重力理論と熱力学

太田　信義 (近畿大学理工学部)

1　ブラックホールと熱力学

- **アインシュタインの一般相対性理論**

Schwarzschild 解

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)$$

ただし

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2} = 2M \quad \text{in the unit of } G = c = 1$$

$r = r_g$ **は特異点ではないが、** $r < r_g$ **から** $r > r_g$ **へは情報が伝わらない。**
——— **事象の地平線（ホライズン）**

1971 Hawking
weak energy condition ($T_{ab}k^a k^b \geq 0$) + cosmic censorship hypothesis
ブラックホールを含む古典的過程では、ホライズン面積は減らない！
$\Rightarrow$ **熱力学のエントロピーと類似**

- **1972 Bekenstein**
ブラックホールはエントロピー

$$S \propto A \ (\text{horizon area})$$

を持つと示唆。しかし比例定数は？
$\Leftarrow$ **Wheeler: ブラックホールにエントロピーを持つ状態を吸わせると宇宙のエントロピーを減少させることができるか？**

- **1973 Bardeen-Carter-Hawking**
ブラックホールの満たす４つの熱力学法則
第０法則: surface gravity κ **は定常ブラックホールのホライズンで一定。**
第１法則: $\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J_H$
これは質量などの定義から出発して、質量が少し違うブラックホールを考えて導出する。

第2法則: $\delta A \geqq 0$ **(面積は減少しない)** $\Leftrightarrow$ $\delta E = TdS$
しかし彼らは、$T=0$と考えていた。なぜなら、有限温度だとradiationが出るはずだが、ブラックホールからは何も出てこないはずだから。
第3法則: **有限の操作でκを0にすることはできない。**

- **1975 Hawking**

ブラックホールは、semi-classicalにradiationを出し、それは温度$T=\frac{\kappa}{2\pi}$のプランク分布をしている！$\Rightarrow S=\frac{A}{4}$ と決まった！
この場合、一般化された第2法則が成立する。

$$\frac{d}{dt}(S_{\rm BH}+S_{\rm matter}) \geq 0$$

以上のことは 単にアインシュタイン重力に限らず、より一般の重力理論のブラックホール解に拡張できる。
温度T: imaginary timeへの解析接続で決まる。
エントロピー S: 一般化が必要。
熱力学第1法則 $TdS=dM$ により決まる。これはネーター電荷と一致(Wald)。

$\boxed{\textbf{Question}}$

ブラックホールのエントロピーを生じる自由度は何か？

- **ブラックホールのできるでき方の数？**
- **ブラックホールの内部状態の数？**
- **ホライズンの量子状態の数？**

以上は、ブラックホールのホライズンに限らない。
曲がった時空における量子場の理論を調べるとホライズンのあるどんな時空においても温度があることがわかった！

物体を温めることができる $\Rightarrow$ **微視的構造の存在**（Padmanabhan)
ブラックホールの温度 $\Rightarrow$ radiation $\cdots$ **物体を本当に温めることができる。**
加速系 $\cdots$ **熱を感じる** $\cdots$ **通常の熱と同じ！**

熱力学は、微視的構造、理論の詳細によらず普遍的に構成できる $\Rightarrow$ **重力理論**

2 加速度と温度

統計力学の分配関数

$$Z(\beta) = \mathbf{Tr}\ e^{-\beta H} = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle$$

この被積分関数は、場の理論の変換関数 $\langle q' | e^{-itH} | q \rangle$ **において、** $\beta = it, q' = q$ **とおいたもの**

$$Z(\beta) = \int_{q[0]=q[\beta]} [dq] \exp \left(- \int_0^\beta L_E d\tau \right)$$

ユークリッド時間の周期 $= \beta = \frac{1}{k_B T}$
加速されている系: ミンコフスキー空間を運動する検出器
基底状態からエネルギー E **の状態への遷移確率**

$$P = \sum_E |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} g(\Delta\tau)$$

ここで $m(0)$ **は検出器を表す演算子、** g **は粒子の伝播関数で、今質量** 0 **のスカ**

ラー粒子を考えると

$$g(\Delta\tau)=\frac{-1}{4\pi^2}\frac{1}{(t-t')^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}$$

粒子が一定の加速度 κ を持っているときの軌跡は

$$t=\frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa\tau),\qquad x=\frac{1}{\kappa}\cosh(\kappa\tau)$$

$$\Rightarrow g(\Delta\tau)=-\frac{\kappa^2}{16\pi^2}\frac{1}{\sinh^2\frac{\kappa}{2}(\tau-\tau')}=-\frac{\kappa^2}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\Delta\tau+\frac{2\pi}{\kappa}ki)^2}$$

上の積分を実行すると $\Delta\tau=-\frac{2\pi}{\kappa}ki$ の極の寄与が効いて

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(E-E_0)e^{-(2\pi/\kappa)(E-E_0)k}$$

$$\Rightarrow\quad P=\sum_E|\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2\frac{E-E_0}{2\pi}\frac{1}{e^{(2\pi/\kappa)(E-E_0)}-1}$$

これは、温度 $T=\frac{\kappa}{2\pi k_B}$ のプランク分布！！（粒子の定義が変わることによる

Bogoliubov 変換でも得られる。)

Thermodynamics の有用性

1983 Hawking-Page (この論文は 1998 年に Witten が AdS/CFT の文脈で引用するまで 15 回しか引用されていないが、それ以後今日までで 582 回引用されている。)

phase transtion between 2 kinds of solutions asymptotically AdS: AdS-Schwarzschild and thermal AdS ($\Leftarrow$ by comparing the values of the Euclidean action)

$\Rightarrow$ correspond to confinment(low temperature, AdS)/deconfinement (high temperature, AdS-Schw.) transition via AdS/CFT correspondence (1998 Witten)

3 Horizon Thermodynamics または アインシュタイン方程式 $\Rightarrow$ 熱力学第 1 法則

2002 T. Padmanabhan, CQG 19 (2002) 5387 [arXiv:gr-qc/0204019]

静的球対称なホライズンを考える。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

ホライズンが $f(r)$ のゼロ点 $r=a$ にあるとする。
$\Rightarrow$ ユークリッド時間の周期性から温度は

$$k_B T = \frac{f'(a)}{4\pi}$$

一方、アインシュタイン方程式より

$$1 - f - rf'(r) = -8\pi G P r^2, \qquad P \equiv T_r^r \ \textbf{(radial pressure)}$$

これに $r=a$ を入れると

$$\frac{1}{2G}[f'(a)a - 1] = 4\pi P a^2$$

両辺に da をかける

$$\frac{1}{2G} f'(a) a da - \frac{1}{2G} da = P(4\pi a^2 da)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f'(a)}{4\pi}}_{k_B T} \underbrace{\frac{1}{4G} d(4\pi a^2)}_{dS} \underbrace{-\frac{1}{2G} da}_{-dE} = \underbrace{P\, d\left(\frac{4\pi}{3} a^3\right)}_{dV}$$

これは熱力学第１法則！

逆に、この法則を用いてエントロピーなどの表式を得ることができる。
e.g. Hořava gravity

これはアインシュタイン理論の静的球対称解だけに限らない universal な結果！

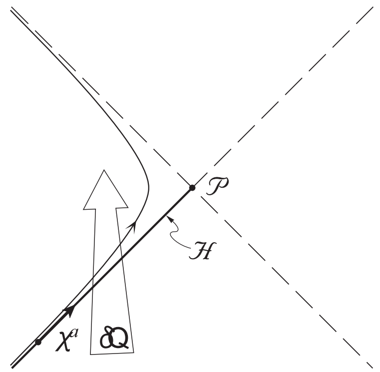
軸対称、時間依存ホライズン解 (Kothawaha, Sarkar, Padmanabhan 2006-2007)
Dynamical apparent horizon (Friedmann eq. for Einstein, GB, Lovelock) (Akbar-Cai 2006, Gong-Wang 2007)
Lovelock gravity (Kothawaha, Padmanabhan 2009)
BTZ black hole (Akbar 2007)
さらに Horăva gravity **でも成り立つ** (Cai, Ohta 2009)!

逆は出るのか？

4 熱力学 ⇒ アインシュタイン方程式

1995 T. Jacobson

$$\delta Q = T dS$$



local Rindler horizon

を考える。
ホライズンとなっている壁を考える。簡単のため一様加速を受けている観測者を考える。
壁を通って流れるエネルギー ⇒ 熱の流れ
エントロピーはホライズンの面積に比例する
温度は？
エントロピーは量子場の真空の揺らぎによって生じる＝ 一様加速を受けた観測者から見ると、熱力学的な性質を持つ(Unruh)

等価原理により、各時空点の近傍は平坦なミンコフスキー空間としてよい。
χ^a**: Killing field generating boost orthogonal to** $\mathcal{P}$
軌跡

$$t = \frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa\tau), \quad x = \frac{1}{\kappa}\cosh(\kappa\tau)$$

加速度 $\kappa \Rightarrow$ **温度** $T = \frac{\kappa}{2\pi}$

加速度 κ **が大きな極限を考える**

接ベクトル： $\chi^a = (\cosh(\kappa\tau), -\sinh(\kappa\tau) \sim -\kappa\lambda k^a$

ただし、$k^a = (1,1)$ **は光錘ベクトル**

$$\delta Q = \int_{\mathcal{H}} T_{ab}\chi^a d\Sigma^b$$

ここで λ **はアフィンパラメーター、** $d\Sigma^b = k^b d\lambda dA$ **(**A **はホライズンの面積)**

$$\delta Q = -\int_{\mathcal{H}} T_{ab}\kappa\lambda k^a k^b d\lambda dA$$

一方、エントロピーはホライズン面積 A **で** $S = \frac{A}{4G}$ **で与えられるとすれば**

$$dS = \frac{\delta A}{4G}$$

ただし

$$\delta A = \int_{\mathcal{H}} \theta d\lambda dA$$

θ: expansion of the horizon generator (ホライズンで0になり、そこ以外でどのくらい広がっているかを与える)

$$\textbf{Raychaudhuri eq.:} \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 - R_{ab}k^a k^b$$

σ^2 はshearの2乗

系が熱平衡にあると仮定 $\Rightarrow \quad \theta = \sigma = 0$ **at** $\mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx -\lambda R_{ab}k^a k^b$

$$\therefore \delta A = -\int_{\mathcal{H}} \lambda R_{ab} \lambda k^a k^b d\lambda dA$$

これらを $\delta Q = TdS$ **に代入**

$$-\kappa \int_{\mathcal{H}} \lambda T_{ab} \lambda k^a k^b d\lambda dA = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{-1}{4G}\int_{\mathcal{H}} \lambda R_{ab} \lambda k^a k^b d\lambda dA$$

これが$\mathcal{P}$近傍の微少領域で成り立つとすれば

$$T_{ab}k^a k^b = \frac{1}{8\pi G} R_{ab}k^a k^b$$

これがすべてのnull ベクトルk^aに対して成り立つとすれば

$$R_{ab} + f g_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

を得る。さらに右辺のエネルギー運動量の保存則を要求し、Bianchi 恒等式 $R_{ab}{}^{b} = \frac{1}{2}R_{;a}$ を使うと

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

を得る。宇宙項も許されることに注意せよ。

2002 Frolov and Kofman

In the context of slow-roll cosmology (quasi-de Sitter), thermodynamic relation reproduces the Friedmann equation.

Typical argument (Cai and S.P. Kim 2005)

$(n+1)$ **次元 FLRW 宇宙を考える**

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2\right) \equiv h_{ab}dx^a dx^b + \tilde{r}^2 d\Omega_{n-1}^2$$

dynamical apparent horizon

$$h^{ab}\partial_a \tilde{r}\partial_b \tilde{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{r}_A = 1/\sqrt{H^2 + k/a^2}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

完全流体が存在している場合にホライズンを通しての熱の流入などを評価する

$$\delta Q = (\rho + p) H A \tilde{r}_A dt$$

一方 $T = 1/2\pi \tilde{r}_A, S = A/4G$ **より**

$$TdS = \frac{n-1}{8\pi G \tilde{r}_A^2} A d\tilde{r}_A \Rightarrow H\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{n(n-1)}\dot{\rho} \Rightarrow H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{16\pi G}{n(n-1)}\rho$$

$\dot{\rho} + nH(\rho + p) = 0$ **も使った。**

この議論は、他の理論に対しても適用できる (Cai, Cao, Hu 2008)。

$$S = \frac{A}{4G} + \alpha \ln \frac{A}{4G} \ \Rightarrow\ H^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\alpha G}{2\pi}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)^2 = \frac{16\pi G}{n(n-1)}\rho$$

$$S = \frac{A}{4G} + \alpha \ln \frac{A}{4G} + \beta \frac{4G}{A} \ \Rightarrow\ H^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\alpha G}{2\pi}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)^2 - \frac{\beta G^2}{3\pi^2}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)^3 = \frac{16\pi G}{n(n-1)}\rho$$

より一般に

$$S = f(x), \quad x = \frac{A}{4G} \quad \Rightarrow \quad \frac{16\pi G}{n(n-1)}\rho = -\frac{\pi}{G}\int \frac{f'}{x^2} dx$$

scalar-tensor theory, $f(R)$ gravity (Akbar-Cai 2006).

熱力学は、重力理論の本質をとらえているのかも。

2008 Padmanabhan

"Entropy maximization principle"

$$S=-4\int d^Dx\sqrt{-g}P_{ab}{}^{cd}\nabla_c k^a\nabla_d k^b+\int d^Dx\sqrt{-g}T_{ab}k^ak^b$$

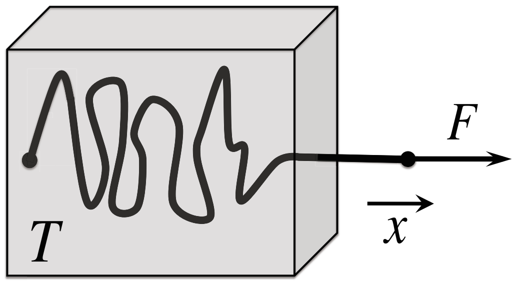
$P_a{}^{bcd}=\frac{\partial L(R^a{}_{bcd},g_{ab})}{\partial R^a{}_{bcd}}$, $L(R^a{}_{bcd},g_{ab})$ **は適当なスカラー量、** k^a **はnull vector。**
k^a **に関して変分する (計量に関する微分ではない！)** $\Rightarrow$ **場の方程式は再現される。**
宇宙項も「積分定数」として入ってくる。（アインシュタイン-ヒルベルト作用では、手で入れないといけない。）
Jacobsonの議論を変分原理として定式化したもの。
重力のエントロピー（第１項）は、

エネルギー等分配則: $E=\frac{1}{2}k_BTN;\quad$ **holographic principle** $:N=\frac{A}{G}=4S$

と、timelike Killing vectorがあるときの保存エネルギーから導く。（このプロセスでは作用を仮定。）

5 Emergent spacetime and gravity

2010 E. Verlinde
重力はentropic forceと思える！
entropic forceとは？
久保亮五：「ゴム弾性」（裳華房、1996)



すべての状態が同等に実現する場合、エントロピー $S(E,x) = k_B \ln \Omega(E,x)$ が大きくなるような状態が実現⇒ それが力の原因
系全体のエントロピーが増大するわけではない！

１つの模型：
長さが a の鎖が、全体で n あり、右向きに伸びているものが n_+、左向きに伸びているものが n_- あるとする。$n = n_+ + n_-$。両端の距離は $x = (n_+ - n_-)a$。配列の総数は $W = \frac{n!}{n_+! n_-!}$。スターリングの公式から

$$S = k \ln W = k(n \ln n - n_+ \ln n_+ - n_- \ln n_-)$$

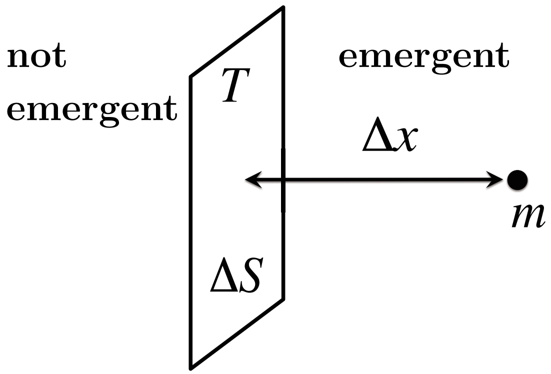
この鎖が外界と熱平衡にあって、要素はブラウン運動をして伸びたり折れた

りしているとすると、これを同じ長さに保つための力は、$n_\pm = \frac{na \pm x}{2a}$ により

$$F = -kT \frac{\partial \ln W}{\partial x} = \frac{kT}{2a} \ln \frac{na+x}{na-x} \simeq \frac{kT}{na^2} x \quad \left(\textbf{cf.}\ \ p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \right)$$

力が温度に比例していることは、これが熱力学的な力であることを示す。(気体分子運動論)

Verlinde



時間の存在と時間並進不変性は仮定$\Rightarrow$ エネルギーの定義
平坦な空間に holographic　screen を考える。このscreen に近づく粒子を考える。
コンプトン波長程度近づけば、screen 上のエントロピーに影響。

境界上の情報に関連したエントロピーの変化

$$\Delta S = 2\pi m \Delta x$$

$\because$ **粒子をいくつかに分けても同じ公式$\Rightarrow$ 質量 m に比例**
$\Delta x = 1/m$ **のとき** $\Delta S = 2\pi$

entropic force

$$F\Delta x = T\Delta S$$

力が働くと加速度が生じるが、それは温度として観測される

$$k_B T = \frac{a}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad F = ma\text{:}$$ **Newton の運動の法則**

面が球面とする。holographic principle により、情報量は

$$N = \frac{A}{G}$$

エネルギー等分配則

$$E = \frac{N}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad F = G\frac{Mm}{R^2}$$ **Newton's law of gravitation!**

Entropic force による Friedmann 方程式

これを FLRW 宇宙で考える

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2),$$

以上を組み合わせると

$$E = \frac{4\pi a^3 r^3}{3}\rho = \frac{A}{2G}T = \frac{4\pi a^2(t) r^2}{2G}\cdot\frac{-\ddot{a}r}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a$$

これは本質的に非相対論的方程式。

ニュートン重力による Friedmann 方程式

原点から $R(t)$ の半径の球を考え、そこにある質量 m の粒子は、球の内部にある質量だけから力を受けるとする。運動方程式は

$$m\ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{4\pi}{3}Gm\frac{M}{(4\pi/3)R^3}R \quad \Rightarrow \quad \therefore \ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho a$$

$\Leftrightarrow$ **相対論** $: \ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho+3p)a :$ $\quad (T_{\mu\nu} \to T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T$ **とすればよい**$)$

Note:

熱力学第 1 法則を使った導出を利用した「導出」(Shu-Gong, Zhang-Gong-Zhu) があるが、これを Hořava 理論に使うとおかしな結果が出るので正しくない？(Wei et al.)

また $TdS = M$ から得られるのは、$H\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{n(n-1)}\dot{\rho}$ で、何も考えずに積分すると宇宙定数が積分定数として出る。

エネルギー等分配則の一般化 $\Rightarrow$ Debye 模型
宇宙の加速膨張が説明できるとの主張 (Gao)。上の意味で宇宙項に相当するものが入っている。

Emergent space

加速度はエントロピーの勾配になっている。$\Rightarrow$ 加速度を potential の勾配 $a = -\nabla\Phi$ と書く。

物質分布があるとき、その系の持つエントロピーがあり、エントロピーが物質分布の位置の関数として変化していると entropic force が生じる。物質分布を粗視化する変数としてエントロピー、あるいは Φ（ニュートンポテンシャル）を考え、その変化する方向が空間。(holographic screen は等ポテンシャル面）

すなわち粒子の存在の情報が、時空を生む。（ゲージ理論による重力の記述とつながる）

一般相対論が導出できるか？

timelike Killing vector ξ^a が存在する静的時空に限定

$$\textbf{Newton potential} : \phi = \frac{1}{2}\log(-\xi^a\xi_a)$$

$$\textbf{local temperature} : T = \frac{N^b\nabla_b\phi}{2\pi}$$

$$\textbf{エネルギー等分配則} : M = \frac{1}{2}\int_S TdN = \frac{1}{2}\int_S T\frac{dA}{G}$$

右辺はKomar massとして知られているもので、Killing vectorの性質を通して曲率で表せる。左辺を物質のエネルギー運動量テンソルで表せば、スクリーンの法ベクトルn^aを用いて (Wald's book)

$$2\int_\Sigma \left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right)n^a\xi^b dV = \frac{1}{4\pi G}\int_\Sigma R_{ab}n^a\xi^b dV, \qquad (\partial\Sigma = S)$$

アインシュタイン方程式が得られる。

今のところこのアプローチを一般的なdymanicalな場合にまで拡張することは難しい。

6 Discussions

Summary:

- ブラックホールは熱力学的諸量を持ち、これらは通常の熱力学の法則に従う。
- これらは AdS/CFT 対応を通じて、場の理論の非摂動的性質を調べるのに有用である。
- ホライズン上でアインシュタイン方程式を考えると、一般に熱力学第 1 法則が得られる。逆にそれを利用して、エントロピーや質量の定義ができる。
- 逆に熱力学第 1 法則から、アインシュタイン方程式を導くことができる。
- ホログラフィー原理と加えあわせると、空間が emerge。
- ニュートン重力は entropic force として理解できる。

一般相対論は基本的ではなく、量子化の必要はない？
一般相対論の背後にある基本的な理論は何か？
それを量子論として扱うと、時空の特異点などは扱えるのか？
(matrix big bang)