基研研究会「量子場理論と弦理論の発展」2008年8月29日

On Diagonal Multi-Matrix Correlators

***Yusuke Kimura** (Queen Mary)*

0709.2158, 0802.3662, 0807.3696
Works with S. Ramgoolam

N=4 SYM におけるゲージ不変演算子の完全直交系

$$(D_\mu, \psi, \Phi_a)$$

⇕

弦理論の対応する状態

U(N)群に双対な群や代数（対称群、ブラウア代数）による演算子の分類

ゲージ理論

U(N) ゲージ群

弦理論

対称群S_n（の拡張）

U(N)群の言葉を対称群に翻訳する原理

話すこと

- U(N)を対称群（やその拡張）に翻訳する数学。

- SO(6)スカラーの完全直交系（フリーレベル）は理解されている。

- 完全直交系をどのように特徴づけるか。
- 1/2 BPS の場合は対称群の表現（ヤング図）が演算子を決める。

- U(N)群のカシミア演算子を導入して、その固有状態として演算子を特徴付ける。

1/2 BPS 演算子：ヤング図による分類

シューア多項式(Schur Polynomial)

$$X = \Phi_5 + i\Phi_6$$

$$O_R(X) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)tr_n\left(\sigma X^{\otimes n}\right)$$

$$= \frac{1}{d_R}tr_n\left(p_R X^{\otimes n}\right)$$

$$\sigma X^{\otimes n} = X_{j_1}^{i_{\sigma(1)}}\cdots X_{j_n}^{i_{\sigma(n)}}$$

Rは対称群の規約表現（ヤング図で決まる）

任意のマルチトレイス演算子は $tr_n\left(\sigma X^{\otimes n}\right)$ で表せる。

対称群がマルチトレイスを分類

Corley-Jevicki-Ramgoolam (01)

対角的な２点関数

$$\left\langle O_R\left(X\right)O_S\left(X^*\right)\right\rangle = \delta_{RS}\,\frac{n_R\,!}{d_R}DimR$$

ヤング図が giant graviton を分類。(sphere giants, ads giants…)

３点関数の式：物理が群論に翻訳される。

$$\langle O_R(X)O_S(X)O_T(X^*)\rangle = g(R,S;T)\frac{n_T}{d_T}DimT$$

$g\left(R,S;T\right)$ は Littlewood-Richardson 係数。

コメント

場の数がNに比べて十分小さい場合はこのようなことは気にしなくていい。
場の数が大きい場合に問題（giant graviton）やもしくは有限N。

ここでは背後にある数学的原理を理解したいので、Nは有限だと思って
完全直行系を構成する。

基礎となる数学（Schur-Weyl 相互律）

SU(N)のN個の箱を持つヤング図に対応する表現をS_nの表現論に翻訳する方法

$V^{\otimes n}$ に対してSU(N)と対称群の作用は互いに交換するため、あるヤング図を指定することはこれらの表現を同時に決める。

この意味で対称群はSU(N)に双対であると言う。

$SU(N)$の規約表現の次元、カシミヤなどは対称群を用いて表せる。

２次元YMのラージN展開(Gross-Taylor 93)で重要な役割。

あるベクトル空間 Wがある代数（群） Aの作用を許す時、以下が成り立つ。

$$W = \bigoplus_{\Lambda} \left(V_{\Lambda}^{A} \otimes V_{\Lambda}^{Com(A)} \right)$$

V_{Λ}^{A} はA の規約表現 Λ の空間

$Com(A)$は Wに対して Aと交換する代数

U(N)もしくはGL(N)群に双対なものはブラウア代数(Brauer algebra)である。

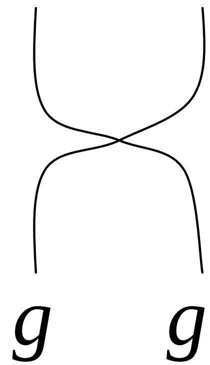
$$\mathrm{X} \otimes \mathrm{X} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}$$

$$X = \Phi_5 + i\Phi_6$$

V を基本表現の空間とすると、この演算子は $V^{\otimes n}$ に作用する線形写像。

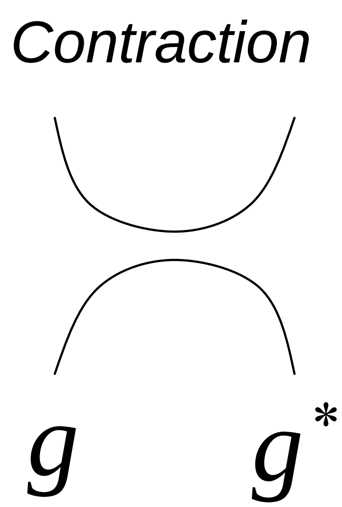
$$g\mathrm{X} \otimes g\mathrm{X} \otimes \cdots \otimes g\mathrm{X}$$

$$\sigma\left(\mathrm{X} \otimes \mathrm{X} \otimes \cdots \otimes \mathrm{X}\right)$$



$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{R \mapsto n} \left(V_R^{SU(N)} \otimes V_R^{S_n} \right)$$

$$\mathrm{X}\otimes\cdots\otimes\mathrm{X}\otimes\mathrm{X}^*\otimes\cdots\otimes\mathrm{X}^*$$



$$V^{\otimes m}\otimes V^{*\otimes n}=\bigoplus_{\gamma}\left(V_{\gamma}^{U(N)}\otimes V_{\gamma}^{B(m,n)}\right)$$

$$V^{\otimes m}\otimes V^{*\otimes n}=\bigoplus_{A}\left(V_{A}^{U(N)\times U(N)}\otimes V_{A}^{S_m\times S_n}\right)$$

$$\mathrm{X}\otimes\cdots\otimes\mathrm{X}\otimes\mathrm{X}^\dagger\otimes\cdots\otimes\mathrm{X}^\dagger$$

$$V^{\otimes m}\otimes V^{\otimes n}=\bigoplus_{R}\left(V_{R}^{U(N)}\otimes V_{R}^{S_{m+n}}\right)$$

U(N)群の表現論 ⟺ 対称群、ブラウア代数の表現論

Y.Kimura-Ramgoolam (07)

$X, X^\dagger$ から作られるゲージ不変演算子の完全直交系（フリーレベル）

> 任意のマルチトレイス演算子は $tr_{m+n}\left(b\left(X^{\otimes m}\otimes X^{*\otimes n}\right)\right)$ で表せる。

$$O^{\gamma}{}_{A,ij}\left(X, X^{*}\right) = tr_{m+n}\left(\underline{Q^{\gamma}{}_{A,ij}}\left(X^{\otimes m}\otimes X^{*\otimes n}\right)\right)$$

$$Q^{\gamma}{}_{A,ij} = \left(Dim\gamma\right)\sum_{b}\chi^{\gamma}{}_{A,ij}\left(b^{*}\right)b$$

m=1, n=1

$$tr\left(\mathrm{X}\right)tr\left(\mathrm{X}^{\dagger}\right) - \frac{1}{N}tr\left(\mathrm{XX}^{\dagger}\right)$$

$$\frac{1}{N}tr\left(\mathrm{XX}^{\dagger}\right)$$

$$\left\langle O^{\gamma}{}_{A,ij}\left(X, X^*\right)\left(O^{\gamma'}{}_{A',i'j'}\left(X, X^*\right)\right)^{\dagger}\right\rangle$$

$$= m!n!\delta_{(\gamma,A,ij),(\gamma',A',i'j')}d_A Dim\gamma$$

$$B(m,n) \supset \mathbb{C}(S_m \times S_n)$$

γ はブラウア代数 $B(m,n)$ の規約表現

A は対称群 $S_m \times S_n$ の群多元環の規約表現

i, j は γ に含まれる A の多重度

$$hQ^{\gamma}{}_{A,ij}h^{-1} = Q^{\gamma}{}_{A,ij} \qquad h \in S_m \times S_n$$

$$Q^{\gamma}{}_{A,ij}Q^{\gamma}{}_{B,kl} = \delta_{AB}\delta_{jk}Q^{\gamma}{}_{A,il}$$

完全系のラベルの意味を考える。

1/2 BPS
$$\left[D_0, O_R(X)\right] = nO_R(X)$$

$$X = \Phi_5 + i\Phi_6$$

D_0 は古典的ディラテイション演算子

この式を満たす R（ヤング図）は n の分割の数だけある。

$$G : X \to gX$$

この変換は対称群にdual。

$$\left[G^i_j, X^p_q\right] = \left[-i\int d^3x \left(X\Pi_X\right)^i_j, X^p_q\right] = \delta^p_j X^i_q$$

$$\widehat{C_2} = tr\left(GG\right) \qquad [D_0, G] = 0 \quad [D_0, \widehat{C_2}] = 0$$

Schur-Weyl duality もしくは直接的な計算により以下が分かる。

$$\hat{C}_2 O_R(X) = C_2(R) O_R(X)$$

$C_2(R)$ は規約表現 R に対応する $U(N)$ の2次のカシミヤ

$$\begin{aligned} C_2(R) &= Nn + 2\frac{\chi_R(T_2)}{d_R} \\ &= Nn + \sum_i r_i (r_i - 2i + 1) \end{aligned}$$

1/2 BPS のシューア多項式は $\hat{C}_2$ を対角化する基底になっている。

$X, X^\dagger$ を含む完全直交系のラベルは？

$$G_1 : X^\dagger \to g_1 X^\dagger$$

$$G_2 : X \to g_2 X$$

$$G_3 : X^\dagger \to X^\dagger g_3^\dagger$$

$$G_4 : X \to X g_4^\dagger$$

$$[D_0, G_a] = 0 \left(a=1,2,3,4\right)$$

$$[G_a, G_b] = 0 (a \neq b)$$

$$\left[tr\left(\lambda\left(G_1 + G_2 + G_3 + G_4\right)\right), O\left(X, X^\dagger\right)\right] = 0$$

これらのU（N）変換の不変量（カシミア）の固有状態として
ゲージ不変演算子の完全直交系を分類できる。

$$O^{\gamma}{}_{A,ij} = t_{\gamma} \sum_{b} \chi^{\gamma}{}_{A,ij}\left(b^{*}\right) tr_{m+n}\left(b\left(X^{\otimes m} \otimes X^{*\otimes n}\right)\right)$$

固有値 $m+n$ を持つディラテイションの固有状態

$$G_{B} = G_{2} + G_{3} : X \to gX\ ,\ X^{*} \to g^{*} X^{*}$$

これは $B(m,n)$ に双対（Schur-Weyl duality）。

$U(N)$ と $B_{N}(m,n)$ の規約表現は同じヤング図で指定される。

$$\left[\left(G_{B}\right)^{a}_{b}, \left[\left(G_{B}\right)^{b}_{a}, O^{\gamma}{}_{(\alpha\beta),ij}\right]\right] = C_{2}(\gamma) O^{\gamma}{}_{(\alpha\beta),ij}$$

$$\left[\left(G_{3}\right)^{a}_{b}, \left[\left(G_{3}\right)^{b}_{a}, O^{\gamma}{}_{(\alpha\beta),ij}\right]\right] = C_{2}(\beta) O^{\gamma}{}_{(\alpha\beta),ij}$$

γ に現れる $(\alpha\beta)$ の多重度に関係したラベル $B(m,n) \supset \mathbb{C}(S_m \times S_n)$

$$\left[\left(G_2\right)_b^a, \left[\left(G_2\right)_c^b, \left[\left(G_3\right)_a^c, O^{\gamma}{}_{(\alpha\beta),ij} \right]\right]\right] = C^{\gamma}{}_{(\alpha\beta)}\left(i\right) O^{\gamma}{}_{(\alpha\beta),ij}$$

$C^{\gamma}{}_{(\alpha\beta)}(i)$ は $\gamma \to (\alpha\beta)$ に関係したmultiplicity に依る量。

この完全直交系はこれらのU(N)のカシミアの空間を対角化するような基底になっている。

X, X^* から作られる演算子の完全系

$$O^{\gamma}_{\alpha\beta,ij}\left(X, X^*\right) \qquad tr_{m,n}\left(b\left(X^{\otimes m} \otimes X^{*\otimes n}\right)\right)$$

$$V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes n} = \bigoplus_{\gamma}\left(V_{\gamma}^{U(N)} \otimes V_{\gamma}^{B(m,n)}\right)$$

$$O^{R}_{R_1R_2,ij}\left(X, X^\dagger\right) \qquad tr_{m+n}\left(\sigma\left(X^{\otimes m} \otimes X^{\dagger\otimes n}\right)\right)$$

$$V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} = \bigoplus_{R}\left(V_{R}^{U(N)} \otimes V_{R}^{S_{m+n}}\right)$$

Bhattacharyya-Collins-Koch (07)

$$G_B = G_2 + G_3 : X \to gX , X^* \to g^* X^*$$

$$G_S = G_2 + G_1 : X \to gX , X^\dagger \to gX^\dagger$$

$$\left[\hat{C}_2 \left(G_B \right), \hat{C}_2 \left(G_S \right) \right] \neq 0$$

どの空間を対角化するかによっていくつかの基底がある。

フリーではいろんな対角化の方法がある。

$$X_{ij} = X_I$$

と思うとフリー作用は $U\left(N^2\right)$ の対称性を持っていると思える。

この変換は先ほどの右側と左側から別々に行う $U(N)\times U(N)$ の変換を含んでいる。

まとめ

シューアワイル相互律 (Schur-Weyl duality) を用いてU(N)の表現論を
対称群やブラウア代数のものに翻訳。

ディラテイションン演算子と交換する様々なU(N)変換を導入し、その
カシミアが弦理論の状態（完全直交系）を分類する。

ここではスカラーのみのセクターを議論。フルセクターについても同様
なことが言える。ただしもう少し複雑だろうが。。

量子論における対称群（とその拡張）の有用性？

ここでの議論の拡張？

２次元ヤンミルズのラージN展開

分配関数は規約表現の次元で与えられ、カイラルな部分の1/N展開は対称群の言葉で表せる。

$$Z^{+}{}_{A=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{R \mapsto n} \left(DimR \right)^{2-2G}$$

$$\boxed{DimR = \frac{N^{n}}{n!} \chi_{R}(\Omega_{n})}$$

$$\Omega_{n} = \sum_{\sigma \in S_{n}} \left(\frac{1}{N} \right)^{n-C_{\sigma}} \sigma$$

ノンカイラル展開はブラウア代数が有用で表せる。
[0802.3662, Y.Kimura-Ramgoolam]

$$tr(\mathrm{X})\,tr\left(\mathrm{X}^{\dagger}\right)-\frac{1}{N}tr\left(\mathrm{XX}^{\dagger}\right)$$

$$\frac{1}{N}tr\left(\mathrm{XX}^{\dagger}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(tr(\mathrm{X})\,tr\left(\mathrm{X}^{\dagger}\right)+tr\left(\mathrm{XX}^{\dagger}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(tr(\mathrm{X})\,tr\left(\mathrm{X}^{\dagger}\right)-tr\left(\mathrm{XX}^{\dagger}\right)\right)$$

$$\left\langle X_{ij}^{\dagger} X_{kl} \right\rangle = \delta_{jk}\delta_{il}$$