

Serre Relation and Higher Grade Generators of the AdS/CFT Yangian Symmetry

松本拓也

名古屋大多元数理科学研究科

2009 July

森山翔文氏 [名大多元数理/YITP] との共同研究
arXiv:0902.3299[hep-th] に基づく。

(I) どんな模型を、(II) いかに関解くか。

$\#(\text{系の自由度}) = \#(\text{系の保存量/対称性}) \longrightarrow \text{可積分系}$

全ての対称性が分かることは、トイ模型であっても重要。

(I) どんな模型を、(II) いかに関解くか。

$\#(\text{系の自由度}) = \#(\text{系の保存量/対称性}) \longrightarrow \text{可積分系}$

全ての対称性が分かることは、トイ模型であっても重要。

ゲージ理論/弦理論対応：**無限自由度**の系の対応関係

$\Rightarrow$ 共通の**無限個**の対称性があることが期待できる。

(I) どんな模型を、(II) いかに関解くか。

$\#(\text{系の自由度}) = \#(\text{系の保存量/対称性}) \rightarrow \text{可積分系}$

全ての対称性が分かることは、トイ模型であっても重要。

ゲージ理論/弦理論対応：無限自由度の系の対応関係

$\Rightarrow$ 共通の無限個の対称性があることが期待できる。

= ヤンギアン対称性

- AdS/CFT 対応の強力な状況証拠。
- ヤンギアン対称性に対する理解 $\Rightarrow$ 全領域での対応関係の理解

AdS/CFT 対応で、「対称性」に注目する利点

AdS/CFT 対応

IIB 型超弦理論

on $AdS_5 \times S^5$



$4\dim \mathcal{N} = 4$

$SU(N)$ 超対称ゲージ理論

対応領域

弦理論

$\lambda \gg 1$



ゲージ理論

$\lambda = g_{\text{YM}}^2 N \ll 1$

AdS/CFT 対応で、「対称性」に注目する利点

AdS/CFT 対応

IIB 型超弦理論

on $AdS_5 \times S^5$

$\longleftrightarrow$

$4\dim \mathcal{N} = 4$

$SU(N)$ 超対称ゲージ理論

対応領域

弦理論

$\lambda \gg 1$

$\longleftrightarrow$

ゲージ理論

$\lambda = g_{\text{YM}}^2 N \ll 1$

系の対称性は、結合定数に依存しない。

可積分性 $\implies$ 結合定数の全領域での対応が構成できる。

グローバル対称性

弦理論

 AdS_5 $\times$ S_5

PSU(2, 2|4)

 $\cup$

SO(2, 4)

 $\times$

SO(6)

ゲージ理論

4次元共形群

R-対称性

グローバル対称性

弦理論

AdS_5

$\times$

S_5

$PSU(2, 2|4)$

$\cup$

$SO(2, 4)$

$\times$

$SO(6)$

ゲージ理論

4次元共形群

R-対称性

[具体的実現] $SU(2|2)$ スピン鎖模型

[’05 Beisert]

SU(2|2) スピン鎖模型は、次の仮定を認めるとヤングian対称性をもつ。

['07 Beisert]

SU(2|2) スピン鎖模型は、次の仮定を認めるとヤンギアン対称性をもつ。

[’07 Beisert]

仮定

代数 SU(2|2) の基本表現 $|\chi\rangle$ は、ヤンギアン代数 $\{J_n\}$ の Evaluation 表現に持ち上がる。

$$J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$$

SU(2|2) スピン鎖模型は、次の仮定を認めるとヤンギアン対称性をもつ。

[’07 Beisert]

仮定

代数 SU(2|2) の基本表現 $|\chi\rangle$ は、ヤンギアン代数 $\{J_n\}$ の Evaluation 表現に持ち上がる。

$$J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$$

~~仮定~~ ならば、AdS/CFT 対応において

無限個の対称性 $\neq$ ヤンギアン対称性 !?

Evaluation 表現 ($J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$) の物理的意味は？

→ 判然としない。

Evaluation 表現 ($J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$) の物理的意味は？

→ 判然としない。

(c.f.) 弦理論側との関連
[カレント代数]

$$J_n = z^n J$$

$\leftrightarrow$

$$J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$$

代数, z : 座標

表現, u : 運動量 (の関数)

[KZ 方程式]

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} \Phi = \sum_{i \neq j} \frac{(J^A)_i \otimes (J_A)_j}{z_i - z_j} \Phi \leftrightarrow \mathcal{R}_{ij} = 1 + \hbar \frac{(J^A)_i \otimes (J_A)_j}{u_i - u_j} + \dots$$

$\hbar = 1/\lambda$, 古典 r 行列

示したこと

Evaluation 表現 $J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$ は、ヤンギアン代数のすべての定義関係式と矛盾しない。

目次

- ① Introduction
 - Introduction
- ② su(2|2) スピン鎖模型とセール関係式 (review)
 - su(2|2) スピン鎖模型
 - セール関係式 (review)
- ③ セール関係式の証明
 - 両立性の証明
- ④ 高次生成子の構成
 - 一般論
 - 例外代数 $d(2, 1 : \varepsilon)$ の場合
 - 余積の構成
- ⑤ まとめと展望

su(2|2) スピン鎖模型 (review)

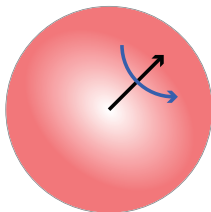
なぜ 'su(2|2)' か？

su(2|2) スピン鎖模型 (review)

なぜ 'su(2|2)' か？

真空 $|0\rangle = \text{Tr}(\mathcal{Z}\mathcal{Z}\cdots\mathcal{Z})$ を固定。

$$\text{psu}(2, 2|4) \xrightarrow{\text{破れる}} [\text{psu}(2|2)]^2 \ltimes \mathbb{R}$$



なぜ‘スピン鎖’か？

なぜ‘スピン鎖’か？

$$\hat{D} \curvearrowright \text{Tr}(\cdots \mathcal{X} \cdots \mathcal{Y} \cdots \mathcal{Z} \cdots) \longleftrightarrow \hat{H} \curvearrowright \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{X} \text{---} \text{---} \text{Y} \text{---} \text{Z} \end{array}$$

スピン上の励起：su(2|2) の基本表現 $2|2$ $|x\rangle$

[模型の特徴]

- 代数の consistency のみから、1 粒子の分散関係が求まる。
- 代数の対称性のみから、2 粒子の散乱行列が求まる。

[模型の特徴]

- 代数の consistency のみから、1 粒子の分散関係が求まる。
- 代数の対称性のみから、2 粒子の散乱行列が求まる。

[うまくいった理由]-" Off-Shell" 形式

$\text{Tr}(\dots \mathcal{X} \dots \mathcal{Y} \dots \mathcal{Z} \dots) \longrightarrow [\dots \mathcal{X} \dots \mathcal{Y} \dots \mathcal{Z} \dots]$ 無限の長さ
 代数の中心拡大: $\text{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{c|c} L^\alpha_\beta & Q^\alpha_b \\ \hline S^a_\beta & R^a_b \end{array} \right) \ltimes C, P, K$$

さらに、散乱行列 (R 行列) は、

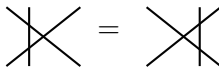
- 1 Yang-Baxter 方程式を満足し、
- 2 (ほとんど確かに) ヤンギアン対称性をもつ。

さらに、散乱行列 (R 行列) は、

- 1 Yang-Baxter 方程式を満足し、
- 2 (ほとんど確かに) ヤンギアン対称性をもつ。

1. Yang-Baxter 方程式

$$\text{YBE} \quad \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}$$



2. ヤンギアン対称性 ($\{J_n\}$:無限次元の代数)

2 体への作用 (余積)

$$\Delta \hat{J}^A = \hat{J}^A \otimes 1 + 1 \otimes \hat{J}^A + \underbrace{\frac{\hbar}{2} J^B \otimes J^C f_{CB}^A}_{\text{非局所的}}$$

$$[\Delta \hat{J}^A, \mathcal{R}_{12}] |\chi_1 \chi_2\rangle = 0 \quad \forall \hat{J}^A \in \mathcal{Y}(\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3)$$

2. ヤンギアン対称性 ($\{J_n\}$:無限次元の代数)

2 体への作用 (余積)

$$\Delta \hat{J}^A = \hat{J}^A \otimes 1 + 1 \otimes \hat{J}^A + \underbrace{\frac{\hbar}{2} J^B \otimes J^C f_{CB}^A}_{\text{非局所的}}$$

$$[\Delta \hat{J}^A, \mathcal{R}_{12}]|\chi_1 \chi_2\rangle = 0 \quad \forall \hat{J}^A \in \mathcal{Y}(\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3)$$

ヤンギアンのある表現 (Evaluation 表現) を仮定する!

$$\hat{J}|\chi\rangle = uJ|\chi\rangle \quad (u : \text{spectral parameter})$$

— やること —

Evaluation 表現 $J_n|\chi\rangle = u^n J|\chi\rangle$ が、ヤンギアン代数のすべての定義関係式と矛盾しないことを示す。

表記

構造定数

$$f_{ABC} \longleftrightarrow \begin{array}{c} A \\ | \\ \text{---} \\ / \quad \backslash \\ B \quad C \end{array}$$

表記

構造定数

$$f_{ABC} \longleftrightarrow \begin{array}{c} A \\ | \\ \text{---} \\ / \quad \backslash \\ B \quad C \end{array}$$

(例) Jacobi id.

$$f^{(AB|D} f_D^{C)E} = 0 \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ / \quad \backslash \\ | \quad | \\ \backslash \quad / \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \backslash \quad / \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ / \quad \backslash \\ \text{---} \end{array} = 0$$

ヤングアン代数

生成子

Grade-0 J ($\leftarrow$ リー代数)

Grade-1 $\hat{J}$

ヤンギアン代数

生成子

Grade-0 J ($\leftarrow$ リー代数)

Grade-1 $\hat{J}$

交換関係

$$[J^A, J^B] = J^C f_C^{AB}, \quad [J^A, \hat{J}^B] = \hat{J}^C f_C^{AB}$$

ヤコビ恒等式

$$[J^A, [J^B, J^C]] + \text{cyclic} = 0$$

ヤンギアン代数

生成子

Grade-0 J ($\leftarrow$ リー代数)

Grade-1 $\hat{J}$

交換関係

$$[J^A, J^B] = J^C f_C^{AB}, \quad [J^A, \hat{J}^B] = \hat{J}^C f_C^{AB}$$

ヤコビ恒等式

$$[J^A, [J^B, J^C]] + \text{cyclic} = 0$$

セール関係式

$$[\hat{J}^A, [\hat{J}^B, J^C]] + \text{cyclic} = -\frac{\hbar^2}{24} f_L^{A I} f_M^{B J} f_N^{C K} f_{IJK} \{J^L, J^M, J^N\}$$

ヤンギアン代数

生成子

Grade-0 J ($\leftarrow$ リー代数)

Grade-1 $\hat{J}$

交換関係

$$[J^A, J^B] = J^C f_C^{AB}, \quad [J^A, \hat{J}^B] = \hat{J}^C f_C^{AB}$$

ヤコビ恒等式

$$[J^A, [J^B, J^C]] + \text{cyclic} = 0$$

セール関係式

$$[\hat{J}^A, [\hat{J}^B, J^C]] + \text{cyclic} = -\frac{\hbar^2}{24} \begin{array}{c} \text{A} \text{---} \text{L} \\ \text{B} \text{---} \text{M} \\ \text{C} \text{---} \text{N} \end{array} \{J^L, J^M, J^N\}$$


セール関係式の役割

セール関係式 $[[J, \hat{J}], \hat{J}] + \dots =$  J^3 は、

セール関係式の役割

セール関係式 $[[J, \hat{J}], \hat{J}] + \dots =$  J^3 は、
(1) 余積

$$\Delta \hat{J}^A = \hat{J}^A \otimes 1 + 1 \otimes \hat{J}^A + \frac{\hbar}{2} J^B \otimes J^C f_{CB}^A$$

が準同型であることを保証

$$[[\Delta J^A, \Delta \hat{J}^B], \Delta \hat{J}^C] + \text{cyclic} = \Delta ([J^A, \hat{J}^B], \hat{J}^C] + \text{cyclic})$$

セール関係式の役割

セール関係式 $[[J, \hat{J}], \hat{J}] + \dots =$  J^3 は、

(1) 余積

$$\Delta \hat{J}^A = \hat{J}^A \otimes 1 + 1 \otimes \hat{J}^A + \frac{\hbar}{2} J^B \otimes J^C f_{CB}^A$$

が準同型であることを保証

$$[[\Delta J^A, \Delta \hat{J}^B], \Delta \hat{J}^C] + \text{cyclic} = \Delta ([J^A, \hat{J}^B], \hat{J}^C] + \text{cyclic})$$

(2) 高次生成子に対する制限

$$(\text{LHS}) = \text{Grade-2}$$

$$(\text{RHS}) = \text{Grade-0}$$

セール関係式の証明

— やること —

Evaluation 表現 $\hat{J}|\chi\rangle = uJ|\chi\rangle$ とヤングアンのすべての定義方程式が矛盾しないこと。特に、セール関係式と両立しているか。

$$([\hat{J}^A, [\hat{J}^B, J^C]] + \text{cyclic})|\chi\rangle = \begin{array}{c} \text{A} \text{---} \text{L} \\ \text{B} \text{---} \text{M} \\ \text{C} \text{---} \text{N} \end{array} \{J^L, J^M, J^N\}|\chi\rangle$$

セール関係式の証明

— やること —

Evaluation 表現 $\hat{J}|\chi\rangle = uJ|\chi\rangle$ とヤングアンのすべての定義方程式が矛盾しないこと。特に、セール関係式と両立しているか。

$$([\hat{J}^A, [\hat{J}^B, J^C]] + \text{cyclic})|\chi\rangle = \begin{array}{c} \text{A} \text{---} \text{L} \\ \text{B} \text{---} \text{M} \\ \text{C} \text{---} \text{N} \end{array} \{J^L, J^M, J^N\}|\chi\rangle$$

(左辺) = $u^2 \times (\text{Jacobi id})|\chi\rangle = 0$ なので、

(右辺) = $\begin{array}{c} \text{A} \text{---} \text{L} \\ \text{B} \text{---} \text{M} \\ \text{C} \text{---} \text{N} \end{array} \{J^L, J^M, J^N\}|\chi\rangle = 0$ を示す。

困難 (1)

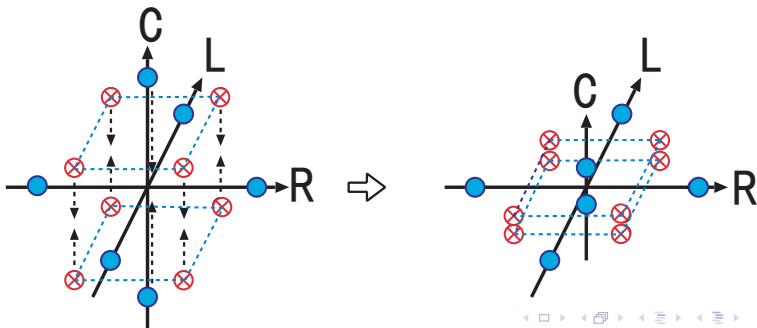
$\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ はキリング形式 g_{AB} が縮退している。
→ 添え字の上げ下げができない。

困難 (1)

$\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ はキリング形式 g_{AB} が縮退している。
 → 添え字の上げ下げができない。

[解決策] 例外代数 $d(2, 1; \varepsilon)$ を使う。

- 縮退のないキリング形式をもち、
- $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限で $\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ に帰着する。



困難 (2)

計算が煩雑。(例) $f_{\textcolor{blue}{R}}^{\textcolor{red}{R}\textcolor{red}{R}} f_{\textcolor{blue}{R}}^{\textcolor{red}{R}\textcolor{red}{R}} f_{\textcolor{blue}{R}}^{\textcolor{red}{R}\textcolor{red}{R}} f_{\textcolor{red}{R}\textcolor{red}{R}\textcolor{red}{R}} \times \{\textcolor{blue}{R}, \textcolor{blue}{R}, \textcolor{blue}{R}\}|\chi\rangle = (128 \text{ 項})$

困難 (2)

計算が煩雑。(例) $f_R^{RR} f_R^{RR} f_R^{RR} f_{RRR} \times \{R, R, R\}|\chi\rangle = (128 \text{ 項})$

[解決策] 3 次元 γ -行列形式

$$d(2, 1; \varepsilon) \subset \mathrm{su}(2)_R \times \mathrm{su}(2)_L \times \mathrm{su}(2)_C, \quad \mathrm{su}(2) = \mathrm{so}(3)$$

$$(\gamma^A)^K{}_L = (\gamma^{A'})^K{}_L = -\sqrt{2} \left(\delta_{A'}^K \delta_L^A - \frac{1}{2} \delta_L^K \delta_{A'}^A \right)$$

Clifford 代数

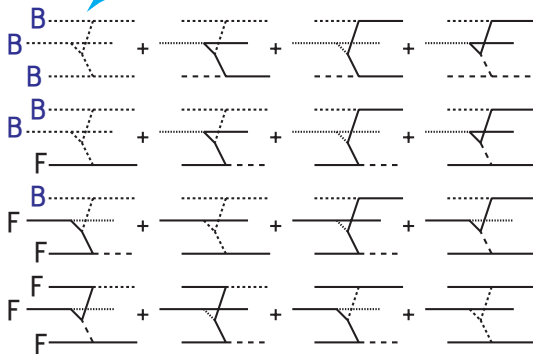
$$(\gamma^A)^K{}_L (\gamma^B)^L{}_M + (\gamma^B)^K{}_L (\gamma^A)^L{}_M = 2\delta_M^K g^{AB}$$

$$\text{with } g^{AB} = \delta_{A'}^B \delta_{B'}^A - \frac{1}{2} \delta_{A'}^A \delta_{B'}^B$$

c.f. $\delta_A^A = 3$

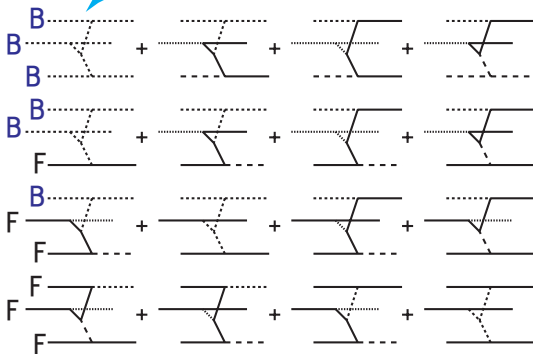
全ての組み合わせを計算。

(先ほどの例)



全ての組み合わせを計算。

(先ほどの例)



結果

$$([\hat{J}^A, [\hat{J}^B, J^C]] + \text{cyclic})|\chi\rangle = -\frac{\hbar^2}{24} \begin{array}{c} \text{A} \text{---} \text{---} \text{L} \\ \text{B} \text{---} \text{---} \text{M} \\ \text{C} \text{---} \text{---} \text{N} \end{array} \{J^L, J^M, J^N\}|\chi\rangle = 0.$$

これまでのまとめ

$\text{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ の基本表現 $|\chi\rangle$ (スピン鎖の 1-マグノン状態) は **ヤング** の **Evaluation 表現** に持ち上がる。

例外代数 $d(2, 1; \varepsilon)$ の ∞ 次元表現 $|\chi_n\rangle$ も持ち上がる。

これまでのまとめ

$\text{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ の基本表現 $|\chi\rangle$ (スピン鎖の 1-マグノン状態) は **ヤング** の **Evaluation 表現** に持ち上がる。

例外代数 $d(2, 1; \varepsilon)$ の ∞ 次元表現 $|\chi_n\rangle$ も持ち上がる。

[Recall] セール関係式の意味

(1) 余積 Δ の準同型を保証

$$[[\Delta J^A, \Delta \hat{J}^B], \Delta \hat{J}^C] + \text{cyclic} = \Delta([J^A, \hat{J}^B], \hat{J}^C] + \text{cyclic})$$

(2) 高次生成子に対する制限 (Grade-2) ~ (Grade-0)

これまでのまとめ

$\text{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ の基本表現 $|\chi\rangle$ (スピン鎖の 1-マグノン状態) は **ヤング** の **Evaluation 表現** に持ち上がる。

例外代数 $d(2, 1; \varepsilon)$ の ∞ 次元表現 $|\chi_n\rangle$ も持ち上がる。

[Recall] セール関係式の意味

(1) 余積 Δ の準同型を保証

$$[[\Delta J^A, \Delta \hat{J}^B], \Delta \hat{J}^C] + \text{cyclic} = \Delta([J^A, \hat{J}^B], \hat{J}^C] + \text{cyclic})$$

(2) 高次生成子に対する制限 (Grade-2) ~ (Grade-0)

→ **Grade-2 生成子の構成**

Grade-2 生成子

$$[\hat{J}^B, \hat{J}^C] = \hat{J}^A f_A^{BC} + X^{BC} \quad \text{with} \quad X^{(A|D} f_D^{BC)} = \overline{\overline{\overline{Y}}} J^3$$

Grade-2 生成子

$$[\hat{J}^B, \hat{J}^C] = \hat{J}^A f_A^{BC} + X^{BC} \quad \text{with } X^{(A|D} f_D^{BC)} = \text{Feynman diagram} J^3$$

素朴なゲージ

$$X^{BC} f_{CBD} = 0$$

標準的な Grade 2 生成子の定義に帰着

$$\hat{J}^A = \frac{1}{c_2} [\hat{J}^B, \hat{J}^C] f_{CB}^A, \quad (c_2 \text{ は、} f_A^{BC} f_{CBD} = c_2 g_{AD})$$

Grade-2 生成子

$$[\hat{J}^B, \hat{J}^C] = \hat{J}^A f_A^{BC} + X^{BC} \quad \text{with } X^{(A|D} f_D^{BC)} = \underbrace{\quad}_{\text{Y}} J^3$$

素朴なゲージ

$$X^{BC} f_{CBD} = 0$$

標準的な Grade 2 生成子の定義に帰着

$$\hat{J}^A = \frac{1}{c_2} [\hat{J}^B, \hat{J}^C] f_{CB}^A, \quad (c_2 \text{ は、} f_A^{BC} f_{CBD} = c_2 g_{AD})$$

例外代数 $d(2, 1; \epsilon)$ ($\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$) の場合; $c_2 = 0$
 → 一般論が使えない。

'良い' ゲージ

$$\chi^{BC}|\chi\rangle = 0$$

'良い' ゲージ

$$X^{BC}|\chi\rangle = 0$$

[理由] Evaluation 表現と矛盾しない。

$$\text{c.f. } [\hat{J}^B, \hat{J}^C]|\chi\rangle = \hat{J}^A f_A^{BC}|\chi\rangle + X^{BC}|\chi\rangle$$

Grade-2 生成子

$$[\hat{J}^B, \hat{J}^C] = \hat{J}^A f_A^{BC} + X^{BC}$$

問題

次の 2 条件を同時に満たす X^{BC} は何か？

- ① セール関係式 $X^{(A|D} f_D^{BC)} = \overline{\overline{Y}} J^3$ かつ
- ② ゲージ条件 $X^{BC} |\chi\rangle = 0$

例外代数 $d(2, 1 : \varepsilon)$ の場合

Grade-2 生成子

$$[\hat{J}^B, \hat{J}^C] = \hat{J}^A f_A^{BC} + X^{BC}$$

問題

次の 2 条件を同時に満たす X^{BC} は何か？

- ① セール関係式 $X^{(A|D} f_D^{BC)} = \overline{\overline{\overline{Y}}} J^3$ かつ
- ② ゲージ条件 $X^{BC}|\chi\rangle = 0$

答え

$$X^{BC} = \begin{array}{c} \text{C} \\ \diagup \quad \diagdown \\ B \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} J^3 - 6[J^B, J^C]$$

Grade-2 生成子

$$[\hat{J}^B, \hat{J}^C] = \hat{J}^A f_A^{BC} + \chi^{BC}$$

Grade-2 生成子の 2 体への作用 (余積)

$$\begin{aligned} \Delta \hat{J}^A &= \hat{J}^A \otimes 1 + 1 \otimes \hat{J}^A + \frac{\hbar}{2} \begin{array}{c} \text{A} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} (\hat{J} \otimes J + J \otimes \hat{J}) \\ &+ \frac{\hbar^2}{24} \begin{array}{c} \text{A} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} (J^2 \otimes J + J \otimes J^2) \end{aligned}$$

R 行列の対称性

$$[\Delta \hat{J}, R_{12}] |\chi_1 \chi_2\rangle = 0$$

$c_2 = 0$ でも成立。

まとめ

- $\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ の基本表現 (および $d(2, 1; \varepsilon)$ の ∞ 表現) は ヤンギアンの Evaluation 表現に持ち上がる。確かに **ヤンギアン対称性** をもっていた。
- $c_2 = 0$ の場合に Grade-2 生成子とその余積を構成した。

展望

- 代数構造全体の理解。c.f. $\Delta T(u) = T(u) \otimes T(u)$
- $d(2, 1; \varepsilon)$ の物理的意味。
- 弦理論側での解釈。c.f. Affine Lie algebra
- ...