

No-go theorem of Leibniz rule and supersymmetry on the lattice

神戸大学理学部 坂本 真人

E-mail: dragon@kobe-u.ac.jp

超対称性を格子上で実現しようという試みが30年以上にもわたって続けられているが、未だに満足のいく形での定式化には成功していない。超対称性を格子上で厳密に実現することがなぜ難しいのか？その理由のひとつは、格子上でライプニッツ則を保持することが一般的に困難であるという事実にある。連続理論では、2つの関数の積に対する微分は各々の関数の微分の和、すなわち、 $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)g(x) + f(x)\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)$ を自明に満たす。一方、格子理論では、座標 x は格子点 n で置き換えられ、微分は差分で置き換えられる。たとえば、 $\nabla^{(+)}f(n) \equiv \frac{1}{a}(f(n+1) - f(n))$ で定義される前方差分 (a は格子定数) は、次の関係式 $\nabla^{(+)}(f(n)g(n)) = (\nabla^{(+)}f(n))g(n) + f(n)(\nabla^{(+)}g(n)) + a(\nabla^{(+)}f(n))(\nabla^{(+)}g(n))$ を満たし、格子定数 a に比例するライプニッツ則の破れ (右辺第3項) が存在する。後方差分や対称差分でも同様にライプニッツ則は成り立っていない。

このように通常よく用いられる差分演算子はライプニッツ則を満たさない。では、なぜライプニッツ側が成り立たないと超対称性を格子上でうまく実現できないかという、無限小超対称性変換 δ を考えたときに、次の関係式 $\delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g)$ が成立しないからである。この式は連続理論では“自明”な関係式であるが、格子上では自明ではない。というのも、超対称性変換はその定義の中に座標の微分を含んでおり、そのため格子上で定義される超対称性変換も差分を含まざるを得ない。ところが、差分演算子がライプニッツ則を満たさないならば $\delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g)$ の関係が格子上で成立しなくなるのである。

簡単な差分演算子ではライプニッツ則は満たされないのであれば、差分演算子、さらには、場の積の規則を (局所性は保ちつつ) より一般的なものへ拡張してみてもはどうだろうか？もし、ライプニッツ則を満たす差分演算子と場の積の規則がみつければ、超対称性を格子上で厳密に定義することが可能になる。

残念ながらこの野望は我々の証明した No-Go 定理によって打ち碎かれる。

No-go theorem

格子サイズが無限大の格子理論で、次の3つの性質：(i) 並進不変性、(ii) 局所性、(iii) ライプニッツ則を満たす非自明な差分演算子と場の積を構成することは不可能である。

この No-Go 定理を逃れる術はないのであろうか？1つの可能性は、場に flavor の自由度を導入することである。この定理は有限の flavor に対しては同様に成り立つことが示されるが、flavor の数が無限大の時はこの定理の証明に使われている複素関数の正則性が使えない。実際、我々は無限の flavor 数を許すならば、ライプニッツ則を満たす局所的な差分演算子と場の積が存在することを具体例で示した。この例では差分は、ある行列との交換子で定義されることがわかる。また、これらの差分演算子と場の積を用いて超対称格子模型を具体的に構築することにも成功した。

本講演の詳細については下記の論文を参照してください。また、この講演は加藤光裕氏 (東大総合文化) と宗博人氏 (愛媛大理) との共同研究に基づくものです。

- Mitsuhiro Kato, Makoto Sakamoto and Hiroto So, *Taming the Leibniz Rule on the Lattice*, JHEP05(2008)057, arXiv:0803.3121 [hep-lat].