Intersecting Solitons, Amoeba and Tropical Geometry

Tokyo Woman's Christian University　Norisuke Sakai
E-mail: sakai_AT_lab.twcu.ac.jp

ゲージ理論とヒッグススカラー場の系はさまざまなソリトンを解として与える．超対称理論に埋め込める場合，超対称性を部分的に保存する BPS ソリトン解が得られる．特に，ゲージ群が $U(N_{\rm C})$ 群のように $U(1)$ 因子を含み，ファイエイリオプロス項がある場合，ヒッグス場が期待値を持ち，ゲージ対称性が破れたヒッグス相となる．そこに生じるソリトンは，ヒッグス相固有の特徴を示す．すなわち，ドメーンウォールとボーテックスは単独に存在でき，1/2 の超対称性を保存するが，磁気単極子やインスタントンは単独で存在できず，ボーテックスを伴い，1/4 の超対称性を保存する．また，平行でないドメーンウォールが交差したドメーンウォールのウェッブも 1/4 の超対称性を保存する．こうした 1/4BPS 複合ソリトンのすべては，5 次元時空でのボーテックス・インスタントン系から次元簡約によって得ることができる．したがって，ボーテックス・インスタントン系を一般的に特徴付けることが重要となる．これまで，平らなボーテックス面同士が直角に交差する場合と，平らなボーテックス面内のボーテックスとしてのインスタントンの場合だけが具体的に知られていた．

本講演では，東工大グループが開発したモジュライ行列の方法を用いて，ボーテックス・インスタントン系を一般に特徴づけた．簡単のために，ゲージ群のカラーの数 $N_{\rm C}$ とヒッグススカラーの種類 $N_{\rm F}$ が一致する場合を取り上げた．その結果，ボーテックスの位置はモジュライ行列の行列式として現れる多項式の零点として与えられることがわかった．また，それらのボーテックス面の (自己) 交点に負のインスタントン電荷が局在していることがわかった．一方，非アーベルゲージ理論の場合には，モジュライ行列に現れるもうひとつ別の多項式と行列式との共通零点に，正のインスタントン電荷が局在している．これらの静的ソリトン解は空間 4 次元に分布する．この 4 次元空間で，一般にボーテックスは複雑に曲がり交差する 2 次元面をなす．こうした系を 4 次元空間のままで理解し，解析するのは簡単ではない．この複雑な系の様子を幾何学的に把握する有効な方法が,「アメーバ」という概念で与えられる．具体的には，モジュライ行列の行列式の零点を 4 次元空間座標のうちの 2 次元座標の関数としてプロットしたものを「アメーバ」と定義する．すなわち，アメーバは 4 次元空間内の 2 次元面であるボーテックスがどこに広がっているかを 2 次元に射影することによって把握する方法である．さらに，具体的に位相不変量であるボーテックス数やインスタントン数を勘定したり，それらがどこに局在しているかを把握するためには,「トロピカル極限」が有用である．トロピカル極限では，射影によって見えなくする 2 次元方向をコンパクト化しておき，それらの半径が零の極限をとる．これによって，いわゆるカルッツァ・クライン展開したときの励起状態が無限大の質量となり，零モードのみが残る．その結果，アメーバの幅がなくなり，ボーテックスは幅のない線として表される．得られた図形は，2 次元を次元簡約して，ドメーン・ウォールのウェッブを構成したのと同じになる．

これらの研究成果は藤森俊明氏 (東工大)，新田宗土氏 (慶応大)，太田和俊氏 (東北大)，山崎雅人氏 (東大）との共同研究で，arXiv:0805.1194(hep-th) にまとめられている．