格子上のGlashow-Weinberg-Salam模型

筑波大学 計算科学研究センター　所属

加堂 大輔

研究会 - 量子場理論と弦理論の発展 -
2008年7月28日（月） @京都大学 基礎物理学研究所

D.K. and Y.Kikukawa, JHEP 0805:095,2008.
erratum : GWS on the lattice, in preparation

1. Introduction

Glashow-Weinberg-Salam 模型

- 電弱相互作用の基本理論
  (電磁気学と弱い相互作用の統一、ヒッグス機構、…)

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ群のカイラルなゲージ理論

標準模型： QCD + GWS

$$\underbrace{SU(3)_C}_{\text{対称}} \times \underbrace{SU(2)_L \times U(1)_Y}_{\text{非対称}}$$

左・右巻き： 対称 非対称

- 摂動論の任意の次数でwell-defined (ゲージアノマリーの相殺)

- バリオン数非保存（非摂動的効果）

c.f. （強結合の）カイラルゲージ理論の非摂動効果
 – ゼロ質量の複合フェルミオン、力学的なゲージ対称性の破れ…

<u>疑問</u>

- 摂動論を越えて理論を定義することは可能なのか？
- 非摂動的効果を定量的に評価をする方法は？

格子ゲージ理論を用いたカイラルゲージ理論の定式化

"特に、このトークでは現在まで未解決の問題であった
Glashow-Weinberg-Salam模型の格子定式化を行う"

２．　Ginsparg-Wilson 関係式と格子上で厳密なカイラル対称性

格子上のカイラル対称性の難しさ

- 連続のカイラル対称性　v.s. ダブリングのない格子作用
  （ c.f. Nielsen-Ninomiya の no-go 定理 ）

ウィルソンフェルミオン　$\mathcal{L}^{lat} = \bar\psi(x)\gamma_\mu\partial^s_\mu\psi(x) - \frac{ar}{2}\bar\psi(x)\partial_\mu\partial^*_\mu\psi(x)$

$$\frac{ar}{2}\bar\psi\partial_\mu\partial^*_\mu\psi = \frac{ar}{2}[\bar\psi_L\partial_\mu\partial^*_\mu\psi_R + \bar\psi_R\partial_\mu\partial^*_\mu\psi_L]$$

単一のフェルミオンモード ○　カイラル対称性 ×

- 単一のカイラルフェミオンやカイラルゲージ理論を格子上で定義する上での障害

Ginsparg-Wilson 関係式

P.H.Ginsparg and K.G.Wilson, 1982

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D \qquad \text{where } S_F = a^4\sum_x \bar\psi(x)D\psi(x)$$

- 連続のカイラル理論からブロックスピン変換で導出

- 格子上での厳密なカイラル対称性　M. Luscher, 1998

$$\gamma_5 D + D\hat\gamma_5 = 0 \qquad \hat\gamma_5 = \gamma_5(1 - aD)$$

$$\delta\bar\psi = \bar\psi i\epsilon\gamma_5, \qquad \delta\psi = i\epsilon\hat\gamma_5\psi.$$

- 具体的演算子としてoverlap Dirac operator　H. Neuberger, 1998

  ゲージ場に対するアドミシビィティ条件 $\Longrightarrow$ 局所性の保証

  $||1 - P_{\mu\nu}(x)|| < \epsilon$　　$|D(x,y)| \simeq \mathrm{e}^{-|x-y|/a\varrho}$

3.　格子上の カイラルフェルミオンとカイラルゲージ理論

格子上のカイラルフェルミオンの定義

$$\gamma_5 D + D\hat{\gamma}_5 = 0, \quad \hat{\gamma}_5 = \gamma_5(1 - aD), \quad \hat{\gamma}_5^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$P_\pm = \frac{1\pm\gamma_5}{2}, \quad \hat{P}_\pm = \frac{1\pm\hat{\gamma}_5}{2} \qquad P_\pm^2 = P_\pm, \quad \hat{P}_\pm^2 = \hat{P}_\pm$$

$$\bar{\psi}_L(x) = \psi(x)P_+$$

$$\psi_L(x) = \hat{P}_-\psi(x)$$

格子上のカイラルゲージ理論の作用の定義

$$\begin{aligned} S &= \sum_x \bar{\psi}(x)D\psi(x) \\ &= \sum_x \bar{\psi}(x)D\left\{\hat{P}_- + \hat{P}_+\right\}\psi(x) \\ &= \underbrace{\sum_x \bar{\psi}P_+D\hat{P}_-\psi}_{} + \sum_x \bar{\psi}P_-D\hat{P}_+\psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}_L(x)D\psi_L(x)$$

“古典論はこれでOK”

径路積分による量子化

$$Z_F = \int D\psi_L D\bar{\psi}_L \mathrm{e}^{-S_F}$$

$$\psi_L(x) = \sum_j c_j v_j(x), \qquad \hat{P}_- v_j(x) = v_j(x)$$

$v_j(x)$ ：基底ベクトル
c_j ：グラスマン数の係数

ナイーブなカイラルフェルミオン測度の定義

$$D\bar{\psi}_L D\psi_L = \prod d\bar{c}_i dc_j$$

測度の定義の不定性

$$v_j(x) \to v_i(x)\mathcal{O}_{ij}(U), \quad \text{(ユニタリー変換)}$$

$$\int D\psi_L D\bar{\psi}_L \to \det \mathcal{O}_{ij}(U) \int D\psi_L D\bar{\psi}_L$$

- 位相 $\det\mathcal{O}_{ij}$ はゲージ場に依存していよい。

径路積分測度のゲージ場に依存する位相不定性は
理論を矛盾なく定義するように固定されなければならない。

望ましいフェルミオン径路積分測度の条件

$$<\mathcal{O}>_F[U] = \det \mathcal{O}_{ij}[U] \int D\psi_L D\bar{\psi}_L \mathcal{O} \mathrm{e}^{-S_F}$$

- 局所性
- $<\mathcal{O}>_F$ のゲージ場の関数としての一価性
- 厳密なゲージ不変性
- 格子対称性

⇩

フェルミオン測度に対する条件（基底ベクトルに対する条件）

$$\mathcal{L}_\eta = \sum_x \sum_j v_j^*(x)\delta_\eta v_j(x) \equiv \sum_x \eta_\mu(x) j_\mu(x), \qquad \delta_\eta U_\mu(x) = i\eta_\mu(x)U_\mu(x)$$

$\mathcal{L}_\eta / j_\mu(x)$ ：測度項/測度カレント

・$j_\mu(x)$ は局所的なカレント.

$U_\mu(x) \in U(1)$

・(局所的な一価性) + （大域的一価性）

$$\Rightarrow \delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta = i\mathrm{Tr}\{\hat{P}_-[\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-]\} \Leftarrow \delta_\eta\delta_\zeta <\mathcal{O}>_F - \delta_\zeta\delta_\eta <\mathcal{O}>_F = 0$$

・(有限の間隔でのゲージアノマリーの相殺)

$$\partial_\mu^* j_\mu(x) = i\mathrm{Tr}\{\gamma_5(1-aD)(x,x)\} \sim \underbrace{F\tilde{F}}_{0} + O(a)$$

４. 格子上のGlashow-Weinberg-Salam 模型の構成

- 格子ゲージ場とその作用

$$U_\mu^{(1)}(x) \in U(1), \quad U_\mu^{(2)}(x) \in SU(2), \qquad U_\mu(x + L\nu) = U_\mu(x), \quad \text{for all } \mu, \nu$$

$$P_{\mu\nu}(x) \equiv U_\mu(x) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu^{-1}(x + a\hat{\nu}) U_\nu^{-1}(x), \qquad a^2 F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{i} \ln P_{\mu\nu}(x)$$

アドミシビィティ条件

$$a^2 ||F_{\mu\nu}(x)|| < \epsilon \quad \text{or} \quad ||1 - P_{\mu\nu}(x)|| < \epsilon$$

$\Longrightarrow$ ゲージ場のトポロジー

ただし ϵ は十分小さな正の整数

トーラス上のU(1) 格子ゲージ場の空間は磁束セクターに分割される

$$\mathcal{U} = \prod_m \otimes \mathcal{U}[m], \qquad m_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s,t} F_{\mu\nu}^{(1)}(x + s\hat{\mu} + t\hat{\nu}) \quad (\text{整数})$$

“U(1)ゲージ場は自明なセクターに限定する。”

（このセクターでは、代表元として $U_\mu^{(1)}(x) = 1$ が取れる。）

ゲージ場の作用

$$S_G = a^4 \sum_x \sum_{\mu,\nu} \mathrm{tr}\{1 - P_{\mu\nu}^{(2)}(x)\} \left[1 - \mathrm{tr}\{1 - P_{\mu\nu}^{(2)}(x)\}/\epsilon_2^2\right]^{-1}$$
$$+ a^4 \sum_x \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}^{(1)}(x) \left[1 - F_{\mu\nu}^2(x)/\epsilon_1^2\right]$$

- クォーク、レプトンとその作用

$$q_-^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L, \qquad u_R^i, \qquad d_R^i \qquad\qquad \text{(color index i=1,2,3)}$$

$$l_- = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \qquad [\nu_{eR}], \qquad e_R$$

$$\psi_- = ((q_-^1)^t, (q_-^2)^t, (q_-^3)^t, (l_-)^t)^t,$$

$$\psi_+ = (u_R^1, d_R^1, u_R^2, d_R^2, u_R^3, d_R^3, [\nu_R], e_R)^t,$$

クォーク、レプトン場の作用

$$S_F = a^4 \sum_x \sum_{f=1}^{3} \left\{ \bar{\psi}_-^f D \psi_-^f + \bar{\psi}_+^f D \psi_+^f \right\}, \qquad D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D$$

$$\bar{\psi}_\pm(x) = \bar{\psi}_\pm(x) P_\mp, \quad \psi_\pm(x) = \hat{P}_\pm \psi_\pm(x),$$

-ヒッグス場の作用と湯川相互作用項

$$S_H = a^4 \sum_x (\nabla_\mu \phi(x))^\dagger \nabla_\mu \phi(x) + \frac{\lambda}{2} \left(\phi(x)^\dagger \phi(x) - v^2 \right)$$

$$S_{\mathsf{Y}} = a^4 \sum_x y_u \bar{q}_-^i(x) \phi(x) u^i(x) + y_u^* \bar{u}_+^i \tilde{\phi}(x) q_-^i(x) + \cdots$$

格子上のGWS模型の全作用： $S = S_G + S_F + S_Y + S_H$

GWS模型に対する径路積分測度の定義

（1） 再構成定理の証明

“望ましいフェルミオン測度の条件を満足するカレント $j_\mu(x)$ の存在を仮定する。そのとき、大域的な障害なく径路積分測度がそのカレントから再構成できることを示す。”

⑵ 再構成定理の前提条件を満たすカレントを与える。 .

$\mathcal{L}_\eta = \sum_x \eta_\mu(x) j_\mu(x)$

再構成定理

D.K. and Y.Kikukawa, JHEP 0805:095,2008.

局所的なカレント $j_\mu^a(x)$ $(a=1,2,3)$ と $j_\mu(x)$ が存在し、次の条件を満たすとき、
格子GWS模型のフェルミオン径路積分測度をそのカレントから再構成することができる。

(1)　これらのカレントはアドミシブルゲージ場に滑らかに依存する。

⑵ $j_\mu^a(x)$ と $j_\mu(x)$ は、それぞれゲージ共変・不変な軸性ベクトルカレントである。

⑶ 線形汎関数 $\mathcal{L}_\eta = a^4 \sum_x \{\eta_\mu^a(x) j_\mu^a(x) + \eta(x) j_\mu(x)\}$ は局所的な積分可能性条件を満足する

$$\delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta + a\mathcal{L}_{[\eta,\zeta]} = i\mathrm{Tr}\{\hat{P}_-[\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-]\} + i\mathrm{Tr}\{\hat{P}_+[\delta_\eta \hat{P}_+, \delta_\zeta \hat{P}_+]\}$$

$$\delta_\eta U_\mu(x) = i\eta_\mu(x) U_\mu(x)$$

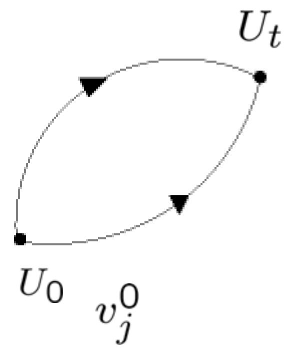
（４）異常保存則を満たす。

$$\{\nabla_\mu^* j_\mu\}^a(x) = \mathrm{Tr}\{T^a \gamma_5 (1-aD)(x,x)\},$$

$$\partial_\mu^* j_\mu(x) = \mathrm{Tr}\{Y\gamma_5 (1-aD)(x,x)\},$$

ただし、 T^a はSU⑵の生成子で $Y_\pm$ はハイパーチャージである。

フェルミオン測度（基底ベクトル）の与え方



$$v_j(x)[U_t] = \begin{cases} Q_t v_1^0(x) W^{-1} & (j=1) \\ Q_t v_j^0(x) & (j \neq 1) \end{cases}$$

$$u_j(x)[U_t] = Q_{t+} u_j^0,$$

ただし、Q_t は、次で定義される発展演算子である。

$$\partial_t Q_{t\pm} = [\partial_t P_{t\pm}, P_{t\pm}] Q_{t\pm}, \quad Q_{0\pm} = 1, \qquad P_t = \hat{P}_-[U_t]$$

$$P_t(Q_t v_j^0) = Q_t v_j^0$$

さらに、W は次で定義されるWilson lineである。

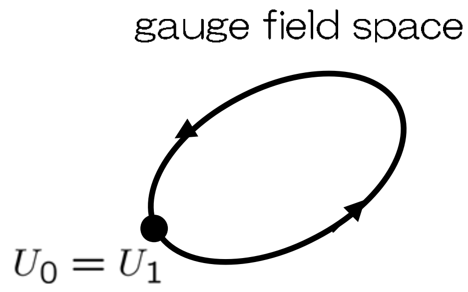
$$W = \exp\left\{ i \int_0^1 \mathrm{d}t \mathcal{L}_\eta \right\},$$

$$\mathcal{L}_\eta = a^4 \textstyle\sum_x \{ \eta_\mu^a(x) j_\mu^a(x) + \eta(x) j_\mu(x) \}, \qquad \eta_\mu(x) = i \partial_t U_t(x,\mu) U_t(x,\mu)^{-1}$$

“このように与えた積分測度は、大域的積分可能性以外の全ての
望ましいフェルミオン測度の条件を満足する。”

再構成定理の証明（大域的積分可能性の証明）

$$
\langle\mathcal{O}\rangle_F[U_1] = \langle\mathcal{O}\rangle_F[U_0] \\
\times\exp\left\{-i\int_0^1 \mathrm{d}s\mathcal{L}_\eta\right\}\det(1-P_{-0}+P_{-0}Q_{1-})\det(1-P_{0+}+P_{0+}Q_{1+})
$$



ゲージ場の空間中の任意の閉じたループ U_t $(0 \leq t \leq 1,\ U_0 = U_1)$ に対し

$$
W \equiv \exp\left\{i\int_0^1 \mathrm{d}s\mathcal{L}_\eta\right\} = \det(1-P_{-0}+P_{-0}Q_{1-}) \\
\times\det(1-P_{0+}+P_{0+}Q_{1+})
$$

ならば、大域的積分可能性が成り立つ。

- 局所的積分可能性（再構成定理の前提(3)）
- ゲージ場の空間はU(1)とSU(2)の直積空間

従って、可縮でない次のような閉じた曲線を考えればよい。

$$
U_t = \begin{cases} U_t^{(2)} \otimes 1, & (0 \leq t \leq 1), \qquad \text{SU(2)-ループ} \\ U^{(2)} \otimes U_t^{(1)}, & (1 \leq t \leq 2), \qquad \text{U(1)-ループ} \end{cases}
$$

ただし、 $U_0^{(2)} = U_1^{(2)} = U^{(2)}$ と $U_1^{(1)} = U_2^{(1)} = U^{(1)}$

SU(2)-ループ $\quad U_t = U_t^{(2)} \otimes 1, \qquad (0 \leq t \leq 1)$

$$U^{(2)}(x,\mu)^* = (i\sigma_2)U^{(2)}(x,\mu)(i\sigma_2)^{-1}, \qquad D[U^{(2)}] = (\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)D[U^{(2)}]^*(\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)^{-1}$$

$$\hat{P}_- = (\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)(\hat{P}_-)^*(\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)^{-1}$$

４つの左巻きdoubletの基底ベクトル

$$q_-^1(x) = \sum_j w_j(x)c_j^1, \qquad q_-^2(x) = \sum_j (\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)w_j^*(x)c_j^2$$

$$q_-^3(x) = \sum_j w_j(x)c_j^3, \qquad l_-(x) = \sum_j (\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)w_j^*(x)c_j^4$$

$$\mathcal{L}_\eta = 2\sum_x \sum_j (w_j^*(x)\delta_\eta w_j(x) + w_j(x)\delta_\eta w_j^*(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad W \equiv \exp\left\{ i\int_0^1 \mathrm{d}s\mathcal{L}_\eta \right\} = 1$$

発展演算子 $\quad \partial_t Q_{t\pm} = [\partial_t P_{t\pm}, P_{t\pm}]Q_{t\pm}, \quad Q_{0\pm} = 1$

$$Q_{1+} = 1$$

$$Q_{1-} = (\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)\{Q_{t-}^{-1}\}^T(\gamma_5 C \otimes i\sigma_2)^{-1}$$

$$\det(1 - P_{0-} + P_{0-}Q_{1-}) = \det(1 - P_{0-} + P_{0-}Q_{1-}^{-1}) = \pm 1$$

“SU(2)-ループに対して大域的積分可能性が成立。”

$$\det{}_4\,(1 - P_{0-} + P_{0-}Q_{1-})\det(1 - P_{0+} + P_{0+}Q_{1+})$$
$$= [\det(1 - P_{0-} + P_{0-}Q_{1-})]^4 = 1 = W$$

U(1)-ループ $U_t = U^{(2)} \otimes U_t^{(1)}, \qquad (0 \le t \le 1)$

$$\mathrm{U(1)}:\ \underbrace{\text{field tensor}}_{\text{可縮}} \times \underbrace{\text{Wilson line}}_{\text{nongauge}} \times \underbrace{\text{ゲージ変換}}_{\text{gauge}}$$

- gauge ループ $U_t^{(1)}(x,\mu) = \Lambda_t(x)\Lambda_t(x+\hat{\mu}), \qquad \Lambda_t(x) = \mathrm{e}^{i2\pi t\delta_{xy}},$

$$W = \exp\{i2\pi\{\mathrm{tr}\{Y_-\gamma_5(1-D)(y,y)\} - \mathrm{tr}\{Y_-\gamma_5(1-D)(y,y)\}\}\}$$ ⇦ 再構成定理の前提(4)

"U(1)-gaugeループに対して大域的積分可能性が成立。"

$$\det(1-P_{0-}+P_{0-}Q_{1-})\det(1-P_{0+}+P_{0+}Q_{1+}) \\ = \exp\{i2\pi\{\mathrm{tr}\{Y_-\gamma_5(1-D)(y,y)\} - \mathrm{tr}\{Y_-\gamma_5(1-D)(y,y)\}\}\} = W$$

D.K and Y.Kikukawa, erratum, in preparation

- nongauge ループ $U_t^{(1)}(x,\mu) = U_t^{[w]}(x,\mu), \qquad U_t^{[w]}(x) = \mathrm{e}^{i2\pi t\delta_{\mu\nu}\delta_{x0}},$

$$\mathcal{L}'_\eta(t) = \mathcal{L}_\eta(t) - i\frac{1}{2\pi}\delta_{\mu\nu}\Big(\ln\det\{1-P_0+P_0Q_1\}\det(1-P_{0+}+P_{0+}Q_{1+})|_{C_\nu} \\ -i\int_{C_\nu} dt_\nu \mathcal{L}_\nu(0,..0,t_\nu,0...,0)\Big)$$

"U(1)-nongaugeループに対して大域的積分可能性が成立。"

$$W = \exp\left\{i\int_0^1 \mathrm{d}s\mathcal{L}'_\eta\right\} = \det\{1-P_0+P_0Q_1\}\det(1-P_{0+}+P_{0+}Q_{1+})$$

従って、ゲージ場の空間中の任意の閉じたループ U_t $(0 \le t \le 1,\ U_0 = U_1)$ に対して

$$<\mathcal{O}>_F[U_1] = <\mathcal{O}>_F[U_0]$$ （再構成定理の証明終わり）

再構成定理の前提条件を満たすカレントの構成

“U(1)ゲージ場を消すと、GWS模型はvector-likeな理論”

c.f. 格子上のU(1) CGT の構成論 M.Lüscher, Nucl. Phys. B **568**, 162 (2000)
D.K. and Y.Kikukawa, JHEP 0802:063,2008.

おおよそ、U(1)ゲージ群のときに与えた解 ＋ SU(2)×U(1) Wilson lineの部分の解

$$U_t(x,\mu) = U^{(2)}(x,\mu) \otimes \left[\mathrm{e}^{isA'_\mu(x)} U_{[w]}(x,\mu) \right], \qquad (0 \le s \le 1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\eta &\equiv a^4 \sum_x \left\{ \eta^a_\mu(x) j^a_\mu(x) + \eta_\mu(x) j_\mu(x) \right\}, \\ &= i\int_0^1 \mathrm{d}s \mathrm{Tr}\{\hat{P}_-[\partial_s P_-, \delta_\eta \hat{P}_-]\} + i\int_0^1 \mathrm{d}s \mathrm{Tr}\{\hat{P}_+[\partial_s P_+, \delta_\eta \hat{P}_+]\} \\ &\qquad + \delta_\eta \int_0^1 \mathrm{d}s \sum_x \left\{ A'_\mu(x) k_\mu(x) \right\} + \mathcal{L}_\eta|_{U=U^{(2)}\otimes U_{[w]}}, \end{aligned}$$

ただし、 $q^{(1)}(x) = i\mathrm{Tr}\{Y\gamma_5(1-aD)(x,x)\} = \partial^*_\mu k_\mu(x),$

$k_\mu(x)$ ：ゲージ不変な局所カレント

Y.Kikukawa and Y.Nakayama, 2002

“このようにして与えたカレント $j^a_\mu(x)$ と $j_\mu(x)$ は再構成定理の前提条件を満たす。”

6. まとめと展望

- Ginsparg-Wilson関係式に基づくことで、格子上でGlashow-Weinberg-Salam模型を非摂動論的に構成することができる。

- 構成された理論は、U(1)については自明なトポロジカルセクターを限定するが、SU(2)群は全てのトポロジカルセクターで定義されている。

-摂動展開の全てのオーダーでゲージ不変な正則化を与える。

- バリオン数の非保存過程に対する応用
  インスタントンやスファレロン遷移確立の計算（半古典近似）

$$\Gamma \sim \frac{detD_B[U_{vac}]}{detD_B[U_{inst}]}\frac{detD_F[U_{inst}]}{detD_F[U_{vac}]}\, e^{-\frac{8\pi^2|Q|}{g^2}}$$

課題

- 格子カイラルゲージ理論の拡張。標準模型, テクニカラー模型…..
  より一般的な非可換カイラルゲージ理論の格子定式化。

- カイラルゲージ理論のダイナミクスの定量的評価。