

Massless radiation from rotating string and black hole

Toshihiro Matsuo

(Okayama Institute for Quantum Physics)

- 1 回転弦/BHの対応原理
- 2 回転弦からの輻射計算
- 3 まとめ

Introduction

ストリング理論 = 量子重力

ブラックホール

BPS [Strominger-Vafa]

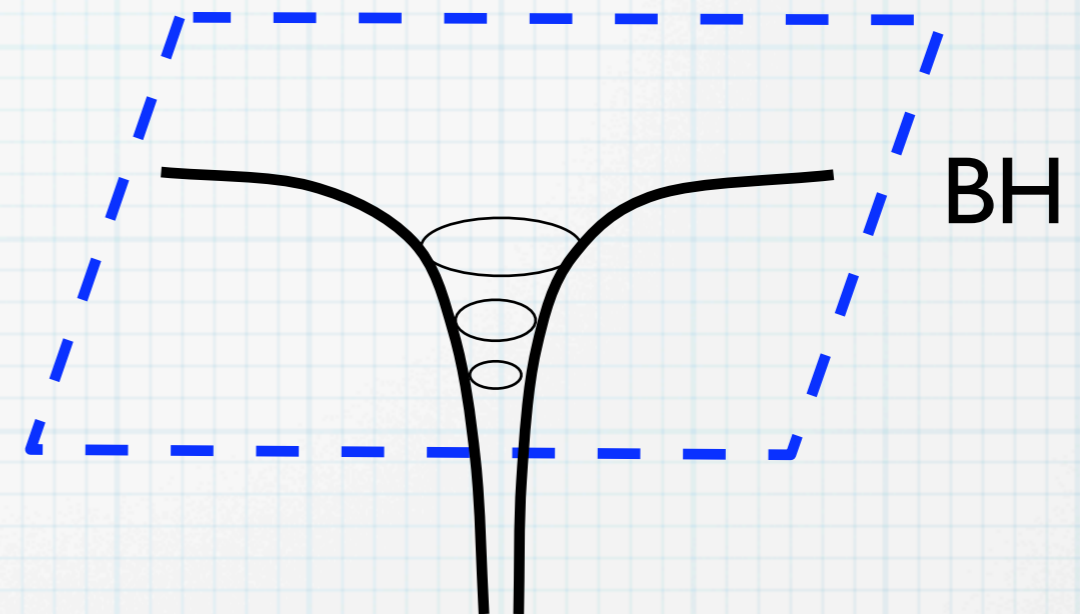
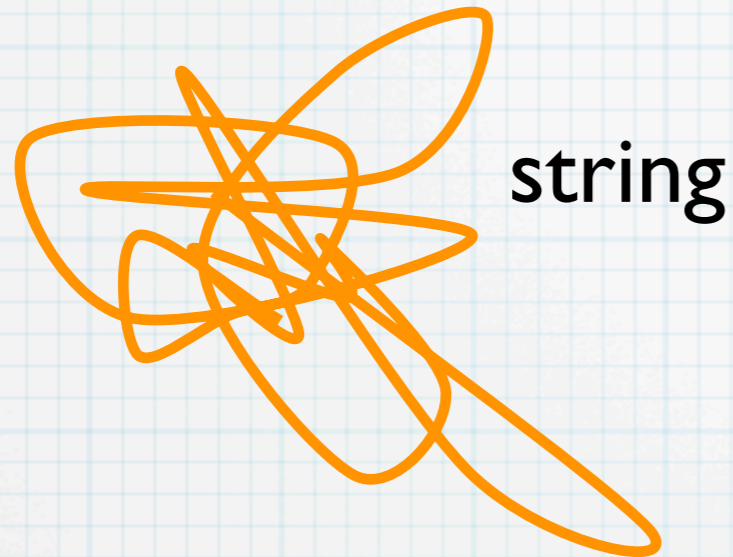
Schwarzschild, Kerr

ストリング/BH 対応 (原理) のいくつかの議論

- 1 エントロピー
- 2 輻射スペクトラム
- 3 断面積

* エントロピー対応

[Susskind, Horowitz-Polchinski]



$$e^{S_{string}} \sim e^{\beta_H M}$$

$$\beta_H = 4\pi l_s$$

$$e^{S_{BH}} \sim e^{GM^2}$$

$$= e^{\beta_{BH} M}$$

対応点

$$g_s \sim 1/M^2$$

$$T_{string} \sim T_{BH}$$



$$S_{string} \sim S_{BH}$$

* 輻射スペクトラム

[Amati-Russo]

$$prob \sim \frac{1}{\mathcal{G}} \sum_{initial} \sum_{final} |\langle final | V_\gamma | initial \rangle|^2$$

$$\mathcal{G} \sim e^{\beta_H \sqrt{N}}$$

$$\sim \frac{1}{e^{\beta_H \omega} - 1}$$

温度 T_H の黒体輻射

$$N_\omega = \frac{1}{e^{\omega/T_{bh}} - 1}$$

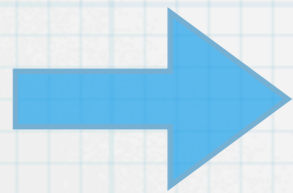
[Hawking]



疑問

どの議論も角運動量固有状態を（ミクロな）縮退と見なして平均（粗視化）している。

(gas (多体系) を考えているのならば良いが、いまは一体をかんがえているつもり。)



角運動量を指定しよう

(Schwarzschild に対応するものが知りたければ、 $J=0$ とすればよい。)

$$N_{\omega, m} = \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega)/T_{bh}} - 1}$$

* 角運動量がある場合の対応原理

Kerr/String correspondence

extremal のとき

[Russo-Susskind, Bardeen-Horowitz]

M, J を固定して、重力定数G (string coupling gs) を小さくしていく。ホライズンサイズがストリングサイズになったところが対応点。

$$M_{BH} \sim \frac{l_s}{G} \sim \frac{\sqrt{N}}{l_s} \sim M_{string}$$

$$G \sim g_s^2 l_s^2 \longrightarrow g_s \sim N^{-1/4}$$

BHエントロピーは

$$S_{BH} = 2\pi J = 2\pi GM^2 = 2\pi Mr_+ \sim Ml_s \sim \sqrt{N}$$

extremal Kerr data

$$GM^2 = J$$

$$r_+ = GM$$

$$S_{BH} = 2\pi J$$

$$\Omega = \frac{J}{2GM^2 r_+} = \frac{1}{2r_+}$$

一方、ストリングエントロピー

$$S_{BH} = 2\pi J \sim \sqrt{N}$$

ここで、extremal BH ($J = GM^2$) に対応するストリング状態は $J = N$ (on the Regge slope) ではなくて、 $J = \sqrt{N}$

回転するストリング状態数は

$$\mathcal{G}(N, J) \sim \begin{cases} N^{-\frac{D+3}{4}} \exp\left(\beta_H \sqrt{N}\right) \cosh^{-2}\left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N}}\right) & |J| \ll N \\ (N - |J|)^{-\frac{D+3}{4}} \exp\left(\frac{\beta_H(2N - |J|)}{2\sqrt{N - |J|}}\right) \cosh^{-2}\left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N - |J|}}\right) & |J| = O(N) \end{cases}$$

[Russo-Susskind]

やはり

$$S_{string} \sim \sqrt{N}$$

となってBHと一致

non-extremal の場合

エントロピー対応はほぼ自明

Schwarzschild のときの議論とほぼ同じ

$$S_{BH} = 2\pi M r_+ \sim M l_s \sim \sqrt{N} \sim S_{string}$$

角運動量とレベルの関係は

$$0 \leq J < \sqrt{N}$$

Kerr data

$$r_+ = GM + \sqrt{G^2 M^2 - J^2 / M^2}$$

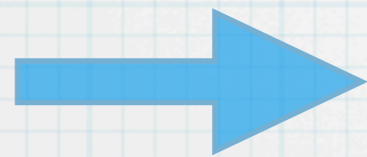
$$S_{BH} = 2\pi M r_+$$

$$T_{BH} = \frac{r_+ - GM}{4\pi G M r_+}$$

というわけで、エントロピー対応のほうは、角運動量を指定しても結果は同じ。

対応原理が成立するような角運動量の領域では、十分な縮退があるということ

しかし、放射スペクトラムのほうは、必ずしも自明ではない。



角運動量を指定した輻射計算

ちなみに、断面積対応の方は一見対応がないが **[Dimopoulos-Emparan]**、部分波に分けて考える（角運動量を指定する）と対応の見える領域が現れる。

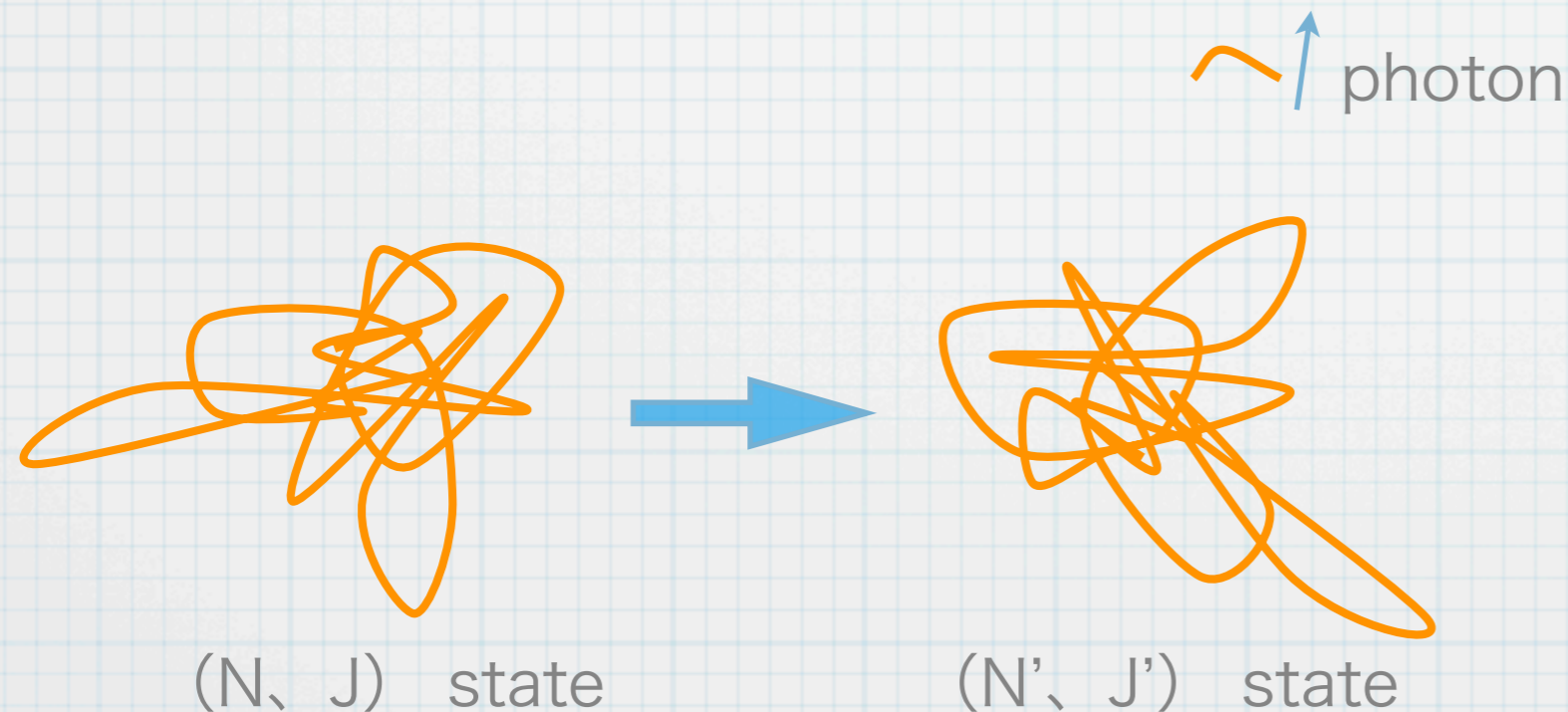
[TM-Oda PRD79:026003,2009]

回転弦からの輻射計算

ストリング (N、J) が phoron $V_\zeta(k)$ を放出してストリング (N'、J') になる確率。

$$P(\Phi_{N,J} \rightarrow \zeta(k) + \Phi_{N',J'}) = \frac{1}{\mathcal{G}(N,J)} \sum_{\Phi|(N,J)} \sum_{\Phi|(N',J')} \sum_{\zeta} |\langle \Phi(N',J') | V_\zeta(k) | \Phi(N,J) \rangle|^2$$

レベルと角運動量を指定して、始状態は平均し、終状態は足し上げる。



生成断面積のときはタキオン
でよかった **[Kuroki-TM]**

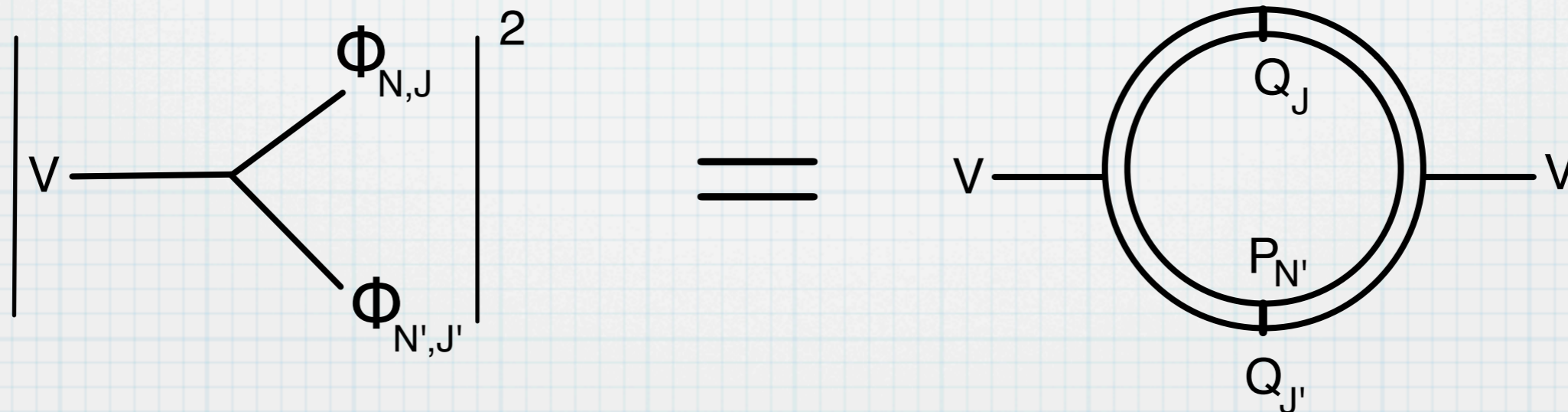
が、今回は (計算が面倒な)
Photonを使う必要がある。

状態 N への射影演算子 \hat{P}_N 角運動量 J への射影演算子 \hat{Q}_J をつかって

(tree)² を 1-loop の 2 点関数にする

$$\hat{P}_N = \oint \frac{dz}{2\pi iz} z^{\hat{N}-N}$$

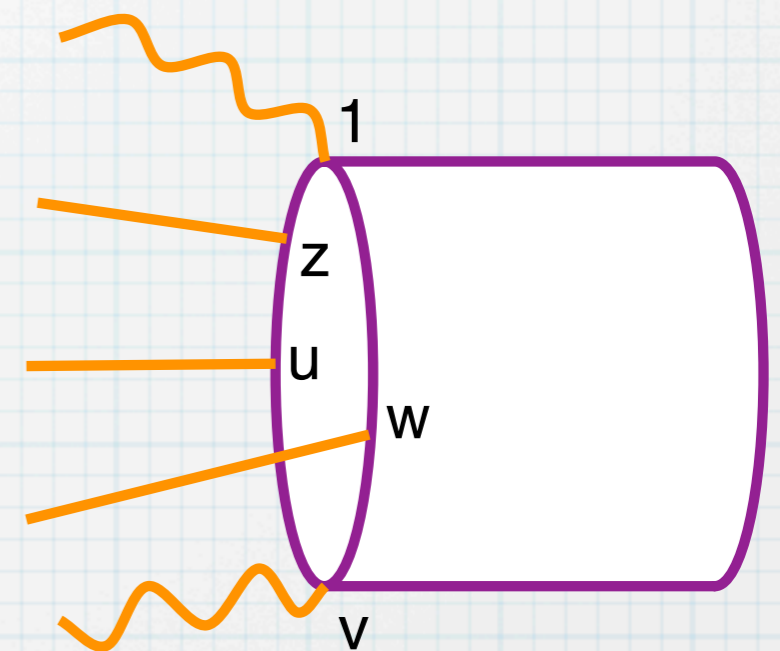
$$\hat{Q}_J = \oint \frac{dz}{2\pi iz} z^{\hat{J}-J}$$



$$\begin{aligned}
 P(\Phi_{N,J} \rightarrow \zeta(k) + \Phi_{N',J'}) &= \frac{1}{\mathcal{G}(N,J)} \sum_{\zeta} \text{tr}[V_{\zeta}(-k, 1) Q_{J'} P_{N'} V_{\zeta}(k, 1) Q_J P_N] \\
 &= \frac{1}{\mathcal{G}(N,J)} \sum_{\zeta} \oint \frac{dz}{2\pi iz} z^{-J'} \oint \frac{dv}{2\pi iv} v^{N-N'} \oint \frac{du}{2\pi iu} u^{-J} \oint \frac{dw}{2\pi iw} w^{-N} \\
 &\quad \times \text{tr}[V_{\zeta}(-k, 1) z^{\hat{J}} V_{\zeta}(k, v) u^{\hat{J}} w^{\hat{N}}]
 \end{aligned}$$

トレースの計算を実行して

その後に、z、v 積分を実行



トレース部分の計算はコヒーレント状態をつかう

$$\text{tr}(A) = \int \frac{d^2u}{\pi} e^{-|u|^2} \langle u|A|u\rangle$$

$$|u\rangle = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{\mu} \frac{u_n^{\mu}}{\sqrt{n}}\right) |0\rangle$$

$$\hat{N} = \sum_n \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$$

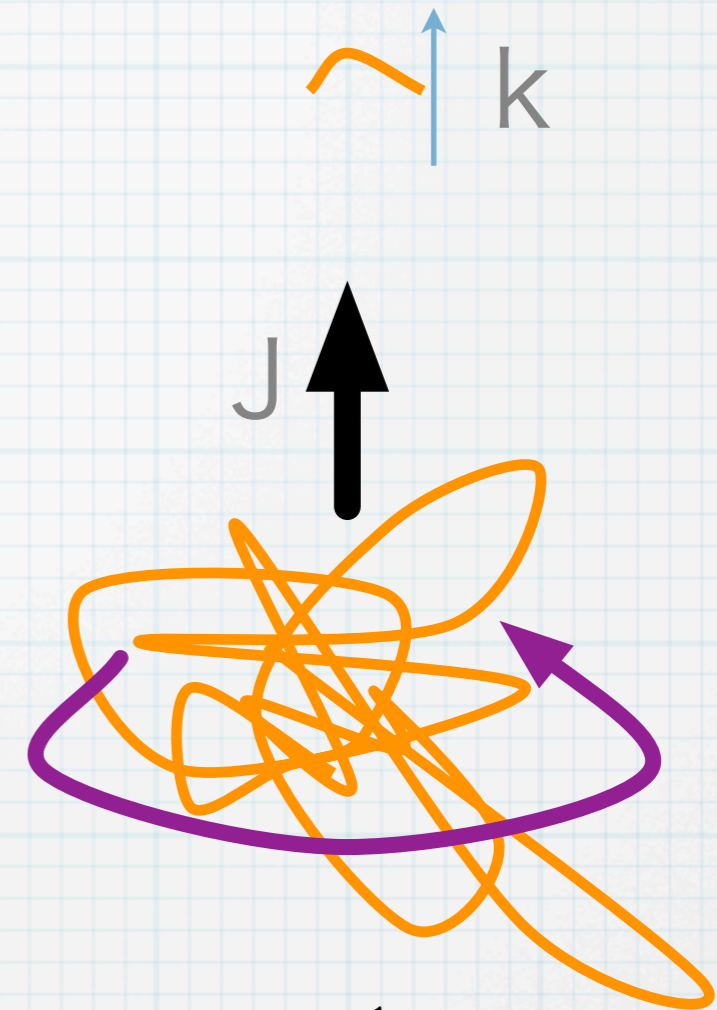
$$\hat{J} = -i \sum_n \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^1 \alpha_n^2 - \alpha_{-n}^2 \alpha_n^1)$$

$$[\alpha_n^{\mu}, \alpha_m^{\nu}] = n \delta_{n,m} \delta^{\mu\nu}$$

トレース計算の結果

話を簡単にするために放射の方向を極の方向にえらぶ

$$k_\mu = (k, 0, 0, k, 0, \dots, 0)$$



$$\begin{aligned} \text{tr}[V_\zeta(-k, 1)z^{\hat{J}}V_\zeta(k, v)u^{\hat{J}}w^{\hat{N}}] &= [f(w)]^{3-d} \prod_{m=1} \frac{1}{1 - 2w^m C_{uz} + w^{2m}} \\ &\times \sum_{n=1} \left[\zeta_i \zeta^i_n \frac{v^n + (w/v)^n}{1 - w^n} + \zeta^2_n \frac{v^n (C_z - w^n C_u) + (w/v)^n (C_u - w^n C_z)}{1 - 2w^n C_{uz} + w^{2n}} \right] \end{aligned}$$

z、v 積分を実行する

$$\begin{aligned}
P = & -2 \frac{(N - N')}{\mathcal{G}(N, J)} \oint \frac{du}{2\pi i u} u^{-J} \oint \frac{dw}{2\pi i w} w^{-N'} [f(w)]^{4-d} \frac{e^{\frac{i\pi\tau}{4}} \sin(\pi\nu)}{\vartheta_{11}(\nu, \tau)} \\
& \times \sum_{\zeta} \left[\zeta_i \zeta^i \frac{1}{1 - w^{N-N'}} \delta_{J, J'} \quad \leftarrow \text{“scalar” emission} \right. \\
& \quad + \frac{\vec{\zeta}^2}{2} \frac{u}{1 - uw^{N-N'}} \delta_{J', J-1} \quad \leftarrow \text{“photon” emission} \\
& \quad \left. + \frac{\vec{\zeta}^2}{2} \frac{u^{-1}}{1 - u^{-1}w^{N-N'}} \delta_{J', J+1} \right] \quad \leftarrow \text{with helicity } +-
\end{aligned}$$

ここまで exact

いま、重いストリングを考えているので、 $w =: e^{-\beta}$

として、小さい β に鞍点があると仮定する

β が小さいとすれば u 積分ができるようになる

scalar emission

$$P_J \sim \frac{2k^0 \sqrt{N}}{\mathcal{G}(N, J)} \sum_{\zeta} \zeta_i \zeta^i \oint \frac{d\beta}{2\pi i} \beta^{D/2} e^{\beta N' + \frac{\beta^2 H}{4\beta}} \frac{1}{1 - e^{-2\beta k^0 \sqrt{N}}} \frac{1}{\cosh^2(\beta J/2)}$$

photon emission

$$P_{J\pm 1} \sim \frac{2k^0 \sqrt{N}}{\mathcal{G}(N, J)} \sum_{\zeta} \frac{\vec{\zeta}^2}{2} \oint \frac{d\beta}{2\pi i} \beta^{D/2} e^{\beta N' + \frac{\beta^2 H}{4\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2m\beta k^0 \sqrt{N}}}{\cosh^2(\beta(J \pm (m+1))/2)}$$

β の積分は鞍点法で評価する

Scalar radiation の場合

$$\text{鞍点方程式} \quad \frac{\beta_H^2}{4\beta^2} = N' - J \tanh(\beta J/2)$$

いまは、BHとの対応が期待できる領域 $|J| \ll N$ を考える

$$\text{鞍点} \quad \beta_s \sim \frac{\beta_H}{2\sqrt{N'}} \quad \text{を代入して周りの積分}$$

scalar の輻射確率

$$P_J \sim k^0 \sqrt{N} \left(\frac{N}{N'} \right)^{\frac{D+3}{4}} \sum_{\zeta} \zeta_i \zeta^i \frac{1}{e^{\beta_H k^0} - 1} \frac{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N}} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N'}} \right)}$$

$$\sim k^0 \sqrt{N} \frac{1}{e^{\beta_H k^0} - 1} \quad \text{Thermal}$$

Photon radiation の場合

$$P_{J\pm 1} \sim \frac{2k^0 \sqrt{N}}{\mathcal{G}(N, J)} \sum_{\zeta} \frac{\zeta^2}{2} \oint \frac{d\beta}{2\pi i} \beta^{D/2} e^{\beta N' + \frac{\beta_H^2}{4\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2m\beta k^0 \sqrt{N}}}{\cosh^2(\beta(J \pm (m+1))/2)}$$

高エネルギー放射を考える。 $1 \ll k^0 \ll \sqrt{N}$

$m=0$ のみ効く。

鞍点方程式 $\frac{\beta_H^2}{4\beta^2} = N' - (J \pm 1) \tanh(\beta(J \pm 1)/2)$

やはり $J \leq \sqrt{N} \ll N$ なので第二項は無視できて

鞍点 $\beta_s \sim \frac{\beta_H}{2\sqrt{N'}}$

photon の輻射確率

$$\begin{aligned}
 P_{J\pm 1} &\sim k^0 \sqrt{N} \left(\frac{N}{N'} \right)^{\frac{D+3}{4}} \sum_{\zeta} \frac{\zeta^2}{2} e^{-\beta_H k^0} \frac{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H J}{4\sqrt{N}} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H (J\pm 1)}{4\sqrt{N'}} \right)} \\
 &\sim k^0 \sqrt{N} e^{-\beta_H k^0} \frac{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H \Omega}{2} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{\beta_H \Omega}{2} \left(1 + \frac{k^0}{\sqrt{N}} \right) \right)}
 \end{aligned}$$

$$\neq e^{-\beta(k^0 \pm \Omega)}$$

対応点では角速度が

$$\Omega_{BH} = \frac{J}{2GM^2 r_+} \sim \frac{J}{2\sqrt{N}}$$

なので

$$\Omega \equiv \frac{J}{2\sqrt{N}}$$

とした

Summary

- * 角運動量を指定した状態からのゼロ質量状態の放射スペクトラムを計算した。
- * スカラー放射に関しては、BHからのスペクトラムを再現。
- * 光子放射に関しては、BHからのスペクトラムを再現しない（ようだ）。

異なる切り口

一体ではダメで、適当な重み付きの多体状態がBHに対応

- * 多体だとすると、どのような重みで平均すればよいか
- * extremal Kerr (温度の問題)
- * フェルミオン分布は出るか (本当に黒体輻射しているか)
- * BH以外の応用はあるか cosmic string, polymer

Thank you