2009/7/7 基研研究会「場の理論と弦理論」

Spontaneous supersymmetry breaking in matrix models

黒木経秀 (立教大)

杉野文彦氏 (岡山光量子研) との共同研究

1　動機

◇ **弦理論の非摂動的定式化** $\Longleftarrow$ large-N **ゲージ理論、**matrix model

SUSY **が本質的な役割** $\Longrightarrow$ SSB of SUSY

しかしこのような matrix model **は(全く)知られていない**

c.f. T.K.-Sugino, Nucl. Phys. B796 :471-499, 2008. arXiv:0710.3971 [hep-th]

純粋に matrix model **の枠内で"自発的に"** SUSY **が破れる新しい機構を提案**

2　SUSY quantum mechanics

Euclidean SUSY QM:

$$S=\int_0^\beta dt\left[\frac{1}{2}B^2+iB\left(\dot\phi+W'(\phi)\right)+\bar\psi\left(\dot\psi+W''(\phi)\psi\right)\right],\quad W(\phi):\text{superpotential}$$

<u>SUSY</u>: $\quad Q\phi=\psi,\ Q\psi=0,$

$$Q\bar\psi=-iB,\ QB=0,\qquad Q^2=0$$

<u>$\bar Q$</u>: $\quad \bar Q\phi=-\bar\psi,\ \bar Q\bar\psi=0,\ \bar Q\psi=-iB+2\dot\phi,\ \bar QB=2i\dot{\bar\psi}$ で $\{Q,\bar Q\}=2\partial_t.$

<u>SUSY inv.</u>

$$S=Q\int dt\bar\psi\left(\frac{i}{2}B-\left(\dot\phi+W'(\phi)\right)\right).$$

◇ 自発的にSUSYが破れる例: (注: 有限系)

Witten

$$W'(\phi) = g(\phi^2 + \mu) \Longrightarrow \text{scalar potential: } \frac{g^2}{2}(\phi^2+\mu)^2$$

- $\mu > 0$: $\phi = 0,\ E_0 = \frac{1}{2}g^2\mu^2 > 0,\ B = -iW'(\phi) = -ig\mu \neq 0$: SSB
- $\mu < 0$: $\phi = \pm\sqrt{-\mu}$, しかし $E_0 \neq 0 \Leftarrow$ instanton effect: SSB

注: Witten index の μ に関する解析性。しかし $\mu < 0$ では $V \to \infty$ で SUSY が回復

行列模型あるいは lattice などへの適用を念頭に置くと、経路積分形式で定式化したい

$\Rightarrow$ order parameter は?

SSB の order parameter: $\langle B \rangle$、より一般に $\langle B^n \rangle$ $(B^n = i\{Q, \bar{\psi}B^{n-1}\})$

しかし $\displaystyle\int_{\rm PBC} \mathcal{D}(\text{fields}) B e^{-S} = 0!$

$\because$ いつものように完全系をはさむと $\displaystyle\int_{\rm PBC} \mathcal{D}(\text{fields}) B e^{-S} = \mathrm{tr}\left((-1)^F B e^{-\beta H}\right)$

自発的対称性の破れ $\to E_0 > 0$ だと各 level について $|f_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_n}} Q\, |b_n\rangle$ が存在

$\to \langle b_n | B | b_n \rangle = \langle f_n | B | f_n \rangle$

同じ議論で $Z = \displaystyle\int_{\rm PBC} \mathcal{D}(\text{fields}) e^{-S} = \mathrm{tr}\left((-1)^F e^{-\beta H}\right) = 0! \Longrightarrow \langle B \rangle = \frac{0}{0}$ の状況!

縮退した真空間でのキャンセレーション $\to$ SSB の場合は一つ真空を選ぶべき

twisted boundary condition

自発的対称性の破れ: 無限小の外場の影響を見る $\rightarrow$ SUSY **の場合、** twisted b.c.

$\phi(t+\beta)=\phi(t), \quad \psi(t+\beta)=e^{i\alpha}\psi(t), \quad B(t+\beta)=B(t)$

このとき $(-1)^F \rightarrow (-e^{-i\alpha})^F$ **が簡単に分かるので**

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha &= \int_{\mathrm{TBC}} \mathcal{D}(\text{fields}) e^{-S} = \mathrm{tr}\left((-e^{-i\alpha})^F e^{-\beta H}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\langle b_n|b_n\rangle - e^{-i\alpha}\langle f_n|f_n\rangle\right) e^{-\beta E_n} = (1-e^{-i\alpha}) \sum_{n=0}^{\infty} \langle b_n|b_n\rangle e^{-\beta E_n} \neq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle B\rangle_\alpha &\equiv \frac{1}{Z_\alpha}\int_{\mathrm{TBC}} \mathcal{D}(\text{fields}) B e^{-S} = \frac{\mathrm{tr}\left((-e^{-i\alpha})^F B e^{-\beta H}\right)}{\mathrm{tr}\left((-e^{-i\alpha})^F e^{-\beta H}\right)} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\langle b_n| B |b_n\rangle - e^{-i\alpha}\langle f_n| B |f_n\rangle\right) e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\langle b_n|b_n\rangle - e^{-i\alpha}\langle f_n|f_n\rangle\right) e^{-\beta E_n}} \\
&= \frac{(1-e^{-i\alpha})\sum_{n=0}^{\infty}\langle b_n| B |b_n\rangle e^{-\beta E_n}}{(1-e^{-i\alpha})\sum_{n=0}^{\infty}\langle b_n|b_n\rangle e^{-\beta E_n}} \ : \textbf{有限}
\end{aligned}
$$

α **はキャンセル。** $\alpha \rightarrow 0$ **極限も** well-defined

$\rightarrow$ α **はよい** regularization **になっており、** SUSY SSB **のためのよい外場**

経路積分形式で SUSY **の自発的破れを議論する枠組み**

discretized SUSY quantum mechanics

時間方向を離散化する:

$$
\begin{aligned}
S &= Q\sum_{i=1}^{T}\bar{\psi}(t)\left(\frac{i}{2}B(t)-\Big(\phi(t+1)-\phi(t)+W'(\phi(t))\Big)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{T}\Bigg[\frac{1}{2}B(t)^2+iB(t)\Big(\phi(t+1)-\phi(t)+W'(\phi(t))\Big)\\
&\qquad\qquad +\bar{\psi}(t)\Big(\psi(t+1)-\psi(t)+W''(\phi(t))\psi(t)\Big)\Bigg].
\end{aligned}
$$

以後 $T=1 \Rightarrow$ twisted b.c.: $\phi(2)=\phi(1)$, $\psi(2)=e^{i\alpha}\psi(1)$, $B(2)=B(1)$

$$
\begin{aligned}
S_\alpha &= \frac{1}{2}B^2+iBW'(\phi)+\bar{\psi}\Big(e^{i\alpha}-1+W''(\phi)\Big)\psi,\\
Z_\alpha &= \int d\phi dB d\psi d\bar{\psi}\, e^{-S_\alpha}.
\end{aligned}
$$

知られていること: $W'(\phi)$: odd $\longrightarrow$ SUSY、$W'(\phi)$: even $\longrightarrow$ $\text{SU}\!\!\!/\text{SY}$ 実際、

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha &\propto \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \Big(e^{i\alpha} - 1 + W''(\phi) \Big) e^{-\frac{1}{2}W'(\phi)^2} \\
&= (e^{i\alpha} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, e^{-\frac{1}{2}W'(\phi)^2} + \int dX e^{-\frac{1}{2}X^2} \qquad (X = W'(\phi)) \\
&= \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{for } W'(\phi) : \text{odd} \\ {\color{red}0} & {\color{red}\text{for } W'(\phi) : \text{even}} \end{cases} \text{as } \alpha \longrightarrow \ 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle B \rangle_\alpha &= \frac{1}{Z_\alpha} \int d\phi dB d\psi d\bar{\psi} \\
&= \frac{1}{Z_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi W'(\phi) \Big(e^{i\alpha} - 1 + W''(\phi) \Big) e^{-\frac{1}{2}W'(\phi)^2} \\
&= \frac{1}{Z_\alpha} (e^{i\alpha} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi W'(\phi) e^{-\frac{1}{2}W'(\phi)^2} + \frac{1}{Z_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} e^{-\frac{1}{2}W'(\phi)^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } W'(\phi) : \text{odd} \\ {\color{red}\text{finite}} & {\color{red}\text{for } W'(\phi) : \text{even}} \end{cases} \text{as } \alpha \longrightarrow \ 0
\end{aligned}
$$

3 Gaussian supersymmetric matrix model with twsited boundary condition

supersymmetric matrix QM:

$$S = Q\sum_{i=1}^{T} N\mathrm{tr}\,\bar{\psi(t)}\left(\frac{i}{2}B(t) - \Big(\phi(t+1) - \phi(t) + W'(\phi(t))\Big)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{T} N\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}B(t)^2 + iB(t)\Big(\phi(t+1) - \phi(t) + W'(\phi(t))\Big)\right.$$

$$\left. + \bar{\psi}(t)\Big(\psi(t+1) - \psi(t) + \underbrace{W''(\phi(t))\psi(t)}_{\text{symmetrized}}\Big)\right].$$

$\phi(t)$, $\psi(t)$, $B(t)$: $N \times N$ Hermitian matrices

$T = 1$ として twisted b.c. $\phi(2) = \phi(1)$, $\psi(2) = e^{i\alpha}\psi(1)$, $B(2) = B(1)$

$$\to S_\alpha = N\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}B^2 + iBW'(\phi) + \bar{\psi}\underbrace{\Big(e^{i\alpha} - 1 + W''(\phi)\Big)\psi}_{\text{symmetrized}}\right]$$

Gaussian case: $W'(\phi) = g\phi$

$$S_\alpha = N\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}B^2 + igB\phi + \bar{\psi}\Big(e^{i\alpha} - 1 + g\Big)\psi\right]$$

$^\forall\alpha$, $^\forall N$ に対し、$\left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}B^n \right\rangle = 0$ 　 とくに $\alpha \to 0$, $N \to \infty$ の順番によらず SUSY field dependent boundary condition

$$\phi(2)=\phi(1),\quad \psi(2)=e^{\frac{\alpha}{N}\mathrm{tr}V(\phi)}\psi(1),\quad B(2)=B(1)$$

主張:

superpot. および twist が $N\to\infty$ とともに $\epsilon\to 0$ となる ϵ を用いて $W(\epsilon\phi)$、$V(\epsilon\phi)$ という形なら、boundary condition の効果で large-N で自発的に SUSY が破れる

例: $W'(\epsilon\phi)=g\epsilon\phi$、$V(\epsilon\phi)=\epsilon^2\phi^2$

$$S_\alpha=N\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}B^2+ig\epsilon B\phi+\bar{\psi}\left(e^{\frac{\alpha}{N}\mathrm{tr}\epsilon^2\phi^2}-1+g\epsilon\right)\psi\right]$$

- $\alpha\to 0$、その後 $N\to\infty$

  $e^{i\alpha}$ のときと同じ。$\left\langle\frac{1}{N}\mathrm{tr}B^n\right\rangle=0$ となって SUSY

- $N\to\infty$、その後 $\alpha\to 0$ (cf. 無限体積極限)　b.c. に比べ $W''(\phi)$ の寄与が落ちる

$$Z_\alpha\propto\int d\phi\left(e^{\frac{\alpha}{N}\mathrm{tr}\epsilon^2\phi^2}-1\right)^{N^2}e^{-N\mathrm{tr}\frac{g^2}{2}\epsilon^2\phi^2}\propto\int d\phi'\left(e^{\frac{\alpha}{N}\mathrm{tr}\phi'^2}-1\right)^{N^2}e^{-N\mathrm{tr}\frac{g^2}{2}\phi'^2}$$

$$\propto\int\mathcal{D}\rho(x)\exp N^2\left(\int dxdy\rho(x)\rho(y)\log|x-y|+\log\left(e^{i\alpha\int dx\rho(x)x^2}-1\right)-\int dx\frac{1}{2}\rho(x)x^2\right)$$

large-N: $\rho(x)$ の鞍点 Brezin-Itzykson-Parisi-Zuber

$$\rho(x)=\frac{g_1^2}{6\pi}\sqrt{\frac{12}{g_1^2}-x^2}:\ \text{semi-cricle} \qquad \left\langle\frac{1}{N}\mathrm{tr}B^2\right\rangle\to -2 \text{ as } \alpha\to 0:\ \text{SU}\cancel{\text{S}}\text{Y}$$

Note

- Gaussian potential でも無限小の boundary の効果で SUSY が破れる。"自発的"
- 変形の際も外場の存在が本質的
- $V(\phi)=\phi$ など Z_2 を破る外場の場合、Z_2 も自発的に破れる (superselection rule がちゃんと働く $\Leftarrow$ large-N 極限)。
  破れた後は one-matrix model $\to$ 2 次元重力、一般には (2,1)-critical point
  しかし $V(\phi)=v+\frac{1}{3}\phi^3$ として v を fine tune すると (2,3)-critical point (multicritical point) $\to$ $V(x)$ も含めて理論の定義と思うべき
- 量子力学の場合は知られている例 ($W'(\phi)$: odd $\to$ SUSY, $W'(\phi)$: even $\to$ SU$\cancel{\text{S}}$Y) を再現
- large-N の二つの役割: 通常の量子力学で $\epsilon\to 0$ を先に取ると $\langle B^n\rangle$ が発散して病的。large-N によってよく定義されている

4 Other superpotential

$W'(\phi) = g(\phi^2 + \mu)$ (もともと有限体積では破れる例)

$$S_\alpha = N\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}B^2 + igB(\phi'^2 + \mu) + \bar{\psi}\left\{\left(e^{\frac{\alpha}{N}\mathrm{tr}\phi'^2} - 1\right)\psi + g\epsilon(\phi'\psi + \psi\phi')\right\}\right]$$

$$Z_\alpha \propto \int d\phi\, e^{-N\mathrm{tr}\frac{1}{2}W'(\phi)^2} \det\left(\left(e^{\frac{\alpha}{N}\mathrm{tr}\phi^2} - 1\right) 1 \otimes 1 + \epsilon g\,(1 \otimes \phi + \phi \otimes 1)\right)$$

- $\alpha \to 0$ の後 $N \to \infty$: $O(-2)$ model に帰着。 SUSY は回復!
- $N \to \infty$ の後 $\alpha \to 0$: $W''(\phi)$ の寄与が落ちる。SUSY は破れる (実はこの場合は $e^{i\alpha}$ でも破れる)

one-matrix model($O(0)$ model) と $O(-2)$ model が一つの model の違った極限として自動的に出る

5 議論

- いろいろな $W'(\phi)$、$V(\phi)$ ($\alpha \to 0$ は技術的に困難?)
- field dependent b.c. の起源 (不要?)。ゲージ場? 実は $W'(\phi) = \phi^3$ では $e^{i\alpha}$ を入れておけば large-N で SU~~S~~Y. $W'(\phi)$: odd(破れない例) で $e^{i\alpha}$ を入れて $N \to 0$, $\alpha \to 0$ を取ると破れているだろう。$W'(\epsilon\phi)$ の方が恐らく本質的。

- **「緩やかポテンシャル極限」** $W'(\epsilon\phi)$ with $\epsilon \to 0$ as $N \to 0$ **の起源、物理的理解。 新しい** double scaling limit?

- Yang-Mills type **への拡張。分配関数** nonzero **のような模型にも有効か**?