Tomboulis の閉じ込めの証明について

理化学研究所仁科加速器研究センター川合理論物理学研究室　鈴木　博
E-mail: hsuzuki@riken.jp

Tomboulis によって昨年提出された、格子上の 4 次元 $SU(2)$ Yang-Mills 理論におけるクォークの閉じ込めの証明に関する報告を行う。

1　はじめに

今からちょうど一年ほど前、Tomboulis が 4 次元の格子 Yang-Mills 理論の弱結合領域における面積則を解析的に証明したと発表した [1]。もしこれが本当であれば三十年来の未解決問題の一つに解答が与えられたわけで、日本国内でもその成否に関心が持たれた。ここでの目的は、Tomboulis の "証明" の概要を紹介し、それに関してここ一年で明らかになったことを報告することである。発表後しばらくして指摘されたことであるが、この証明の全てのステップが正しいとすると、4 次元の $U(1)$ 理論の弱結合領域が閉じ込め相にあるという誤った結論が得られるように思われる [2]。その理由は暫く判然としなかったが、最終的に、文献 [1] の議論に致命的な論理のギャップがあることが明らかにされた [3]。この欠陥をどのように修正すればよいのか、また、議論の中に将来の閉じ込めの証明に向けて建設的に活かせる要素があるのか、いずれも分からないというのが残念ながら現状と思われる。

さて、有限な周期的正方格子 Λ 上で定義される Yang-Mills 理論の分配関数（以下、ゲージ群は $SU(2)$ とする）は

$$Z_\Lambda(\beta) \equiv \int \prod_{b\in\Lambda} dU_b \, \exp\left(\frac{\beta}{2}\sum_{p\subset\Lambda} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}_{1/2}\, U_p\right), \qquad \beta \equiv \frac{4}{g_0^2} \tag{1}$$

で与えられる。b は隣り合った格子点をつなぐ bond（または link）を表し、p は四つの link で囲まれる面（plaquette）を表す。積分変数は各 link の上に定義される link 変数 $U_b \in SU(2)$ で、dU_b は Haar 測度である（$\int dU_b\, 1 = 1$ とする）。β は裸のゲージ結合定数、U_p は plaquette p の四辺に沿った link 変数の積（plaquette 変数）$U_p \equiv U_{x,\mu}U_{x+\mu,\nu}U_{x+\nu,\mu}^{-1}U_{x,\nu}^{-1}$ である。作用を定義する trace はここでは $SU(2)$ の基本表現（スピン 1/2 表現）に関するものとした。β は、通常のゲージ結合定数 g_0 と逆数の関係にあるので、以下、$\beta \ll 1$ を強結合、$\beta \gg 1$ を弱結合と呼ぶ。

面積則とは、Λ 上の loop C に沿った link 変数の積の trace（Wilson loop）の期待値

$$\langle W(C)\rangle \equiv \left\langle \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{1/2} \prod_{b\in C} U_b \right\rangle \tag{2}$$

が loop 内に含まれる plaquette の数 A_C の指数関数で小さくなる $\langle W(C)\rangle \sim \exp(-\widehat{\sigma} A_C)$ というものである。パラメター $\widehat{\sigma} > 0$ は string tension と呼ばれる。面積則は物理的には（基本表現に

属する）クォークと反クォーク間の静的なポテンシャルが距離に比例して増大することを意味し、クォークの閉じ込めの一つの判定条件とされている。[1]

これを証明しようとするここでの基本的なアイデアは次のようなものである。もともと Wilson により考察されたように、強結合 $\beta \ll 1$ の領域は disorder な相にあり、面積則は強結合展開により容易に示す事ができる。実際、string tension に対する強結合展開

$$\widehat{\sigma} = -\log(\beta/4) + \frac{\beta^2}{24} - \frac{5\beta^4}{288} + \frac{1117\beta^6}{414720} - \frac{3253\beta^8}{2654208} + \cdots \tag{3}$$

は有限の収束半径を持つ事が知られており、右辺の級数を string tension の定義と見なす事ができる。つまり、格子模型の立場からは、弱結合 $\beta \gg 1$ よりも強結合 $\beta \ll 1$ の領域の解析のほうが遥かにやさしい。そこで、難しい弱結合での物理を、よりやさしい強結合での物理と関連づけて、問題を後者の場合に帰着させられないか、と考えるのは自然である。[2] これを実行する一つのアイデアは、Wilson 流の繰り込み群を考えることである。今の理論は asymptotic free なので、ultraviolet で弱結合にある理論を繰り込み群で infrared に走らせた時、理論は強結合になることが期待される。infrared での理論の結合定数が強結合展開の収束半径の中に入るほど強結合になれば、その理論を強結合展開によって調べる事ができる。しかしながら、Wilson 流の繰り込み群を厳密に実行する事は困難なので、このプログラムを文字通り実行する事は今のところできない。そこで、これに類似の近似的な繰り込み群的変換、または近似的な block-spin 変換を利用できないかと考える。格子ゲージ理論におけるこうした近似的な変換のうちで、解析的にコントロール可能かつ non-trivial なものが、所謂 Migdal-Kadanoff (MK) 変換である。

以下、文献 [1] の議論を四つのステップにわけて解説する。[3]

2　文献 [1] の議論

2.1　MK 変換と分配関数の内挿公式

MK 変換は、近似的な block-spin 変換である。つまり、一種の粗視化をおこなって、粗い格子で元の理論に（近似的に）等価な理論を得ようとするものである。変換をくり返すごとに、格子間隔 a は

[1] これは、格子模型としての閉じ込めの条件である。連続理論でのクォークの閉じ込めを示すには、さらに連続極限 $\beta \to \infty$ で string tension が繰り込み群から期待されるスケーリング $\widehat{\sigma} \propto e^{-\beta/(4b_0)}$（ここで $b_0 \equiv 11/(24\pi^2)$）に従うことを示す必要がある。文献 [1] の議論は、任意の固定した β に対して面積則を証明するというもので、このスケーリングの証明は含んでいない。一方、数値計算によれば、このスケーリングは非常によく成立している。従って、数値的にはこの模型の連続極限でのクォークの閉じ込めはまず疑いのないところであるが、これを解析的に証明するのはまた別の問題である。

[2] ゲージ群が Z_N や $U(1)$ の Abel 群の場合には、格子模型での weak-strong duality を利用する事で弱結合の問題を強結合の問題に帰着させる事がしばしば可能である。格子ゲージ理論の弱結合の領域における厳密な証明は大抵この手法に基づいている。一方、非 Abel 群の場合には、厳密な duality が知られていないために、同様の手法が働かない。

[3] 文献 [1] のプレゼンテーションは錯綜としていて大変読みにくい。講演の PDF file（http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~qft/2008/slide.html から download 可能）では、なるべく simple かつ self-contained な解説を試みた。興味のある方は参考にして頂きたい。

$a \to ba \to b^2 a \to b^3 a \to \cdots$ と粗くなってゆく。ここで、自然数 $b \geq 2$ はいくつのブロックを新しい格子目とみなすかを表す。対応して、もとの格子 Λ から $\Lambda \equiv \Lambda^{(0)} \to \Lambda^{(1)} \to \Lambda^{(2)} \to \Lambda^{(3)} \to \cdots$ と粗い格子に移る。記号として、格子に含まれる plaquette の総数を $|\Lambda| \to |\Lambda^{(1)}| \to |\Lambda^{(2)}| \to |\Lambda^{(3)}| \to \cdots$ のように書く。MK 変換の物理的描像 [1] は省略して、結論だけ書くと、MK 変換 n 回目の一回前の分配関数を character 展開を使って[4]

$$Z_{n-1}(\{c_j(n-1)\}) \equiv \int \prod_{b \in \Lambda^{(n-1)}} dU_b \prod_{p \subset \Lambda^{(n-1)}} \left[1 + \sum_{j \neq 0} d_j c_j(n-1) \chi_j(U_p) \right] \tag{4}$$

という規格化で定義した時に、これの MK 変換を

$$F_0(n)^{|\Lambda^{(n)}|} Z_n(\{c_j(n)\}) \equiv F_0(n)^{|\Lambda^{(n)}|} \int \prod_{b \in \Lambda^{(n)}} dU_b \prod_{p \subset \Lambda^{(n)}} \left[1 + \sum_{j \neq 0} d_j c_j(n) \chi_j(U_p) \right] \tag{5}$$

とする。[5] ここで

$$F_0(n) \equiv \left(\widehat{F}_0(n) \right)^{b^2}, \qquad c_j(n) = \left(\frac{\widehat{F}_j(n)}{\widehat{F}_0(n)} \right)^{b^2 r}, \tag{6}$$

ただし

$$\widehat{F}_j(n) \equiv \int dU \left[1 + \sum_{j \neq 0} d_j c_j(n-1) \chi_j(U) \right]^{b^{(d-2)}} \frac{1}{d_j} \chi_j(U) \tag{7}$$

である（参考のため、d 次元格子の場合の表式を書いた）。(6) 式のパラメター $0 < r < 1$ は、文献 [1] で技術的理由から導入されたもので、本来の MK 変換は $r = 1$ に対応する。もとの分配関数 (1) に対しては、$Z_\Lambda(\beta) = F_0(0)^{|\Lambda|} Z_0(\{c_j(0)\})$ とする。character の具体形から $F_0(0) = (2/\beta) I_1(\beta)$、$c_j(0) = I_{2j+1}(\beta)/I_1(\beta) = \beta^{2j}/(2j+1)! + O(\beta^{2j+2})$ なので（$I_n(\beta)$ は変形された Bessel 関数）、$c_j \ll 1$ が強結合 $\beta \ll 1$ に対応している。[6] 以後、$c_j \ll 1$ を強結合、$c_j \simeq 1$ を弱結合と呼ぶ事にす

[4]MK 変換の特徴は、変換後の作用が再び plaquette 変数 U_p だけのゲージ不変な関数になることである。こうした相似変換のもとで不変な群上の関数は、既約表現 j の character $\chi_j(U_p) \equiv \mathrm{Tr}_j\, U_p$ で展開することができる。$SU(2)$ の既約表現はスピン $j = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ \ldots$ でラベルされ、$d_j \equiv 2j+1$ は表現 j の次元である。$SU(2)$ の元を基本表現で対角化し $U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ と書くと $\chi_j(U) = \sin((2j+1)\theta/2)/\sin(\theta/2)$ である。この時、Haar 測度は $\int dU = \int_0^{4\pi} d\theta/(2\pi) \sin^2(\theta/2)$ となる。

[5]もし、MK 変換が厳密な block-spin 変換であれば $Z_{n-1}(\{c_j(n-1)\}) = F_0(n)^{|\Lambda^{(n)}|} Z_n(\{c_j(n)\})$ が成立するわけだが、MK 変換はあくまで近似的なものなので、この等式は成立しない。ただし、$d = 2$ では、（$r = 1$ とした）MK 変換は厳密な block-spin 変換である。

[6]もし、$0 \leq c_j(n-1) < 1$ ならば、角運動量の合成則に対応した $\chi_i(U)\chi_j(U) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} \chi_k(U)$ と character の正規直交性 $\int dU\, \chi_i(U)\chi_j(U) = \delta_{ij}$ から、$\widehat{F}_0(n) \geq 1$（つまり $F_0(n) \geq 1$）と $j \neq 0$ に対して $\widehat{F}_j(n) \geq 0$ とが従う。さらに $j \neq 0$ に対しては、$|\chi_j(U)/d_j| < 1$ なので $\widehat{F}_j(n) < \widehat{F}_0(n)$（つまり $0 \leq c_j(n) < 1$）が従う。初期値は $0 \leq c_j(0) < 1$ を満たすので、帰納法から全ての n に対してこれらの性質が成り立つことがわかる。

る。[7]

(4) 式と (5) 式を比べると、overall の規格化を除いて、係数 $c_j(n-1)$ が $c_j(n)$ に変化している。これが、繰り込み群変換（今の場合 ultraviolet の momentum cutoff を $1/b$ 倍することに相当する）による結合定数の変化に対応する。

まず問題は、この MK 変換で引き起こされる繰り込み群の flow が、はたして結合定数 $c_j(n)$ を強結合側に流すようなものかどうかである。もともとの MK 変換 $r=1$ の場合に関しては、$d \le 4$ では最初の β がいかに大きくとも、$n \to \infty$ の極限で必ず $c_j(n) \to 0$ となることが証明されている [4, 5]。$0 < r < 1$ の場合には、対応する statement は知られていなかったが、数値計算や解析的な議論から $\beta_c(r)$ なる critical な値が存在し、これより強結合側 $\beta < \beta_c(r)$ から始めれば強結合側に流れる（$n \to \infty$ で $c_j(n) \to 0$）が、それより弱結合側 $\beta > \beta_c(r)$ から始めると、逆に弱結合側に流れて行ってしまう（$n \to \infty$ で $c_j(n) \to 1$）ことがわかる。この振る舞いは例えば $r = 1 - 1/b$ で b が十分大きい場合には厳密に証明することもできる [3]。いずれにしろ、$r < 1$ の導入は、MK 変換による流れの性質を drastic にかえてしまう [2]。$\beta_c(r)$ は r の単調増加関数で $\beta_c(r=1) = \infty$ なので、これから先の議論のためには、β の値に応じて r は十分 1 に近く選ばれていると仮定しなくてはならない。[8]

さて、MK 変換はあくまで近似的な変換なので、分配関数の等式 $Z_{n-1}(\{c_j(n-1)\}) = F_0(n)^{|\Lambda^{(n)}|} \times Z_n(\{c_j(n)\})$ は一般に成り立たない。にもかかわらず、面白い事に、MK 変換した後の分配関数は、もとの分配関数の上限を与える事が示せる。[9] また、$Z_{n-1}(\{c_j(n-1)\})$ は $c_j(n-1)$ の単調増加関数であることが示せる[10]ので $c_j(n-1) = 0$ が下限を与え

$$1 \le Z_{n-1}(\{c_j(n-1)\}) \le F_0(n)^{|\Lambda^{(n)}|} Z_n(\{c_j(n)\}) \tag{8}$$

を得る。

次に (8) 式の下限と上限を内挿するものとして

$$\widetilde{Z}_n(\alpha, t) = F_0(n)^{h(\alpha,t)|\Lambda^{(n)}|} Z_n(\{\alpha c_j(n)\}), \qquad 0 \le \alpha \le 1, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{9}$$

を導入する。ただし、内挿の仕方を指定する関数 $h(\alpha, t)$ （具体例は (39) 式に与える）は

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} > 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} < 0, \qquad h(0,t) = 0, \qquad h(1,t) = 1 \tag{10}$$

の性質を持つとする。$0 \le \alpha \le 1$ が内挿のパラメターで、t は内挿の仕方をパラメトライズするものである。$F_0(n) > 1$、Z_n が $c_j(n)$ の単調増加関数である事と関数 $h(\alpha, t)$ の性質から、$\widetilde{Z}_n(\alpha, t)$ は α の単調増加関数で、$\widetilde{Z}_n(0, t) = 1$、$\widetilde{Z}_n(1, t) = F_0(n)^{|\Lambda^{(n)}|} Z_n(\{c_j(n)\})$ となる。

[7] こう見なすのが自然なのは、強結合展開は実際には c_j に関する展開だからである。

[8] 実は、この $r < 1$ に付随した微妙な点は文献 [1] では完全に見過ごされている。

[9] 文献 [1] の Appendix A §4 に与えられているこのことの証明は $r = 1$ に対するものである。$0 < r < 1$ に対しては、(6) 式から $c_j(n)$ が r の減少関数であることと $Z_n(\{c_j(n)\})$ が $c_j(n)$ の単調増加関数であることに注意すればわかる。

[10] 証明 [1] は、reflection positivity の証明とほとんど同じである。

まず $n=1$ の場合を考える。この時、$t=t_1$ を適当に固定しておくと、それに対応した内挿パラメター $0 \le \alpha_1(t_1) \le 1$ が存在して

$$Z_0(\{c_j(0)\}) = \widetilde{Z}_1(\alpha_1(t_1), t_1) = F_0(1)^{h(\alpha_1(t_1),t_1)|\Lambda^{(1)}|} Z_1(\{\alpha_1(t_1)c_j(1)\}) \tag{11}$$

とできるはずである。同様に $n=2$ に対しては

$$1 = \widetilde{Z}_2(0, t_2) \le Z_1(\{\alpha_1(t_1)c_j(1)\}) \le Z_1(\{c_j(1)\}) \le \widetilde{Z}_2(1, t_2) \tag{12}$$

なので、$0 \le \alpha_2(t_2) \le 1$ が存在して

$$Z_1(\{\alpha_1(t_1)c_j(1)\}) = \widetilde{Z}_2(\alpha_2(t_2), t_2) = F_0(2)^{h(\alpha_2(t_2),t_2)|\Lambda^{(2)}|} Z_2(\{\alpha_2(t_2)c_j(2)\}) \tag{13}$$

を与える。この作業をくり返していくことで、もとの分配関数に対する表式

$$Z_\Lambda(\beta) = F_0(0)^{|\Lambda|} \left[\prod_{m=1}^{n} F_0(m)^{h(\alpha_m(t_m),t_m)|\Lambda^{(m)}|} \right] Z_n(\{\alpha_n(t_n)c_j(n)\}) \tag{14}$$

を得る。ポイントは、左辺の結合定数 β は非常に大きく弱結合かもしれないが、右辺では、十分多くの回数 MK 変換をくり返してやれば必ず $\alpha_n(t_n)c_j(n) \ll 1$ とできる点である。これは、最初に述べた、弱結合の問題を強結合の問題に帰着させるアイデアの一応の実現になっている。

2.2 ツイストされた分配関数

通常の分配関数だけでは閉じ込めに関する情報は得られない。そこで、ツイストされた分配関数を導入する。これは、次で定義される $(1,2)$ 方向の plaquette の集合 $\mathcal{V}$ （これを center vortex と呼ぶ）

$$\mathcal{V} = \Big\{ (1,2)\ \text{方向の plaquette}\ p \ \Big|\ p\ \text{の}\ (1,2)\ \text{座標はある値に固定。}(3,4)\ \text{座標は任意。} \Big\} \tag{15}$$

を考え、この集合に属する plaquette に non-trivial な center の元（今の $SU(2)$ の場合 -1）を掛けて定義される分配関数である。つまり

$$Z_\Lambda^{(-)}(\beta) \equiv \int \prod_{b \in \Lambda} dU_b \, \exp\left(\frac{\beta}{2} \left[\sum_{p \subset \mathcal{V}} \mathrm{Tr}_{1/2}(-U_p) + \sum_{p \subset \Lambda \setminus \mathcal{V}} \mathrm{Tr}_{1/2}\, U_p \right] \right) \tag{16}$$

である。Wilson loop の期待値はそこを貫くゲージ場の "磁束" を計るものとも解釈できるが、それに dual な（center に付随した）"電束" を計るものとして't Hooft loop を考える事ができる。上のツイストした分配関数（と元の分配関数との比）はまさに格子の $(3,4)$ 平面全体を囲む't Hooft loop の期待値になっており、その量の振る舞いからも閉じ込め相を特徴づけることができる。（この辺りの解説については、例えば、文献 [6] を参照。）

このツイストした分配関数についても MK 変換を考える事ができる。character 展開の言葉で

$$Z_n^{(-)}(\{c_j(n)\}) \equiv \int \prod_{b\in\Lambda^{(n)}} dU_b \prod_{p\subset\mathcal{V}} \left[1+\sum_{j\neq 0}(-1)^{2j} d_j c_j(n)\chi_j(U_p)\right] \prod_{p\subset\Lambda^{(n)}\setminus\mathcal{V}} \left[1+\sum_{j\neq 0} d_j c_j(n)\chi_j(U_p)\right] \tag{17}$$

と書く事にすると、面白い事に、MK 変換で生成される係数 $F_0(n)$ と $\{c_j(n)\}$ の系列はツイストしていない場合のものと全く変わらない。これは、center vortex の（$(1,2)$ 方向における）場所は積分変数の変換によりいくらでも動かせるというトポロジカルな性質から従う。

そこで、前節と同様の議論をするのであるが、ツイストした分配関数 $Z_n^{(-)}(\{c_j(n)\})$ は character 展開の係数に負のものも含むため、$c_j(n)$ の単調増加関数であるという性質が成立しない。Tomboulis はかわりに

$$Z_n^{+}(\{c_j(n)\}) \equiv \frac{1}{2}\left(Z_n(\{c_j(n)\}) + Z_n^{(-)}(\{c_j(n)\})\right) \tag{18}$$

を考えると、これは $c_j(n)$ の単調増加関数であることを示した。[11] 従って、前節の議論を Z_n^{+} に対してくり返す事で

$$Z_\Lambda^{+}(\beta) = F_0(0)^{|\Lambda|}\left[\prod_{m=1}^{n} F_0(m)^{h(\alpha_m^{+}(t_m^{+}),t_m^{+})|\Lambda^{(m)}|}\right] Z_n^{+}(\{\alpha_n^{+}(t_n^{+})c_j(n)\}) \tag{19}$$

を得る。ただし、ここでは t の系列として t_m^{+} $(m=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ とした。$\alpha_m^{+}(t)$ は $\alpha_m(t)$ とは一般に異なる関数である。

式 (14) と式 (19) の比を取ると

$$\frac{Z_\Lambda^{+}(\beta)}{Z_\Lambda(\beta)} = \frac{\left[\prod_{m=1}^{n} F_0(m)^{h(\alpha_m^{+}(t_m^{+}),t_m^{+})|\Lambda^{(m)}|}\right] Z_n^{+}(\{\alpha_n^{+}(t_n^{+})c_j(n)\})}{\left[\prod_{m=1}^{n} F_0(m)^{h(\alpha_m(t_m),t_m)|\Lambda^{(m)}|}\right] Z_n(\{\alpha_n(t_n)c_j(n)\})} \tag{20}$$

となる。次に Tomboulis は、もともとの格子 Λ が十分大きければ、各 t_m^{+} に対して t_m をうまく選ぶことができて

$$h(\alpha_m^{+}(t_m^{+}),t_m^{+}) = h(\alpha_m(t_m),t_m), \qquad \text{for } m=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n \tag{21}$$

とできることを証明した。この証明は省略するが、基本的には、$0 < Z_m^{(-)} < Z_m$ という事実から従う。また、Tomboulis が $r<1$ と取ったのは、この証明の技術的な理由のためである。(r は 1 より小さければどんなに 1 に近くてもよい)。これを認めれば

$$\frac{Z_\Lambda^{+}(\beta)}{Z_\Lambda(\beta)} = \frac{Z_n^{+}(\{\alpha_n^{+}(t_n^{+})c_j(n)\})}{Z_n(\{\alpha_n(t_n)c_j(n)\})} \tag{22}$$

[11] center vortex のトポロジカルな性質を使うこの事実の証明は大変面白い。

となる。ここで $|\alpha_n^+(t_n^+) - \alpha_n(t_n)| \le O(1/|\Lambda|)$ であることも言える。もう一度強調すると、左辺の β は非常に大きく弱結合かもしれないが、MK 変換を十分な回数 n くり返せば、右辺では $\alpha_n^+(t_n^+)c_j(n) \ll 1$ かつ $\alpha_n(t_n)c_j(n) \ll 1$ といくらでも強結合にできるわけである。ただ惜しいのは、右辺の分母の結合定数と分子の結合定数が（一般に）異なっている点である。[12]

2.3 決定的なステップ

ここまで、系列 t_m^+ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ は適当に固定したと仮定し、それに応じて t_m を選ぶ事で (22) 式を得た。(22) 式には、最後に t_n^+ 自身を選ぶ自由度が残っている。そこで、t_n^+ をうまく選ぶ事で、これと (21) 式で結びつく t_n が t_n^+ と等しくできないか考える。この等しい t の値を t^* と呼ぶと、(21) 式から

$$\alpha^* \equiv \alpha_n(t^*) = \alpha_n^+(t^*) \tag{23}$$

となる。すぐ見るように、もし (23) 式を満たす t^* が存在すれば面積則が証明できる。

そこで、まず t_n^+ を勝手に選び、t と新しいパラメター $0 \le \lambda \le 1$ の関数[13]

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, t) \equiv h(\alpha_n(t), t) + \frac{1}{\log F_0(n)} \frac{1}{|\Lambda^{(n)}|} \big[&(1-\lambda) \log Z_n^+(\{\alpha_n^+(t_n^+)c_j(n)\}) \\ &+ \lambda \log Z_n^+(\{\alpha_n(t)c_j(n)\}) - \log Z_{n-1}^+\big]\end{aligned} \tag{24}$$

で定義される方程式

$$\Psi(\lambda, t) = 0 \tag{25}$$

を考える。この方程式の解 t をパラメター λ の関数と見た時、$\lambda = 0$ での解 $t(\lambda = 0)$ は（最初に選んだ t_n^+ に対応した）t_n で与えられ、$\lambda = 1$ での解 $t(\lambda = 1)$ は、まさに上の t^* を与えることが見てとれる。

そこで、$0 \le \lambda \le 1$ で定義された解 $t(\lambda)$ が存在するかどうかを問題にする。$\Psi(\lambda, t(\lambda)) = 0$ の解は

$$\frac{dt(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\partial\Psi/\partial\lambda}{\partial\Psi/\partial t}(\lambda, t(\lambda)) \tag{26}$$

を満たすので、もし

$$\frac{\partial\Psi(\lambda, t)}{\partial t} \ne 0, \qquad \text{for } 0 \le \lambda \le 1 \text{ and } t \in \mathbb{R} \tag{27}$$

が満たされるならば、$t^* = t(1)$ は

$$t(\lambda) = t_n - \int_0^\lambda d\lambda' \, \frac{\partial\Psi/\partial\lambda}{\partial\Psi/\partial t}(\lambda', t(\lambda')) \tag{28}$$

[12] 分子と分母の結合定数が異なっていても、それぞれ十分に強結合なのだから、分子と分母それぞれを強結合展開で評価すればよいと思うかもしれない。しかしながら、このアプローチで (31) 式の振る舞いを得るためには $\alpha_n^+(t_n^+)$ と $\alpha_n(t_n)$ の間の具体的な関係が分かっている必要がある。

[13] ここでの $\Psi(\lambda, t)$ は文献 [1] のものと多少違うが、こちらの定義の方がすっきりしている。

を iterative に解く事で得られるであろう。実際、n が十分大きければ

$$\frac{\partial \Psi(\lambda, t)}{\partial t} < 0, \qquad \text{for } 0 \le \lambda \le 1 \text{ and } t \in \mathbb{R} \tag{29}$$

となる事が強結合展開での評価を使うことで示せる [1]。従って、(23) 式を満たす t^* が存在することになった。

2.4 Vortex 自由エネルギーと Tomboulis-Yaffe 不等式

(22) 式で、t_n^+ と t_n を改めて t^* に取ることで (23) 式から

$$\frac{Z_\Lambda^+(\beta)}{Z_\Lambda(\beta)} = \frac{Z_n^+(\{\alpha^* c_j(n)\})}{Z_n(\{\alpha^* c_j(n)\})} \Longrightarrow \frac{Z_\Lambda^{(-)}(\beta)}{Z_\Lambda(\beta)} = \frac{Z_n^{(-)}(\{\alpha^* c_j(n)\})}{Z_n(\{\alpha^* c_j(n)\})} \tag{30}$$

を得る。ここで分子と分母の結合定数は等しく、右辺では強結合 $\alpha^* c_j(n) \ll 1$ である。そこで、右辺を強結合クラスター展開で評価する事ができる。結果は [7]

$$\log \frac{Z_n^{(-)}(\{\alpha^* c_j(n)\})}{Z_n(\{\alpha^* c_j(n)\})} = -2 L_3^{(n)} L_4^{(n)} \exp\left(-\widehat{\rho}(n) L_1^{(n)} L_2^{(n)}\right) \tag{31}$$

となる。ここで $L_\mu^{(n)}$ は格子 $\Lambda^{(n)}$ の μ 方向の長さである。$\widehat{\rho}(n)$ は't Hooft string tension と呼ばれ、強結合展開は

$$\widehat{\rho}(n) = -\log(\alpha^* c_{1/2}(n)) - 4(\alpha^* c_{1/2}(n))^4 + \cdots > 0 \tag{32}$$

のようになる。(31) 式の vortex 自由エネルギーは、vortex を囲む $(1,2)$ 平面内の Wilson loop の期待値と次の Tomboulis-Yaffe 不等式で関係づけられる [8, 9]

$$\langle W(C) \rangle \le 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Z_\Lambda^{(-)}(\beta)}{Z_\Lambda(\beta)} \right) \right\}^{A_C / L_1 L_2} \tag{33}$$

今 n を非常に大きいが固定された整数とし、十分大きな格子 Λ を考えると、(30)、(31)、(33) と $L_\mu^{(n)} \equiv L_\mu / b^n$ から

$$\langle W(C) \rangle \le \exp\left(-\frac{\widehat{\rho}(n)}{b^{2n}} A_c \right) \tag{34}$$

となる。一方、reflection positivity から $\langle W(C) \rangle$ は面積則より速くは小さくなれないことが従う [10] ので、結局

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp\left(-\widehat{\sigma} A_c\right), \qquad \widehat{\sigma} \ge \frac{\widehat{\rho}(n)}{b^{2n}} \tag{35}$$

となる。これで、Wilson loop の面積則が任意の β に対して証明できた!

3　その後の展開

上の証明の発表後まもなくして、伊東–Seiler により疑義が提出された [2]。彼らの疑問は、上の証明の全てのステップは 4 次元の格子 $U(1)$ 理論でも成り立つように思える、というものであった ($U(1)$ の center としては -1 を取ればよい)。特に、asymptotic non-free な $U(1)$ 理論に対しても MK 変換は強結合への収束を導く [4, 5]。[14] 一方で、4 次元の格子 compact $U(1)$ 理論の弱結合の領域は閉じ込め相ではなく Coulomb 相にあるという厳密な証明がある [11, 12] ので、ここでの証明を $U(1)$ 理論に適用すると、全く間違った結論が得られるように思われるのである。この理由は暫く判然としなかったが、最終的に、上の議論に以下の致命的な欠陥があることが明らかにされた [3]。

上で我々は、もし (27) 式が成り立つなら、(28) 式により $t^* = t(\lambda = 1)$ が得られると述べた。しかしこれは必ずしも正しい statement ではない。このことは、例えば $\Psi(\lambda, t) = e^{-t} - 1 + 2\lambda$ という例を考えてみるとよく分かる。この例では $0 \le \lambda \le 1$ で $t \in \mathbb{R}$ に対して確かに $\partial\Psi/\partial t = -e^{-t} \neq 0$ である。しかしながら $\Psi(\lambda, t) = 0$ の解は $t(\lambda) = -\log(1 - 2\lambda)$ であり、これは $\lambda \ge 1/2$ では実の解とならない。つまり、実の $t(1)$ は存在しない。理由は明らかで、この例では $\lambda = 1/2$ で $t = \infty$ となり、この時 $\partial\Psi/\partial t = 0$ となるわけである。つまり、(28) 式で解 $t(\lambda)$ を連続的に構成できるための正しい条件は (27) 式ではなく

$$\frac{\partial\Psi(\lambda, t(\lambda))}{\partial t} \neq 0, \qquad \text{for } 0 \le \lambda \le 1 \tag{36}$$

である。(27) 式との違いは $|t| = \infty$ の一点だけであるが、この違いが crucial になり得る事は上の例から明らかであろう。実際、(24) 式から

$$\left|\frac{\partial\Psi(\lambda, t)}{\partial t}\right| \le \left|\frac{\partial h(\alpha_n(t), t)}{\partial t}\right| \tag{37}$$

が従うが、(39) 式に示すような典型的な $h(\alpha, t)$ に対しては、$t \to \infty$ で右辺は 0 に行くので、$t = \infty$ はまさに危険な点になっている。このように、上の議論だけからは $t^* = t(\lambda = 1)$ の存在は必ずしも保証されていないのである。

上の議論は $t^* = t(\lambda = 1)$ の存在を保証しないが、そうした t^* が決して存在しないと言っているわけでもない。そこで、上で仮定された t^* が実際存在するかどうか問うのは自然である。この点に関しては、もし $h(\alpha, t)$ が

$$h(\alpha, t) \le C\alpha, \qquad C > 0 \tag{38}$$

を満たし、$b \ge 3$ ならば、仮定した性質を持つ t^* が実際には存在しないことが厳密に証明できる [13]。(38) 式を満たす $h(\alpha, t)$ の実例としては [1]

$$h(\alpha, t) = \exp\left(-t\frac{1-\alpha}{\alpha}\right), \qquad h(\alpha, t) = \tanh\left(\frac{\alpha}{t(1-\alpha)}\right) \tag{39}$$

[14] このように MK 変換は必ずしも正しい繰り込み群の振る舞いを再現しない。確かに $SU(2)$ と $U(1)$ とでは強結合への収束のスピードは全く違うのではあるが。

などがある。もちろん、(38) 式を満たさないような $h(\alpha, t)$ や、$b = 2$ の場合を考えることもできる。しかし、こうした $h(\alpha, t)$ や b に対する制限は文献 [1] の議論の中には全くなく、この事からも文献 [1] の議論が不完全である事が示唆される。

この話題の文脈におけるその後の重要な発展としては、(22) 式と (33) 式の一般のゲージ群 G への拡張があげられる [14]。文献 [14] における (22) 式の一般化の証明において極めて衝撃的なのは、それが MK 変換を全く使わないことである。使っているのは、G の non-trivial な center の元 g によりツイストされた分配関数 Z_Λ^g が、もとの分配関数 Z_Λ より小さい、という事実だけである。上では、MK 変換の性質を酷使して (22) 式を導いたわけであるが、実は、(22) 式自身は系の力学的内容を（ほとんど）含んでいないことが文献 [14] の証明から強く示唆されるのである。

伊東恵一、金澤拓也、川合光、菊川芳夫、澁佐雄一郎、杉野文彦、E. Terry Tomboulis、橋本幸士、米谷民明の各氏にはさまざまな教示を頂いたことに感謝する。特に、金澤氏の講演 [15] は大変参考にさせて頂いた。

References

[1] E. T. Tomboulis, arXiv:0707.2179 [hep-th].

[2] K. R. Ito and E. Seiler, arXiv:0711.4930 [hep-th].

[3] T. Kanazawa, Master thesis, Department of Physics, University of Tokyo, 8 January 2008.

[4] K. R. Ito, Phys. Rev. Lett. **55**, 558 (1985).

[5] V. F. Müller and J. Schiemann, Lett. Math. Phys. **15**, 289 (1988).

[6] 米谷民明, “場の理論における order, disorder,” 素粒子論研究 **59**, 229 (1979).

[7] G. Münster, Nucl. Phys. B **180**, 23 (1981).

[8] E. T. Tomboulis and L. G. Yaffe, Commun. Math. Phys. **100**, 313 (1985).

[9] T. G. Kovács and E. T. Tomboulis, Phys. Rev. D **65**, 074501 (2002) [arXiv:hep-lat/0108017].

[10] E. Seiler, Phys. Rev. D **18**, 482 (1978).

[11] A. H. Guth, Phys. Rev. D **21**, 2291 (1980).

[12] J. Fröhlich and T. Spencer, Commun. Math. Phys. **83** (1982) 411.

[13] H. Suzuki, unpublished.

[14] T. Kanazawa, arXiv:0805.2742 [hep-lat].

[15] T. Kanazawa, talk given at Okayama Institute for Quantum Physics, 22 February 2008.