Negative modes of Schwarzschild black hole in Einstein-Gauss-Bonnet theory

平山 貴之

国家理論科学研究中心 物理組 (NCTS) , 新竹 台湾
&
国立師範大学 (NTNU) , 台北 台湾

7/28 - 8/1 @ 基研研究会

based on arXiv:0804.3694

前置き

- □ ブラックホールは相対論及び重力の量子論で重要である。
- □ ブラックホールの熱力学的性質は様々な示唆を含んでいる。
- □ 温度 T, 質量 M, エントロピー S は、有限温度の汎関数を定義して、そこから計算する事ができる。ブラックホール熱力学から重力の量子的性質をつかまえられるかもしれない。

一般相対性理論における Schwarzschild ブラックホール

- 温度 $T = 1/(4\pi r_h)$, $\qquad r_h$: 地平線の半径
- $S = 4\pi r_h^2$
- $TdS = dM$

前置き

- ブラックホールの安定性と言ったとき、二種類の安定性を考える事ができる。
  - 熱力学的安定性
  - ブラックホール解周りの摂動に対する (量子的) 安定性

  二つの安定性は同じと期待するかもしれない。

- 実際 Schwarzschild ブラックホールの場合、熱力学的に不安定であり、off-shell の方向に不安定モードが存在する。それ以外に、ブラック p-膜やもっと複雑な場合も二つの安定性は一致する。

- 量子重力の有効理論には R^2, $R^{ab}R_{ab}$ のような補正項が期待される。

- じゃ、補正項がある時二つの安定性の関係は保たれるのか？

前置き

- □ ここでは、Gauss-Bonnet 項

$$R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}.$$

を加えた時を考える。５次元以上でこの項の影響が見えるので、次の５次元理論を考える。

$$I = \int d^5x\sqrt{g}\left[R - 2\Lambda + \frac{c}{2}(R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd})\right].$$

- □ 上の作用の解である Schwartzschild 型の解の、熱力学的安定性と不安定モードの存在を調べる。

ブラックホール解

□ Schwarzschild 解 ['85 Boulware, Deser],

$$ds^2 = \bar{g}_{ab}dx^a dx^b = f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_3^2,$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2c}\left[1 + \epsilon\sqrt{1 + \frac{2c}{3}\left[\frac{4\mu}{r^4} + \Lambda\right]}\right],$$

$\epsilon = \pm 1$。$\epsilon = -1$ の解は Gauss-Bonnet 項の係数 c をゼロにする極限で通常の AdS Schwarzschild ブラックホールに帰着する。

μ :　積分定数 (質量と関係)

ブラックホール熱力学

□ 温度、質量、エントロピーはそれぞれ ['88 Myers, Simon]

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{f'(r_h)}{4\pi} = \frac{3 - r_h^2\Lambda}{6\pi(r_h + (2c/r_h))}, \\
M &= \frac{\mathcal{A}_3}{4G_5}\left[\frac{3}{2}r_h^2 + \frac{3c}{2} - \frac{\Lambda}{4}r_h^4\right], \\
S &= \frac{\mathcal{A}_3}{4G_5}\left[r_h^3 + 20cr_h\right].
\end{aligned}
$$

これらは作用から次の関係式から計算される。

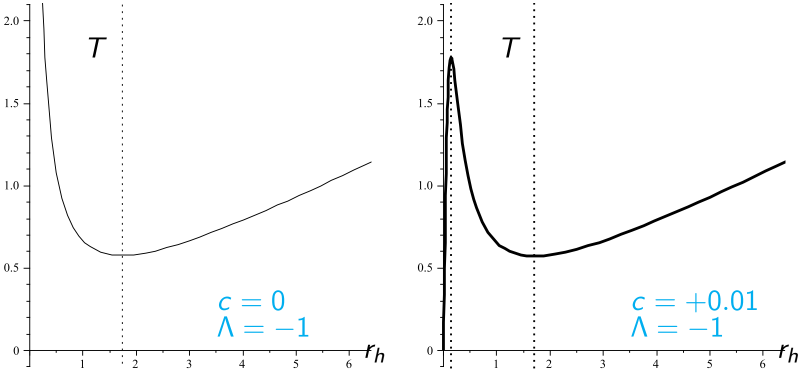
$$
I(\overline{g}) = I_+(\overline{g}) + I_-(\overline{g}) = \frac{1}{T}M - S, \qquad \frac{\partial I(\overline{g})}{\partial T^{-1}} = M
$$

熱力学的安定性

□ 熱力学的安定性は比熱の正負で決まる。

$$C_V = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial r_h}\left[\frac{\partial T}{\partial r_h}\right]^{-1} \propto \left[\frac{\partial T}{\partial r_h}\right]^{-1}.$$

□ 今考えているブラックホールの場合は、



摂動に対する安定性

- ブラックホール解の周りの摂動を考える前に摂動に対する安定性との関係を復習しておく ['01, Reall]。

- x を汎関数積分をするときの経路とすると、それぞれの経路 x に対し $M(x)$,$S(x)$ が計算でき、ブラックホール解 $(\partial I/\partial x = 0)$ 周りの作用の二回微分は

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\right)_T = \left(T\frac{dx}{dT}\right)^{-2}\frac{dM}{dT}.$$

  従って比熱が負の時 $C_V < 0$、作用がより小さくなる方向、負モードが存在する。

摂動に対する安定性

□ ブラックホール解の周りの摂動を考える。

$$g_{ab} = \overline{g}_{ab} + \delta g_{ab}, \quad \rightarrow I(g) = I_0(\overline{g}) + I_2(\delta g, \overline{g}),$$

$$I_2(\delta g, \overline{g}) = \int d^5x \, \delta g \cdot \Delta(\overline{g}) \cdot \delta g,$$

従ってもし固有値 λ

$$\Delta(\overline{g})_{ab}{}^{cd} \, \delta g_{cd} = \lambda \, \delta g_{ab}$$

が負 $\lambda < 0$ の解があれば、ブラックホールは按点になっていて摂動に対して不安定な方向がある。

- ここで注意だが、$\lambda \neq 0$ モードは off-shell モード。この議論は半古典的な議論。

S モード

□ 時間に依存しない S モードを考える。

$$\delta g_a{}^b = (H_{tt}(r), H_{rr}(r), K(r), K(r), K(r)),$$

なぜならこのモードが負モードを出すことが知られているから。

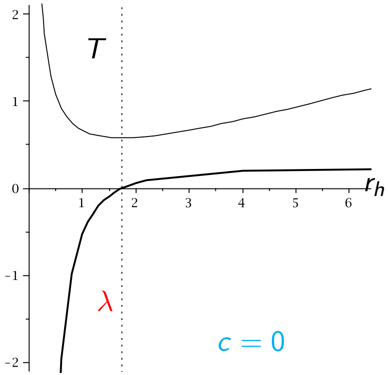
□ 数値的に解く。

□ 正規化可能なモードを取り出すために、適当な境界条件を地平線 $r = r_h$ と無限遠 $r = \infty$ で与えなくてはならない。

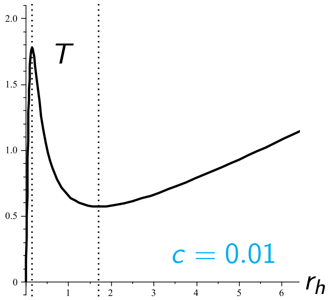
負モード ($c = 0$)

□ 固有値 λ の値を表示。

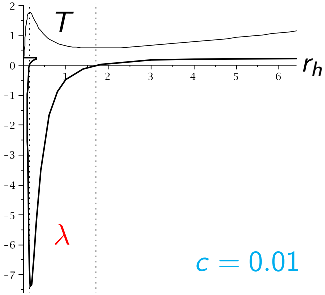
$$\Delta(\bar{g}) \cdot \delta g = \lambda \delta g$$



$c = 0.01$

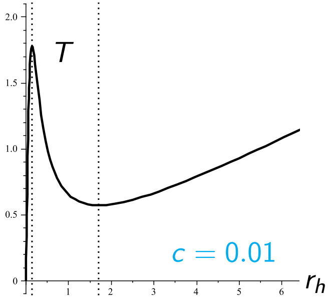


2.0
1.5
1.0
0.5
0
1
2
3
4
5
6
T
$c = 0.01$
r_h

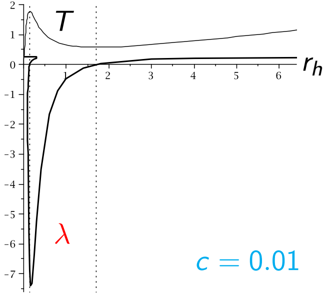


2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
1
2
3
4
5
6
T
r_h
λ
$c = 0.01$

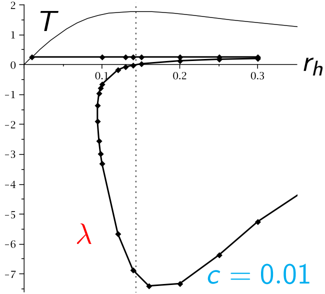
$c = 0.01$



T
c = 0.01
r_h
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1 2 3 4 5 6



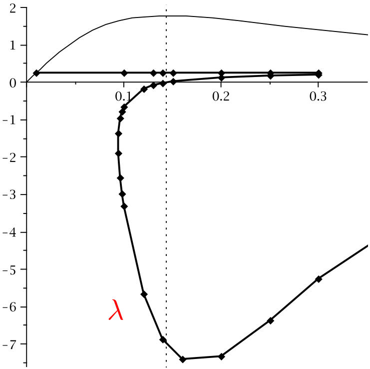
T
λ
c = 0.01
r_h
2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7
1 2 3 4 5 6



T
λ
c = 0.01
r_h
2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7
0.1 0.2 0.3

摂動に対する安定性対熱力学的安定性

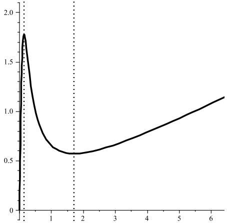
□ $c = 0.01$ ($\Lambda = -1$) のとき、ズレを発見。



仮説

- ブラックホールは質量だけでは唯一に決まらない？
  - スカラーヘアー？(Gauss-Bonnet 項は真空周りでは新たな質量を持ったスカラー場を持つ。)
  - しかし球対称な解は Schwarzschild ブラックホール ($\epsilon = \pm 1$) 解だけであることが示せる。

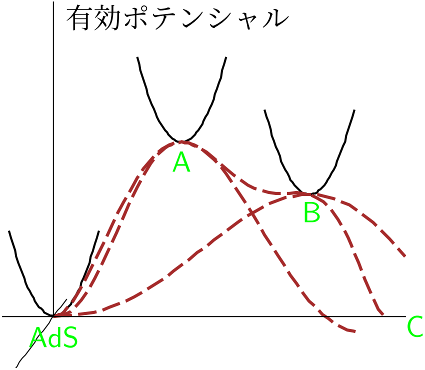
- 同じ温度を持ちながらサイズの異なるブラックホールが三つある。一方この領域では負モード解が二つある。そして自由エネルギーを計算すると一番大きなブラックホールが一番大きい。



  - さらに負モードが、有限温度では真空が量子論的に不安定でブラックホールを生成しながら崩壊していく過程を表している。(Schwinger 模型)

仮説

□ 負モードは AdS 空間の崩壊を表している？



A : 一番小さなブラックホール　$(C_V > 0)$
B : 中くらいの大きさのブラックホール $(C_V < 0)$
C : 一番大きなブラックホール　$(C_V > 0)$

まとめ

- □ ５次元 Gauss-Bonnet 理論の Schwarzschild ブラックホール周りの負モードを調べた。
- □ 熱力学的安定性と摂動に対する安定性は、ブラックホールが大きいと両者は完全に一致する。がブラックホールが小さい時ズレることを発見した。
- □ ブラックホールに毛が無いというのが嘘というのと関係しているかもしれない。
- □ 熱力学的安定性と摂動に対する安定性の関係を考え直さなくてはならない。
- □ この話はブラックストリングの Gregory-Laflamme 不安定性と関係している。所謂 correlated stability conjecture の反例になっていそう。