holographic superconductor の超流動特性

岡村 隆

関西学院大学

基研研究会「場の理論と超弦理論」
2009 年 7 月 9 日

夏梅 誠 氏（KEK）, 前田 健吾 氏（芝浦工大）との共同研究

- *Characteristic length of an AdS/CFT superconductor.*
  Phys. Rev. D **78** (2008) 106006 [arXiv:0809.3079 [hep-th]]
- *Dynamic critical phenomena in the AdS/CFT duality.*
  Phys. Rev. D **78** (2008) 106007 [arXiv:0809.4074 [hep-th]].
- *Universality class of holographic superconductors.*
  Phys. Rev. D **79** (2009) 126004 [arXiv:0904.1914 [hep-th]].

目次

holographic superconductor

holographic 超流動／超伝導の要素

超流動／超伝導に必要な要素

Noether current	J_μ	$\leftarrow$	$U(1)$ 対称性
scalar operator	$\mathcal{O}$	$\leftarrow$	order para. $\langle\, \mathcal{O}\, \rangle$
energy-momentum	$T_{\mu\nu}$		

holographic 超流動／超伝導に必要な要素

J_μ, $\mathcal{O}$, $T_{\mu\nu}$ の source： A^μ, Ψ, $g^{\mu\nu}$

$$S_{\text{int}}^{\text{bdy}} \sim \int d^{\text{p}+1}x \;\; (J_\mu\, A^\mu + \mathcal{O}\, \Psi + T_\mu{}^\nu\, g^\mu{}_\nu/2)$$

J_μ	$\leftrightarrow$	A_M	Maxwell
$\mathcal{O}$	$\leftrightarrow$	Ψ	complex scalar
$T_{\mu\nu}$	$\leftrightarrow$	g_{MN}	graviton

$\Rightarrow$ Einstein-Maxwell-complex scalar 系が最も簡単な候補

holographic superconductor

Einstein-Maxwell-complex scalar by HHH(0803.3295, 0810.1563)

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = R - 2\Lambda - \frac{F_{MN}^2}{4} - \left| \nabla_M \Psi - ie\, A_M\, \Psi \right|^2 - m^2 \left|\Psi\right|^2$$

static ＋ plane-symm(planar horizon) 解

- 無秩序相 $(T > T_c(\mu))$： RAdS $(\Psi = 0)$
- 秩序相 $(T < T_c(\mu))$： hairy charged BH $(\Psi \neq 0)$

boundary 側の解釈

相転移： 凝縮 $\langle\, \mathcal{O}\, \rangle \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad \Psi \neq 0$

"超伝導"： bulk A_M に結合する bdy 上の current J_μ に異常

- 伝導度の発散, energy gap $\sigma(\omega) \quad \leftarrow \quad G^{\mathrm{R}}_{xx}(\omega, \vec{q} = 0)/(-i\omega)$
- "London eqn." $\vec{J} \propto -|\langle\, \mathcal{O}\, \rangle|^2 \vec{A} \quad \leftarrow \quad G^{\mathrm{R}}_{xx}(\omega = 0, \vec{q})$

$\Rightarrow$ holographic superconductivity! （bulk A_M の摂動から）

コメント

- holographic superconductor の broken symm. $\sim$ R-symm.

  $\Rightarrow$ global $\longrightarrow$ boundary に dynamical な gauge 場なし

  $\Rightarrow$ 超伝導性を議論することは無意味 !?

- holographic superfluid が自然 (Herzog-Kovtun-Son, 0809.4870)

  $\Rightarrow$ （conductivity の "異常" でなく）viscosity で超流動状態を把握したい

$$\chi_{ij}(\vec{x}\,) \sim -i\langle\, T_{0i}(\vec{x}\,)\, T_{0j}(\vec{0}\,)\,\rangle \quad \leftarrow \quad \chi^{\mathsf{R}}_{ij}(\omega = 0, \vec{x}\,)$$

$$\rightarrow \quad \chi_{ij}\,(\vec{q}\,) = \hat{q}_i\, \hat{q}_j\, \chi_L(\vec{q}\,) + (\delta_{ij} - \hat{q}_i\, \hat{q}_j)\, \chi_T(\vec{q}\,)$$

$$\lim_{q\to 0}\ \chi_L\,(\vec{q}\,) = \rho_{\mathsf{total}} \qquad \lim_{q\to 0}\ \chi_T(\vec{q}\,) = \rho_{\mathsf{normal}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{q\to 0}\ \chi_{ij}\,(\vec{q}\,) = \delta_{ij}\, \rho_{\mathsf{normal}} + \hat{q}_i\, \hat{q}_j\, \rho_{\mathsf{super}}$$

何が問題か？

電気伝導度の発散

"久保公式"

$$\langle\, J_i(k)\,\rangle \sim -G^{\mathrm{R}}_{ij}(k)\, A^{\mathrm{ext}}_j(k) \quad \leftarrow \quad H_{\mathrm{int}} = -\int d\vec{x}\; \vec{J}\cdot\vec{A}$$

$$G^{\mathrm{R}}_{ij}(k) = \mathrm{F.T.}\Big[-i\,\theta(t)\,\langle\, [\, J_i(x),\; J_j(0)\,]\,\rangle\,\Big] \;\leftarrow\; \text{holographic}$$

- これを電場に対する応答に読み替え

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} \quad \leftrightarrow \quad E_j(k) = i\,\omega\, A_j(k) \qquad\qquad k = (\omega, \vec{q})$$

$$\langle\, J_i(k)\,\rangle \sim \frac{G^{\mathrm{R}}_{ij}(k)}{-i\,\omega}\, E^{\mathrm{ext}}_j(k) = \sigma(k)\, E^{\mathrm{ext}}_j(k)$$

高温相 (RNAdS) の伝導度

$$G^{\mathrm{R}}_{xx}(\omega, \vec{q}=0) = 3\,\kappa\, N_c^2\, T_0^2/16 + O(\omega)$$

$$\text{DC-}\sigma \sim i \lim_{\omega\to 0} \frac{C}{\omega + i\,0^+} = C\left(\pi\,\delta(\omega) + i\,\mathcal{P}\,\frac{1}{\omega}\right)$$

何が問題か？
“London” 方程式

- **完全導体も直流伝導度** DC-σ **に** $\delta(\omega)$ **をもつ**
- **超伝導の正しい判定は** London eqn. **の成否（直流伝導度だけでは不十分）**

London eqn.

- **定常外部磁場に対する応答**

$$\vec{J} \propto -|\langle\, \mathcal{O}\,\rangle|^2 \vec{A} \qquad \text{@ London gauge } \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

$\Rightarrow$ Meissner **効果**

c.f.) $\langle\, J_i(k)\,\rangle \sim -G^{\mathrm{R}}_{ij}(k)\, A^{\mathrm{ext}}_j(k)$

$$G^{\mathrm{R}}_{ij}(\omega=0,\vec{q}) = \hat{q}_i\,\hat{q}_j\, G_{\mathrm{L}}(\vec{q}) + (\delta_{ij} - \hat{q}_i\,\hat{q}_j)\, G_{\mathrm{T}}(\vec{q})$$

$$\Rightarrow \langle\, J_i(\vec{q})\,\rangle \sim -G_{\mathrm{T}}(\vec{q})\, A^{\mathrm{ext}}_i(\vec{q}) \qquad @\ \vec{q}\cdot\vec{A}(\vec{q}) = 0$$

$\Rightarrow G^{\mathrm{R}}_{ij}(\omega=0,\vec{q})$ **の** transverse part **が重要**

何が問題か？

"London" 方程式

holographic "London eqn." (Maeda-T.O. 0809.3079, HHH 0810.1563)

- **定常一様 "磁場" に対する応答** $\quad (A_y(x,u) = B(u)\,x)$

$$\langle\, J_y \,\rangle \propto -\left|\, \Psi^{(0)} \,\right|^2 A_y^{(0)} \qquad\qquad \langle\, \mathcal{O} \,\rangle \sim \Psi^{(0)} := \Psi|_{\text{bdy}}$$

c.f.) $\quad \langle\, J_i(\vec{q}\,) \,\rangle \sim -G_{\mathrm{T}}(\vec{q}\,)\, A_i^{\text{ext}}(\vec{q}\,)$

$\Rightarrow$ holographic- $G_{\mathrm{T}}(\omega = 0, \vec{q}\,) \;\sim \left|\, \Psi^{(0)} \,\right|^2 > 0$

遅延グリーン関数の負値性

$$G^{(R)}_{BA}(t) := -i\,\theta(t)\,\langle\,[\,B(t),\; A(0)\,]\,\rangle =: 2\,\theta(t)\;\Delta_{BA}(t)$$

$$\Rightarrow\; \Re\left[\,\tilde{G}^{(R)}_{A^\dagger A}(\omega + i\,0^+)\,\right] = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi}\, \frac{\Im\left[\,\tilde{\Delta}_{A^\dagger A}(\omega'\,)\,\right]}{\omega' - \omega}$$

$$\Rightarrow\; \Re\left[\,\tilde{G}^{(R)}_{A^\dagger A}(z = i\,0^+)\,\right] = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi}\, \frac{\Im\left[\,\tilde{\Delta}_{A^\dagger A}(\omega)\,\right]}{\omega} < 0$$

何が問題か？
"London" 方程式

- holographic "London eqn." **は遅延** Green **関数の負値性に反する**
  $\longrightarrow$ **通常の物性系の超伝導は？**
  - $G^{\mathrm{R}} \sim \langle\, JJ \,\rangle$ **だけでない！** $\quad \langle\, J_i \,\rangle = \left[(-G^{\mathrm{R}}_{ij}) - \frac{e^2 \langle\, |\Phi|^2 \,\rangle}{m} \delta_{ij} \right] A_j$
  - $J_i \propto -|\langle\, \mathcal{O} \,\rangle|^2 A_i \quad \Leftrightarrow \quad (-G_{\mathrm{T}}) < \frac{e^2}{m} \langle\, |\Phi|^2 \,\rangle$
  - **反磁性電流の存在はゲージ結合に由来**

    $$J \propto \mathrm{Im}(\Phi^\dagger D \Phi) = \mathrm{Im}(\Phi^\dagger \nabla \Phi) - e \langle\, |\Phi|^2 \,\rangle A$$

- broken symm. **は大域的な** R-symm.
  $\Rightarrow$ R-current **はゲージ結合していない**
  $\Rightarrow$ **超伝導性を議論することは無意味**
  $\Rightarrow$ **超流動性には意味がある**

超流動の判定条件

運動量の応答関数　容器を速度 $\vec{v}_{\text{ext}}$ で動かす

$$\delta H = -\int d\vec{x}\ \vec{p}\cdot\vec{v}_{\text{ext}} \quad\longrightarrow\quad \delta\langle\, p_i(k)\,\rangle = -\chi_{ij}(k)\ v_j^{\text{ext}}(k)$$

$$\chi_{ij}(k) := \text{F.T.}\left[-i\,\theta(t)\,\langle\,[\,p_i(x)\,,\ p_j(0)\,]\,\rangle\,\right]$$

常流動成分・超流動成分の定義　$\chi_{ij}(\vec{q}\,) := \chi^{\text{R}}_{ij}(\omega=0,\vec{q}\,)$

$$\chi_{ij}(\vec{q}\,) = \hat{q}_i\,\hat{q}_j\ \chi_{\text{L}}(\vec{q}\,) + (\delta_{ij} - \hat{q}_i\,\hat{q}_j)\ \chi_{\text{T}}(\vec{q}\,)$$

$$\Rightarrow\ \rho_{\text{total}} = -\lim_{\vec{q}\to 0}\ \chi_{\text{L}}(\vec{q}\,) \qquad \rho_{\text{normal}} = -\lim_{\vec{q}\to 0}\ \chi_{\text{T}}(\vec{q}\,)$$

$$\rho_{\text{super}} := \rho_{\text{total}} - \rho_{\text{normal}}$$

長距離相関：　$\displaystyle\lim_{\vec{q}\to 0}\ \chi_{ij}(\vec{q}\,) = -\,(\delta_{ij}\,\rho_{\text{normal}} + \hat{q}_i\,\hat{q}_j\,\rho_{\text{super}})$

$\displaystyle\longrightarrow\ \int d\vec{q}\ e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\ q_i\,q_j/q^2 \propto \partial_i\,\partial_j(1/r^{\text{p}-2}) \ \longrightarrow\ \rho_{\text{super}} \neq 0$ **ならベキ則**

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

Einstein-Maxwell

$$S = \int d^{\mathrm{p}+2}x \, \sqrt{-g} \, \left(R + \frac{\mathrm{p}(\mathrm{p}+1)}{l^2} - \frac{F^2}{4} \right) + S_{\mathrm{GH+CT}} \quad (\mathrm{p} = 2, 3)$$

$$1 = \frac{1}{16\,\pi\,G_4} = \frac{N_c^{3/2}}{12\,\sqrt{2}\,\pi\,l^2}\,, \qquad 1 = \frac{1}{16\,\pi\,G_5} = \frac{N_c^2}{8\,\pi^2\,l^3}$$

漸近 AdS な static + planar horizon 解　$\sigma := 2/(\mathrm{p}-1)$

$$ds^2_{\mathrm{p}+2} = \frac{l^2}{u^2} \left(-\frac{\zeta^2\,f(u)}{H^2(u)}\,dt^2 + \zeta^2\,H^\sigma(u)\,d\vec{x}_{\mathrm{p}}{}^2 + \frac{H^\sigma(u)}{f(u)}\,du^2 \right)$$

$f = 0$ @ horizon $(u = 1)$　　$f = H = 1$ @ boundary $(u = 0)$

c.f.)　$ds^2_{\mathrm{p}+2} = -f(r)\,dt^2 + dr^2/g(r) + r^2\,d\vec{x}_{\mathrm{p}}{}^2$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS（高温相）

$$H = 1 + \kappa u^{\mathrm{p}-1}\,, \qquad f = H^{2+\sigma} - (1+\kappa)^{2+\sigma}\, u^{\mathrm{p}+1}$$

$$A_t = \mu \left(1 - \frac{1+\kappa}{H}\, u^{\mathrm{p}-1}\right) \qquad A_t \text{ @ horizon} = 0$$

physical quantities

エネルギー密度： $\epsilon = \frac{\mathrm{p}}{l}\,(l\,\zeta)^{\mathrm{p}+1}\,(1+\kappa)^{2+\sigma}$

エントロピー密度： $s = 4\,\pi\,(l\,\zeta)^{\mathrm{p}}\,(1+\kappa)^{1+\sigma/2}$

温度： $4\pi\,T = \zeta\,(1+\kappa)^{\sigma/2}\,(\mathrm{p}-1)\,(1+\sigma-\kappa)$

化学ポテンシャル： $\mu = l\,\zeta\,\sqrt{2+\sigma}\;\kappa^{1/2}\,(1+\kappa)^{\sigma/2}$

電荷密度： $l\,\rho = (\mathrm{p}-1)\,(1+\kappa)\,(l\,\zeta)^{\mathrm{p}-1}\,\mu$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

遅延 Green 関数の求め方 (Euclidean)

GKP-Witten

$$\left\langle \exp\left[\int_{\text{bdy}} \phi^{(0)}(x)\,\mathcal{O}(x)\right]\right\rangle = \exp\left(-S_{\text{cl}}[\phi]\Big|_{\phi(u=0)=\phi^{(0)}}\right)$$

- **古典解の境界条件：** regular @ horizon

$$\phi_k^{(0)} := \lim_{u\to 0}\phi_k(u) \qquad \phi_k(u) = \phi_k^{(0)}\,f_k(u) \qquad \Big(f_k(0)=1\Big)$$

$$S_{\text{cl}} = \int d^{\text{p}+1}k\int_0^1 du\,\Big(\mathcal{A}(u)\,\phi'_{-k}(u)\,\phi'_k(u)+\cdots\Big)$$

$$= -\int d^{\text{p}+1}k\;\phi_{-k}^{(0)}\left[\mathcal{A}(u)\,f_{-k}(u)\,f'_k(u)\Big|_{u\to 0}\right]\phi_k^{(0)}$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{G_{\text{E}}(k) = -\frac{\delta^2 S_{\text{cl}}}{\delta\phi_{-k}^{(0)}\,\delta\phi_k^{(0)}} = 2\,\mathcal{A}(u)\,f_{-k}(u)\,f'_k(u)\Big|_{u\to 0}}$$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

遅延 Green 関数の求め方 (Lorentzian)

Son-Starinets

$$S_{\mathrm{cl}} = -\int d^{\mathrm{p}+1}k\ \mathcal{A}(u)\,\phi_{-k}(u)\,\phi'_k(u)\Big|_{u\to 0} + (\text{horizon } \textbf{から})$$

$$\Rightarrow -\mathcal{A}(u)\,\phi(u)\,\phi'(u)\Big|_{u\to 0}$$

（以下，このように略記）

- **古典解の境界条件：** horizon in-going @ horizon for $|\omega| > q$
  regular @ horizon for $\omega = 0$

$$\phi_k^{(0)} := \lim_{u\to 0} \phi_k(u) \qquad \phi_k(u) = \phi_k^{(0)}\, f_k(u)$$

$$G^{\mathrm{R}}(k) = \int d^{\mathrm{p}+1}x\ e^{-ikx}\Big[-i\,\theta(t)\,\langle\,[\,\mathcal{O}(x),\,\mathcal{O}(0)\,]\,\rangle\Big]$$

$$\Rightarrow \boxed{G^{\mathrm{R}}(k) = 2\,\mathcal{A}(u)\,f_{-k}(u)\,f'_k(u)\Big|_{u\to 0}} \sim -\frac{\delta^2 S_{\mathrm{cl}}}{\delta\phi_{-k}^{(0)}\,\delta\phi_k^{(0)}}$$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

摂動のタイプ

x 方向に伝搬する摂動　$\exp\left[\, i\,(qx - \omega t)\,\right]$

- ゲージ固定：　$\delta g_{uM} = 0,\ \ \delta A_u = 0$
- x 軸まわりの空間回転に対する変換性で分類（scalar, vector, tensor）
- 異なるタイプの摂動は decoupled $\longrightarrow$ 異なる方程式

vector (transverse) perturbation

$$\delta g_{yt} = g_{xx}\, h^y{}_t(u) \qquad \delta g_{yx} = g_{xx}\, h^y{}_x(u)$$

$$\delta A_y = a_y(u)$$

scalar (longitudinal) perturbation

$$\delta g_{tt} = g_{tt}\, h^t{}_t(u) \qquad \delta g_{xt} = g_{xx}\, h^x{}_t(u)$$

$$\delta g_{xx} = g_{xx}\, h^x{}_x(u) \qquad \delta g_{yy} = g_{xx}\, h^y{}_y(u) = \delta g_{zz}$$

$$\delta A_t = a_t(u) \qquad \delta A_x = a_x(u)$$

$$\Rightarrow \left\langle\, [\, T^t{}_y,\, T^t{}_y\,]\,\right\rangle \ \leftrightarrow\ h^y{}_t \qquad \left\langle\, [\, T^t{}_x,\, T^t{}_x\,]\,\right\rangle \ \leftrightarrow\ h^x{}_t$$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS$_{4,5}$（高温相）の vector 摂動

摂動方程式 $\tilde{a}_y := a_y/\mu, \quad \mathfrak{w} := \omega/\zeta, \quad \mathfrak{q} := q/\zeta$

$$0 = \mathfrak{w}\Big(- 2\,\mathsf{p}\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,u^{\mathsf{p}}\,\tilde{a}_y + H^{2+\sigma}\,{h^{y}}'_{t}\Big) + \mathfrak{q}\,f\,{h^{y}}'_{x}$$

$$0 = {h^{y}}''_{t} + \mathsf{p}\left(\sigma\,\frac{H'}{H} - \frac{1}{u}\right){h^{y}}'_{t} - \frac{\mathfrak{q}^2}{f}\,{h^{y}}_{t} - \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{w}}{f}\,{h^{y}}_{x} - 2\,\mathsf{p}\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,\frac{u^{\mathsf{p}}}{H^{2+\sigma}}\,\tilde{a}'_y$$

$$0 = {h^{y}}''_{x} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{\mathsf{p}}{u}\right){h^{y}}'_{x} + \frac{\mathfrak{w}^2\,H^{2+\sigma}}{f^2}\,{h^{y}}_{x} + \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{w}\,H^{2+\sigma}}{f^2}\,{h^{y}}_{t}$$

$$0 = \tilde{a}''_y + \left(\frac{f'}{f} - \sigma\,\frac{H'}{H} - \frac{\mathsf{p}-2}{u}\right)\tilde{a}'_y + \frac{\mathfrak{w}^2\,H^{2+\sigma} - \mathfrak{q}^2\,f}{f^2}\,\tilde{a}_y - (\mathsf{p}-1)\,(1+\kappa)\,\frac{u^{\mathsf{p}-2}\,H^{\sigma}}{f}\,{h^{y}}'_{t}$$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS$_{4,5}$（高温相）の vector 摂動

action

$$S_{\mathrm{v}} = \frac{(l\,\zeta)^{\mathrm{p}+1}}{2\,l\,u^{\mathrm{p}}} \Big[(2+\sigma)\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,\frac{u^2\,f}{H^\sigma}\,\tilde{a}_y\,\tilde{a}'_y - H^{2+\sigma}\,h^y{}_t\,h^y{}'_t + f\,h^y{}_x\,h^y{}'_x \Big]\Big|_{u\to 0} \qquad \left(\phi^2 \to \int d^{\mathrm{p}+1}k\;\phi_{-k}(u)\,\phi_k(u) \right)$$

静的摂動： $(h^y{}_t, \tilde{a}_y)$, (h^y_x)

$$\left(\frac{H^{2+\sigma}}{u^{\mathrm{p}}}\,h^y{}'_t - 2\,\mathrm{p}\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,\tilde{a}_y \right)' = \mathfrak{q}^2\,\frac{H^{2+\sigma}}{u^{\mathrm{p}}\,f}\,h^y{}_t$$

$$\left(\frac{f}{u^{\mathrm{p}-2}\,H^\sigma}\,\tilde{a}'_y - (\mathrm{p}-1)\,(1+\kappa)\,h^y{}_t \right)' = \frac{\mathfrak{q}^2}{u^{\mathrm{p}-2}\,H^\sigma}\,\tilde{a}_y$$

- 長波長極限 $\mathfrak{q} \to 0$ の振る舞いは $\mathfrak{q}^2$-展開から

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS$_{4,5}$（高温相）の vector 摂動

ゼロ次解

$$h^y{}_t(u) = \frac{f}{H^{2+\sigma}}\, h^{y(0)}_t$$

$$\tilde{a}_y(u) = \frac{a_y(u)}{\mu} = \frac{a_y^{(0)}}{\mu} + (1+\kappa)\,\frac{u^{p-1}}{H}\, h^{y(0)}_t$$

遅延 Green 関数

$$G^{\mathrm{R}}_{ty,ty}(\omega=0,q)\Big|_{q\to 0} = -\frac{\mathrm{p}+1}{l}\,(l\,\zeta)^{\mathrm{p}+1}\,(1+\kappa)^{2+\sigma} = -(T\,s+\mu\,\rho)$$

c.f.) $G^{\mathrm{R}}_{ty,ty}(\omega=0,q)\Big|_{q\to 0} = -(T\,s+\mu\,\rho_n)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho_s := \rho - \rho_n = 0}$$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS$_{4,5}$（高温相）の scalar 摂動

摂動方程式： $h^t{}_t,\ h^x{}_t,\ h^x{}_x,\ h^y{}_y,\ \tilde{a}_t,\ \tilde{a}_x$

Einstein eqn.: 7 **本** $=$ **拘束** 3 **本** $+$ EOM 4 **本**

Maxwell eqn.: 3 **本** $=$ **拘束** 1 **本** $+$ EOM 2 **本**

ex.) p $= 3$

$$0 = \mathfrak{q}\,\frac{f}{H^3}\left(\frac{H^3}{f}\,h^x{}_t\right)' + \mathfrak{w}\sqrt{\frac{f}{H^3}}\left(\sqrt{\frac{H^3}{f}}\,(h^x{}_x + 2\,h^y{}_y)\right)'$$

$$0 = \frac{u^3}{H^3}\left(\frac{H^3}{u^3}\,h^{x\prime}{}_t\right)' + \frac{u^2\,A_t'}{l^2\,\zeta^2\,H}\,a_x' + \frac{2\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{w}}{f}\,h^y{}_y$$

$$0 = \mathfrak{q}\left(\frac{f}{H^3}\,\frac{a_x'}{A_t'} + h^x{}_t\right) + \mathfrak{w}\left(h^y{}_y + \frac{h^x{}_x - h^t{}_t}{2} + \frac{a_t'}{A_t'}\right)$$

※ $\mathfrak{w} \to 0$ で $(h^x{}_t, \tilde{a}_x)$ と $(h^t{}_t, h^x{}_x, h^y{}_y, \tilde{a}_t)$ とが decoupled

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS$_{4,5}$（高温相）の scalar 摂動

静的摂動： $(h^y{}_t, \tilde{a}_y)$，(h^y_x)

$$\left(\frac{H^{2+\sigma}}{f}\, h^x{}_t\right)' = 0\,,\qquad \frac{f\,\tilde{a}'_x}{u^{\mathrm{p}-2}\,H^{\sigma}} - (\mathrm{p}-1)\,(1+\kappa)\,h^x{}_t = 0$$

c.f.) $\left(\frac{H^{2+\sigma}}{u^{\mathrm{p}}}\, h^y{}'_t - 2\,\mathrm{p}\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,\tilde{a}_y\right)' = O(\mathfrak{q}^2) = \left(\frac{f}{u^{\mathrm{p}-2}\,H^{\sigma}}\,\tilde{a}'_y - (\mathrm{p}-1)\,(1+\kappa)\,h^y{}_t\right)'$

静的解（vector 摂動のゼロ次解と同形）

$$h^x{}_t(u) = \frac{f}{H^{2+\sigma}}\, h^{x\,(0)}_{\ t}$$

$$\tilde{a}_x(u) = \frac{a_x(u)}{\mu} = \frac{a^{(0)}_x}{\mu} + (1+\kappa)\,\frac{u^{p-1}}{H}\, h^{x\,(0)}_{\ t}$$

RNAdS$_{4,5}$（高温相）は超流動体か？

RNAdS$_{4,5}$（高温相）の scalar 摂動

action

$$S_{\mathrm{s}} = \frac{(l\,\zeta)^{\mathrm{p}+1}}{2\,l\,u^{\mathrm{p}}} \Big[(2+\sigma)\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,\frac{u^2\,f}{H^\sigma}\,\tilde{a}_x\,\tilde{a}'_x - H^{2+\sigma}\,h^x{}_t\,h^x{}'_t + \cdots \Big]\Big|_{u\to 0}$$

c.f.) $S_{\mathrm{v}} = \frac{(l\,\zeta)^{\mathrm{p}+1}}{2\,l\,u^{\mathrm{p}}} \Big[(2+\sigma)\,\kappa\,(1+\kappa)^{1+\sigma}\,\frac{u^2\,f}{H^\sigma}\,\tilde{a}_y\,\tilde{a}'_y - H^{2+\sigma}\,h^y{}_t\,h^y{}'_t + \cdots \Big]\Big|_{u\to 0}$

遅延 Green 関数

$$G^{\mathrm{R}}_{tx,tx}(\omega=0,q)\Big|_{q\to 0} = -\frac{\mathrm{p}+1}{l}\,(l\,\zeta)^{\mathrm{p}+1}\,(1+\kappa)^{2+\sigma}$$
$$= -(T\,s+\mu\,\rho) = G^{\mathrm{R}}_{ty,ty}(\omega=0,q)\Big|_{q\to 0}$$

c.f.) $G^{\mathrm{R}}_{tx,tx}(\omega=0,q)\Big|_{q\to 0} = -(T\,s+\mu\,\rho)$

single R-charge BH は超流動体か？

single R-charge BH

- 低温相では背景 scalar Ψ あり $\longrightarrow$ scalar 摂動に $\delta\Psi$ が加わる
- 非自明な scalar 場を含む解： STU BH 解 $\supset$ single R-charge BH

Lagrangian (g_{MN}, A_M, X) $\longleftarrow$ 10-dim type IIB SUGRA

- $$\frac{\mathcal{L}_5}{\sqrt{-g}} = R_5 - \frac{F_{MN}^2}{8\,X^2} - \frac{3}{4}\,\frac{(\partial X)^2}{X^2} + \frac{4}{l^2}\left(\frac{1}{X} + 2\sqrt{X}\right)$$

single R-charge BH

$$ds_5^2 = \frac{l^2}{z}\left(-\frac{\zeta^2\,f}{H^{2/3}}\,dt^2 + \zeta^2\,H^{1/3}\,d\vec{x}_3^{\,2} + \frac{H^{1/3}\,dz^2}{4\,z\,f}\right)$$

$$H = 1 + \kappa\,z \qquad\qquad f = H - (1+\kappa)\,z^2$$

$$A_t = \mu\left(1 - \frac{1+\kappa}{H}\,z\right) \qquad\qquad X = H^{-2/3}$$

single R-charge BH は超流動体か？

摂動と Green 関数

single R-charge BH の摂動（b.g. scalar あり）

vector(transverse)： $(h^y{}_t,\ h^y{}_x,\ a_y)$

scalar(longitudinal)： $(h^t{}_t,\ h^x{}_t,\ h^x{}_x,\ h^y{}_y = h^z{}_z,\ a_t,\ a_x) + \delta X$

$\Downarrow\ \omega = 0$

vector(transverse)： $(h^y{}_t)$ $\qquad (h^y{}_x,\ a_y)$

scalar(longitudinal)： $(h^t{}_t,\ h^x{}_x,\ h^y{}_y,\ a_t,\ \delta X)$ $\qquad (h^x{}_t,\ a_x)$

遅延 Green 関数

$$G^{\mathrm{R}}_{ty,ty}(\omega = 0, q)\Big|_{q\to 0} = G^{\mathrm{R}}_{tx,tx}(\omega = 0, q)\Big|_{q\to 0} = -(T\,s + \mu\,\rho)$$

c.f.) $G^{\mathrm{R}}_{ty,ty}(\omega = 0, q)\Big|_{q\to 0} = -(T\,s + \mu\,\rho_n)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho_s := \rho - \rho_n = 0}$$

まとめ

問題意識

- holographic "superconductor" の超伝導性の根拠は薄弱
  - R-charge 伝導度の発散 $\longrightarrow$ 高温相でも発散 $\sim$ 完全導体も $\sigma \uparrow \infty$
  - "London eqn." $\longrightarrow$ Green 関数の負値性と矛盾

  どちらも R-charge current の Green 関数から

- そもそも R-symm. は大域的対称性 $\Rightarrow$ 超流動性を調べるべき
  - 運動量相関の L-part $G^{\mathrm{R}}_{t\parallel,t\parallel}\big|_{\omega=0,q\to 0}$ $\longrightarrow$ 全凝縮密度 ρ
  - 運動量相関の T-part $G^{\mathrm{R}}_{t\perp,t\perp}\big|_{\omega=0,q\to 0}$ $\longrightarrow$ 常流動密度 ρ_n

結果

- 高温相（RNAdS$_{4,5}$）は $\rho = \rho_n$
  - $G^{\mathrm{R}}_{t\perp,t\perp}\big|_{\omega=0,q\to 0} = G^{\mathrm{R}}_{t\parallel,t\parallel}\big|_{\omega=0,q\to 0} = -(s\,T + \mu\,\rho)$
- 非自明な背景 scalar 場をもつ single R-charge BH の場合も同様