$ の時、この Wilson ループ は Q に対し BPS ではなくなるが、次の演算子を考える事により BPS 演算子を得ることができる。

$$\mathcal{O}:=\mathrm{Tr}\left(P\exp(-\int_{S^1}\left(-F_A+\psi+(A_t+i\varphi)\right)(x))\right). \tag{1}$$

以下の恒等式と S^1 方向の周期性を用いると、$\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}$ が BPS となる事が証明出来る。

$$(d_A+Q-i_V)(F_A-\psi-(A_t+i\varphi))=-\frac{d}{dt}A. \tag{2}$$

但し V は ε_1, ε_2 に依るトーラス作用を与える Killing ベクトル場である。この式は、先の曲率の Bianchi 恒等式のアナログと見なせる。

相関関数の中で $\mathcal{O}$ は同変閉形式として振る舞うので、局所化公式を適用する事ができ、Wilson ループが不変束の同変 Chern 指標で与えられる事が示される。それ故、Wilson ループの一点関数はインスタントンモジュライ上のツイストされたディラック作用素の同変指数によって与えられる事が分かる。そして同変指数は局所化公式と中島の方法を用いて計算できる。

$$Z\cdot\langle\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}\rangle=\int_{\mathcal{M}}\hat{A}_{equiv}(\mathcal{M})Ch_{equiv}(\mathcal{E})=\sum_{\lambda}\frac{4\pi^2}{\hbar^2}\mathcal{O}(\lambda)Q^{|\lambda|}s_{\lambda}^2(q^{\rho})q^{\kappa(\lambda)/2}, \tag{3}$$

但し、λ は固定点をラベルするパーティション、$q=e^{-R\hbar}$、 $\hbar=i\epsilon_1=-i\epsilon_2$、$R$ は S^1 の円周の長さ、及び $\mathcal{O}(\lambda):=1+(1-q^{-1})\sum_{i=1}^{\infty}\left(q^{\lambda_i-i+1}-q^{-i+1}\right)$ である。

[1] T. Nakatsu, Y. Noma and K. Takasaki, arXiv:0807.0746 [hep-th].