Multiple M2-branes and conformal invariance, $SO(8)_R$

総研大・KEK　D3　住友洋介

磯暁氏、張森氏、本間良則氏　(総研大・KEK)、
梅津裕志氏　(釧路工業高等専門学校)　との共同研究

arXiv: 0805.1895, 0806.3498, 0807.3825

Introduction

Multiple M2-branes effective action

Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG) $\mathcal{N}=8$

Chern-Simons $SO(8)_R$ $[X^I, X^J, X^K]$: Lie 3-algebra

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{ll} SO(4) & \text{Euclidean BLG} \\ \text{Lie algebra} & \text{Lorentzian BLG} \end{array} \right.$

f^{abcd} :完全反対称

Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena (ABJM) $\mathcal{N}=6$

Chern-Simons $SU(4)_R \times U(1)_R$ $(\mathbf{C}^4/\mathbf{Z}_k)$

Bi-fundamental $U(N) \times U(N)$

Klebanov-Witten のsuperpotentialにCS理論をcouple

dual geometry : $AdS_4 \times S^7/\mathbf{Z}_k$

BLG $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ ABJM

$SU(2)\times SU(2)$ ABJMはEuclidean BLGを再現, SO(8)$_R$

Lorentzian BLG ? SO(8)$_R$?

ABJM のスケーリング極限 (Inonu-Wigner contraction)

- $\mathbf{Z}_k$ のレベル $k\to\infty$
- ブレーンの重心を $\mathbf{Z}_k$ の特異点から引き離す

$\mathbf{C}^4/U(1)$

Lorentzian BLG の物理的意味？

- 重力側で見えているconformal対称性(AdS)

generalized conformal invariance

- M理論が定義されている gravity dual の理解

曲った時空中の古典解とその周りの揺らぎで記述

Scaling limit of the ABJM theory

['08 Honma-Iso-Sumitomo-Zhang]

$$S = \int d^3x \mathrm{tr}\left[K_{\text{boson, fermion}} + K_{\text{CS}} - V_{\text{boson}} - V_{\text{fermion}}\right]$$

$$K_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi}\left[A_L dA_L + \frac{2i}{3}A_L^3 - A_R dA_R - \frac{2i}{3}A_R^3\right]$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(A_L + A_R), \quad B = \frac{1}{2}(A_L - A_R)$$

Bi-fundamental complex $\mathrm{SU}(4)_\mathrm{R}$ field

$$Y_{ij}^A = Y_0^A \delta_{ij} + \hat{Y}_{ij}^A \qquad \text{trace + traceless}$$

scaling limit $\lambda \to 0$

$$B \to \lambda B, \quad Y_0^A \to \frac{1}{\lambda} Y_0^A, \quad \psi_{0A} \to \frac{1}{\lambda}\psi_{0A}, \quad k \to \frac{1}{\lambda}k.$$

Inonu-Wigner contraction

ABJM SU(N) x SU(N) gauge theory

$Y \to UYV^\dagger$: bi-fundamental

$$T = T_L + T_R, \quad S = T_L - T_R$$

$$[T^i, T^j] = i f^{ij}{}_k T^k,\ [T^i, S^j] = i f^{ij}{}_k S^k,\ [S^i, S^j] = i f^{ij}{}_k T^k$$

$$\Downarrow \quad S^i \to \frac{1}{\lambda} S^i, \quad \lambda \to 0$$

$$[T^i, T^j] = i f^{ij}{}_k T^k,\ [T^i, S^j] = i f^{ij}{}_k S^k,\ [S^i, S^j] = 0$$

Lorentzian BLG の持つゲージ構造と同じ

SU(N) x SU(N) gauge theory

発散部分 → 拘束条件： $\partial^2 Y_0^A = 0, \quad \Gamma^\mu \partial_\mu \psi_0^A = 0.$

→ Lorentzian BLGの負号の運動項からの拘束条件

有限部分

上記拘束条件を満たす結合をもつBF+scalar+fermion

→ $\boxed{\text{Lorentzian BLG theory}}$

$SO(8)_R$ の回復

$\mathcal{N} = 6 \to \mathcal{N} = 8$

boson 部分 (real 場 I = 1, ・・,8)

$$L_b = \mathrm{tr}\left[-\frac{1}{2}(D_\mu \hat{X}^I - B_\mu X_0^I)^2 + \frac{1}{2}BF - \partial_\mu X_0^I B^\mu \hat{X}^I + \frac{1}{4}(\hat{X}_0^K)^2[\hat{X}^I, \hat{X}^J]^2 - \frac{1}{2}(X_0^I[\hat{X}^I, \hat{X}^J])^2\right]$$

d.o.f.	CS	YM(D2)
gauge	0	1
scalar	8	7

3次元のときはgauge場の自由度1をscalar場に duality変換 [‘04 de Wit-Nicolai-Samtleben]

Generalized conformal symmetry

['08 Honma-Iso-Sumitomo-Zhang]

まずは $X_0^I = g(x)\delta^{I8}$ 、B場についてintegrate out

$$I' = 1, \cdots, 7$$

$$\Rightarrow \quad L = \mathrm{tr}\left[-\frac{1}{4g(x)^2}F^2 - \frac{1}{2}(D_\mu \hat{X}^{I'}) + \frac{1}{4}g(x)^2[\hat{X}^{I'}, \hat{X}^{J'}]^2\right]$$

- $g(x) = g$: const.

通常のD2-brane effective action $\Rightarrow$ non-conformal

- $g(x) \neq$ const. $\quad \partial^2 g(x) = 0$: 時空に依存したcoupling

$g(x)$もconformal変換：
$$\delta g(x) = e^{-1/2\epsilon} g(x) \qquad \text{dilatation}$$
$$\delta g(x) = -(\epsilon \cdot x) g(x) \qquad \text{special conf.}$$

$\Rightarrow$ generalized conformal invariant ['98 Jevicki-Kazama-Yoneya]

さらに、拘束条件に対するconformal変換 : $\partial^2 \delta g(x) = 0$

$\Rightarrow$ 3次元世界体積 (2-brane)のときのみ成立

より一般に座標依存した結合 $X_0^I(x)$ を持つとき (B場を積分しreal場表示)

Lorentzian BLG　: generalized conformal

$$\mathcal{L}_{\text{b}} = \text{tr}\left[-\frac{1}{2}(D_\mu P^I)^2 + \frac{1}{4}X_0^2[P^I, P^J]^2 + \frac{1}{2(X_0^I)^2}\left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda} - 2P_I\partial^\mu X_0^I\right)^2\right]$$

$$P^I = \left(\delta^{IJ} - \frac{X_0^I X_0^J}{(X_0^K)^2}\right)X_J$$: scalar場は結合 $X_0^I(x)$ の方向と直交

拘束条件

$$\partial^2\delta X_0^I = 0, \qquad \Gamma^\mu\partial_\mu\delta\psi_0 = 0$$ ：2-brane のときのみ成立

Note: H. Verlindeの解

$$\partial^2 X_0^I = -4\pi\sum q_i^I\delta^3(x - z_i), \qquad X_0^I = \sum\frac{q_i^I}{|x - z_i|}$$

➡ 同じ変換性　$(\delta z_i^\mu = 2(\epsilon\cdot z_i)z_i^\mu - \epsilon^\mu z_i^2,\ \delta q_i^I = (\epsilon\cdot z_i)q^I)$

➡ generalized conf. inv.

Dual Gravity and recovery of SO(8)

[‘08 Honma-Iso-Sumitomo-Umetsu-Zhang]

ABJMのgravity dual : $AdS_4 \times S^7/\mathbf{Z}_k$ = $AdS_4 \times \underline{\mathbf{CP}^3 \times U(1) \text{ fibration}}$

(注: ABJM $g_{\text{eff}} \equiv N/k$:fixed)

$$ds_{\mathbf{CP}^3} + \underline{\frac{1}{k^2}(d\varphi + kA)^2}$$

$k \to \infty$ Kaluza-Klein compactification ➡ $\mathbf{C}^4/U(1) = r + \mathbf{CP}^3$

$\mathbf{C}^4/U(1)$上のnon-linear (sigma) model (**CP**^{1}とO(3) sigma model の一般化)

$$S = \int d^3x \left|(\partial_\mu - iA_\mu)Z^A\right|^2 \qquad A = 1, \cdots 4$$

$$Z^A = Z_0^A + \hat{Z}^A$$ 古典解とその周りの揺らぎ

➡ 仮定: $|Z_0^A| \gg |\hat{Z}^A|, |\partial_\mu Z_0^A|$ 古典解の変化は小さい

➡ $$S = \int d^3x (\partial_\mu P^I)^2, \quad P^I \equiv \hat{X}^I - \frac{X_0^I X_0^J}{(X_0^K)^2}\hat{X}^J, \quad I = 1, \cdots, 8$$

SO(8)の回復、揺らぎが古典解方向と直交

曲った時空 $AdS_4 \times \mathbf{CP}^3$ 中の probe brane

$$ds^2_{M2} = \frac{r^4}{R^4}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + \frac{R^2}{r^2}(dr^2 + r^2 ds^2_{\mathrm{CP}^3}) + \underline{\frac{R^2}{k^2}(d\varphi + kA)^2}$$

$$R = l_p(2^5\pi^2 kN)^{\frac{1}{6}}$$

compact化方向

$k \to \infty$ 古典解 X_0^I とその周りの揺らぎ P^I (古典解の変化は小さい)

有効作用として以下の形を仮定 (scalar場はproject outされた P^I)

$$S = \int dx^3 \sqrt{-\det g}\,\mathrm{tr}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{IJ}[\partial\mu P^I \partial_\nu P^J] + -\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}g_{IK}g_{JL}[P^I, P^J][P^K, P^L]\right]$$

$r \sim \sqrt{(X_0^I)^2}$ r方向は古典解が主要項 $\mathrm{SO}(8)_\mathrm{R}$

flat space-time の場の理論に読み直す

$$S = \int d^3x \, \mathrm{tr} \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu P^I)^2 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{(X_0^I)^2}F^2 + \frac{1}{4}\frac{(X_0^I)^2}{R^2}[P^I, P^J]^2 \right]$$

曲った空間の情報　+　probe brane の位置としての古典解　$X_0^I(x)$

($\mathbf{Z}_k$の特異点は r = o $\rightarrow$ $X_0^I = 0$)

$$\Rightarrow \quad g_{YM}(x) = \frac{(X_0^I(x))^2}{R^2}$$ 時空に依存した coupling

AdS空間の対称性 ⇒ probe brane の結果も時空依存したcoupling

⇒ **時空依存した coupling がM2の示唆する新たな側面**

≠ 単純なD2 (dual geometry ≠ AdS_4)

まとめ

- ABJM 理論から scaling limit によってLorentzian BLGの再現、$SO(8)_R$の回復
- Lorentzian BLGで座標依存したcouplingに拡げることでgeneralized conformal な理論の存在
- 重力側でもgeneralized conformal、 $SO(8)_R$の存在を示唆 dual geometryを考慮するとL-BLG ≠ 単純なD2
- 座標依存した coupling がM2の示唆する新たな側面

Discussion

- $k \to \infty$における重力の有効範囲

$$R_{11} \ll l_p^{(11)} \ll l_p^{(10)} \ll R_{AdS} \ll l_s$$

$$\frac{R_{AdS}}{l_p^{(11)}} \sim N^{\frac{1}{6}} k^{\frac{1}{6}} \to \infty, \quad \frac{R_{AdS}}{l_p^{(10)}} \sim N^{\frac{3}{8}} k^{\frac{1}{8}} \to \infty, \quad \frac{R_{AdS}}{l_s} \sim N^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \to 0$$

AdSの半径と比べ、有効なのは11次元重力と10次元重力のみで、超弦理論の摂動展開は良くない。
stringでのprobeはよくないが、D-particle, braneは有効。

- ABJM SU(N)×SU(N)のscaling limitのみを考えたが、U(N)×U(N)が本来の理論であるので、U(1)部分の取り扱いに注意しなければいけない。

Lorentzian BLG

B場を積分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathrm{tr}\Big[&-\frac{1}{2}(\hat{D}_\mu P^I)^2 + \frac{1}{4}X_0^2[P^I, P^J]^2 \\
&+ \frac{1}{2(X_0^I)^2}\Big(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\hat{F}_{\nu\lambda} + i\bar{\Psi}_0\Gamma^\mu\hat{\Psi} - 2P_I\partial^\mu X_0^I\Big)^2 \\
&+ \frac{i}{2}\bar{\hat{\Psi}}\Gamma^\mu\hat{D}_\mu\hat{\Psi} + \frac{1}{2}\bar{\hat{\Psi}}[P^I, (X_0^J\Gamma_J)\Gamma_I\hat{\Psi}] - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_0\Gamma_{IJ}\hat{\Psi}[P^I, P^J] \\
&+ \frac{1}{X_0^2}\left(-\bar{\Psi}_0\Gamma_I(X_0^J\Gamma_J)[P^I, \hat{\Psi}] - i\bar{\Psi}_0\Gamma_\mu\hat{D}_\mu\hat{\Psi}\right)(X_0^K\hat{X}^K)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
P^I = \left(\delta^{IJ} - \frac{X_0^I X_0^J}{(X_0^K)^2}\right)X_J
$$

: scalar場は結合 $X_0^I(x)$ の方向と直交

拘束条件

$$
\partial^2 X_0^I = 0, \qquad \Gamma^\mu\partial_\mu\psi_0 = 0
$$

M2 と D2

$$ds^2_{\mathrm{M2}} = H(r)^{-\frac{2}{3}}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + H(r)^{\frac{1}{3}}\left(\eta_{IJ}dx^I dx^J\right)$$

$$H(r) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{R^6}{(r^2 + (x_{11} + 2\pi R_{11})^2)^3}$$

x_{11} をcompact 化、H(r) をPoisson resummation

$$ds^2_{\mathrm{D2}} = H^{-\frac{1}{2}}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + H^{\frac{1}{2}}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_6^2\right)$$

$$e^\phi = H^{\frac{1}{4}}$$

$$H(r) = \frac{6\pi^2 g_s N l_s^5}{r^5}$$

non-conformal
non-constant dilaton