

# Exact Results in 3D Gauge Theories and M2-branes

京都大学基礎物理学研究所 細道和夫

E-mail: hosomiti@yukawa.kyoto-u.ac.jp

最近、局所化公式を用いて ABJM 模型をはじめ多数の M2-brane の系の模型の物理量が厳密に導かれている。この方面の最近の進展の中からいくつかのトピックを解説する。

## 1 序

M2-brane は M5-brane とともに、11 次元量子重力理論 = M-theory の基本的な力学的自由度である。11 次元超重力理論には計量、重力微子にくわえて 3 階反対称テンソルゲージ場が存在するが、M2-brane はこの電氣的源となる  $2+1$  次元物体である。

M2-brane は、何枚も重ねて配置されると  $AdS_4$  の計量を生じるという性質があり、従ってこれを用いて AdS/CFT 対応の例を構成出来ると期待される。この動機に基づく 3 次元超共形場理論の研究は、2007 年から 2008 年にいわゆる BLG 模型 [1] や ABJM 模型 [2] などの高い超対称性をもった Chern-Simons-matter 理論が発見されたのを契機として始まった。以下ではこれらの理論の中でもっとも標準的な ABJM 模型をとり、最近の理論的進展を紹介することにする。

**ABJM 模型** ABJM 模型は以下のオービフォルド  $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$  上の  $N$  枚の M2-brane の運動を記述する 3 次元  $\mathcal{N} = 6$  超対称ゲージ理論である。

$$\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k \equiv \{(z_1, z_2, z_3, z_4)\} / \{(z_\alpha) \sim (e^{\frac{2\pi i}{k}} z_\alpha)\}. \quad (1)$$

AdS/CFT 対応から、この模型は  $AdS_4 \times (S^7/\mathbb{Z}_k)$  上の 11 次元超重力理論と双対であると予想される。ここで  $S^7$  を  $\mathbb{CP}^3$  上の  $S^1$  束と見なして、ファイバー  $S^1$  を「M 理論の  $S^1$ 」と同定すると、オービフォルドはこの  $S^1$  の半径を  $1/k$  倍にするので、 $k$  を大きくすると M 理論から IIA 超弦理論の弱結合に向かう。

**自由エネルギーとそのスケールリング則** ABJM 模型は  $N \times N$  の行列を基本変数とする場の理論であるため、弱結合領域では理論の力学的自由度の数は  $\mathcal{O}(N^2)$  のスケールリング則に従う。いっぽう AdS/CFT 対応を仮定すると、強結合領域における自由度の数は  $\mathcal{O}(N^{3/2})$  のスケールリング則に従う。これをまず復習してみる。

理論の力学的自由度の数を計る物理量としては、自由エネルギー（分配関数の対数）を考える。ここではゲージ理論が強結合となり重力双対理論の古典近似が有効となるパラメータ領域をとり、古典重力理論の作用を  $AdS_4$  背景の上で評価して自由エネルギーを求める。 $AdS_4$  に漸近する任意の古典的な計量

$$ds^2 = G_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = \frac{L^2}{u^2} \left( du^2 + g_{ij}(u, x) dx^i dx^j \right) \quad (2)$$

に対して、Einstein-Hilbert 項と宇宙項、外曲率テンソルの対角和に比例する表面項 ( Gibbons-Hawking 項 ) の和から自由エネルギーを定めると、素朴には無限大となる。そこで作用の定義域を  $u \geq \epsilon$  と正則化し、さらに発散の相殺項として境界上の誘導計量  $\gamma_{ij}$  の適当な局所汎関数を加える。その結果、 $S^3$  を境界にもつ Euclid 版  $AdS_4$  においては自由エネルギーは以下ようになる。

$$S_{\text{cl}} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{u \geq \epsilon} d^4 \xi \sqrt{G} (R(G) + 6L^{-2}) - \frac{1}{8\pi G_N} \int_{u=\epsilon} d^3 x \sqrt{\gamma} K + \frac{1}{16\pi G_N L} \int_{u=\epsilon} d^3 x \sqrt{\gamma} \{4 + 6R(\gamma)\} = \frac{\pi L^2}{2G_N}. \quad (3)$$

$N$  枚の M2-brane を表す 11 次元超重力理論の古典解は、地平線近傍では

$$ds^2 = L^2 \left( \frac{1}{4} ds(AdS_4)^2 + ds(S^7/\mathbb{Z}_k)^2 \right), \\ F_4 = \frac{3}{8} L^3 d\text{vol}(AdS_4), \quad *F_4 = 6L^6 d\text{vol}(S^7/\mathbb{Z}_k). \quad (4)$$

で与えられる。ただし brane の枚数  $N$  とサイズ  $L$  は以下の関係にある。

$$16\pi G_{11} = \frac{1}{2\pi} (2\pi\ell_p)^9, \quad (2\pi\ell_p)^6 N = 6L^6 \text{Vol}(S^7/\mathbb{Z}_k).$$

この解を 4 次元に次元削減して公式 (3) を用いると、 $N$  枚の M2-brane の系の自由エネルギーは以下のように求まる。

$$F \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{3} k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}}. \quad (5)$$

自由エネルギーの  $\mathcal{O}(N^{3/2})$  スケーリング則をゲージ理論で再現するには強結合領域の解析が必要になり、難しい問題と考えられてきた。ところが球面上の分配関数の厳密解析に関する最近の進展によって、Drukker ら [4] によってこの問題が解かれた。以下ではこの著しい結果を解説する。

## 2 ABJM 模型のおさらい

**IIB brane 構成** まず [2] に従い、type IIB 超弦理論の brane の配位から出発して  $N$  枚の M2-brane の系に到る道筋を思い出そう。10 次元平坦時空をとり  $x_6$  を周期  $2\pi R$  にコンパクト化して、 $N$  枚の D3-brane (0126) を巻きつける。記法 (0126) は brane が  $x_0, x_1, x_2, x_6$  軸の方向に伸びているという意味であり、以下でも用いる。次いで  $x_6 = 0$  および  $\pi R$  に各 1 枚ずつ NS5-brane(012345) をおき、D3-brane と図 1 左のように交差する状況を考える。

さらに 1 枚の NS5-brane を  $k$  枚の D5-brane (012349) と結合させて  $(1, k)5$ -brane とし、これを  $(x_3, x_7)$  平面および  $(x_4, x_8)$  平面を回転面とする方向にもそれぞれ傾け、結果 3 次元  $\mathcal{N} = 3$  の超対称性を保つようにする ( 図 1 右 )。最後に低エネルギー極限  $R \rightarrow 0$  をとり M-theory 双対に移ると、2 種類の KK モノポールの交差する背景  $\simeq \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$  にある  $N$  枚の M2-brane を得る。

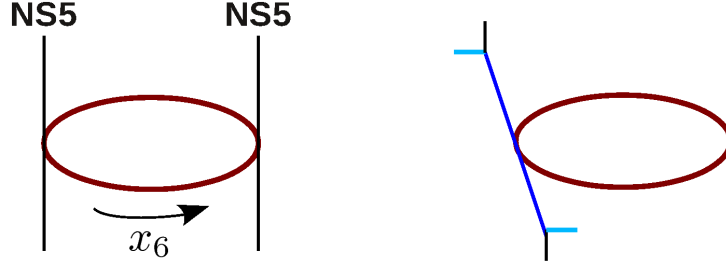


Figure 1: type IIB brane 構成を用いた ABJM 模型の導出。

超空間を用いた記述 後の節での便利のために、ABJM 模型のラグランジアンを 3 次元  $\mathcal{N} = 2$  の超場形式を用いて書いておく。この形式は 4 次元の  $\mathcal{N} = 1$  超場形式の次元削減であり、物質多重項はカイラル超場 ( 記号  $X, Y, \Phi$  など )、ゲージ多重項は実超場 (  $V, \tilde{V}$  など ) で表される。3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称な理論の超対称多重項にはベクトル多重項、ハイパー多重項があり、前者は実超場とカイラル超場の対 (  $V, \Phi$  )、後者はゲージ群の互いに複素共役な表現に属する 1 対のカイラル超場 (  $X, Y$  ) で表される。

前の段落では type IIB 超弦理論の D3-NS5brane の系から出発した。この系の D3-brane の世界体積上には 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論が実現されている。NS5-brane に仕切られた 2 つの区間にある  $N$  枚の D3-brane は  $U(N) \times U(N)$  をゲージ群とする  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項 (  $V, \Phi$  ), (  $\tilde{V}, \tilde{\Phi}$  ) を生じ、NS5-brane をまたいで 2 つの区間の D3-brane をつなぐ開いた弦から  $U(N) \times U(N)$  の双基本表現に属するハイパー多重項 (  $X_1, Y_1$  ), (  $X_2, Y_2$  ) が現れる。この系のラグランジアンは超場形式で

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{N}=4} = & - \int d^4\theta \text{Tr} \left( \bar{X}_a e^{2V} X_a e^{-2\tilde{V}} + \bar{Y}_a e^{2\tilde{V}} Y_a e^{-2V} \right) \\ & - \sqrt{2} \int d^2\theta \text{Tr} \left( Y_a \Phi X_a + X_a \tilde{\Phi} Y_a \right) + \text{h.c.} \\ & + \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \mathcal{L}_{\text{YM4}}[V, \Phi] + \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \mathcal{L}_{\text{YM4}}[\tilde{V}, \tilde{\Phi}], \end{aligned} \quad (6)$$

と書ける。ただし  $\mathcal{L}_{\text{YM4}}[V, \Phi]$  は  $\mathcal{N} = 4$  超対称 Yang-Mills ( YM ) 理論のラグランジアンである。

$$\mathcal{L}_{\text{YM4}}[V, \Phi] = \frac{1}{4} \int d^2\theta \text{Tr} (W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} - \int d^4\theta \text{Tr} (\bar{\Phi} e^{2V} \Phi e^{-2V}). \quad (7)$$

次に一方の NS5-brane に  $k$  単位の D5-brane 電荷を与え  $\mathcal{N} = 3$  超対称性を保つよう傾けた。この操作は  $\mathcal{N} = 3$  超対称性を保つ Chern-Simons ( CS ) 項を係数  $k$  で作用に加える操作に相当する。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{N}=4} + k \mathcal{L}_{\text{CS3}}[V, \Phi] - k \mathcal{L}_{\text{CS3}}[\tilde{V}, \tilde{\Phi}]. \quad (8)$$

ここで  $\mathcal{L}_{\text{CS3}}[V, \Phi]$  は実超場  $V$  の  $\mathcal{N} = 2$  CS 項と  $\Phi$  の 2 次の superpotential 項からなる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{CS3}}[V, \Phi] &= \mathcal{L}_{\text{CS2}}[V] - \frac{i}{4\pi} \int d^2\theta \text{Tr} \Phi^2 + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{\text{CS2}}[V] &= \frac{1}{4\pi} \text{Tr} \left[ \varepsilon^{mnp} (A_m \partial_n A_p - \frac{2i}{3} A_m A_n A_p) + 2\sigma D - 2i\bar{\lambda}\lambda \right].\end{aligned}\quad (9)$$

この作用の低エネルギー極限は質量次元をもつ YM 結合定数を無限大にとって得られるとすると、 $\mathcal{L}_{\text{YM4}}$  項は消滅してカイラル超場  $\Phi, \tilde{\Phi}$  は補助場となる。これを積分除外して、最終的に  $\mathcal{N} = 2$  超場形式で書かれた ABJM 模型の作用を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ABJM}} &= k\mathcal{L}_{\text{CS2}}[V] - k\mathcal{L}_{\text{CS2}}[\tilde{V}] - \int d^4\theta \text{Tr} \left( \bar{X}_a e^{2V} X_a e^{-2\tilde{V}} + \bar{Y}_a e^{2\tilde{V}} Y_a e^{-2V} \right) \\ &\quad - \frac{2\pi i}{k} \int d^2\theta \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \text{Tr} (X_a Y_c X_b Y_d) + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (10)$$

**ABJ 模型** 今までは  $x_6$  方向に巻きついた  $N$  枚の D3-brane が 5-brane によって 2 つの区間に分けられる状況を議論してきた。この拡張として、2 つの区間にある D3-brane の数が異なる場合を考えると、 $U(N+n)_k \times U(N)_{-k}$  CS ゲージ場と双基本表現の物質場からなる理論が得られる。これは ABJ 模型 [3] と呼ばれ、 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$  を運動する  $N$  枚の M2-brane に加えてオービフォルド固定点に  $n$  枚の fractional M2-brane が束縛された系の理論と同定されている。

### 3 3-球面上の理論の厳密解析

Euclid 化された 3 次元超対称ゲージ理論の 3-球面上の分配関数は、局所化原理を適用すると行列積分に帰着できることが Kapustin らによって示された [5]。この手法はのちに Jafferis [6] および Hama ら [7] によって拡張され、任意の 3 次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論に適用できる公式が確立した。球面上の理論の解析および局所化原理を適用するというアイデアは、Pestun による 4 次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論の解析と同じである。次元が 1 低くインスタントンの寄与もないため、3 次元での計算は 4 次元に比べてはるかに簡単になる。ここではその厳密公式の導出を解説する。

**Killing スピノル** 3-球面に限らず一般に曲がった空間の上に大域的超対称な理論を定義できるためには、その空間の上で次の Killing スピノル方程式が解を持つことが必要である。

$$D_m \varepsilon \equiv \left( \partial_m + \frac{1}{4} \omega_m^{ab} \gamma^{ab} \right) \varepsilon = \gamma_m \tilde{\varepsilon} \quad \text{for some } \tilde{\varepsilon}.\quad (11)$$

半径  $\ell$  の丸い球面上には、

$$D_m \varepsilon = \pm \frac{i}{2\ell} \gamma_m \varepsilon\quad (12)$$

なる Killing スピノルが、正負の符号それぞれに対し 2 個ずつ、合計 4 つ存在する。これを用いて 3-球面上の超対称な場の理論を構成する。

Killing spinor 方程式は  $S^2 \times \mathbb{R}$  上でも解を持ち、これを用いて 3 次元の超共形指数を与える経路積分を定義し、局所化原理を適用して解析することができる。この方法は Kim[8] によって ABJM 模型に適用され、より一般のゲージ理論への応用が Imamura ら [9] により与えられている。

**3-球面上の超対称ゲージ理論** 曲がった空間上に超対称な場の理論を構成するには、まず平坦空間上の理論を一般座標共変に書き直す。次いで球面上での SUSY 変換則が閉じた対称性代数をなすよう、またラグランジアンが不変であるよう、作用と変換則を  $\mathcal{O}(\ell^{-1}), \mathcal{O}(\ell^{-2})$  の項で修正して行く。このようにして球面上の 3 次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論を求めると、ベクトル場  $A_m$ 、実スカラー場  $\sigma$ 、フェルミオン  $\lambda, \bar{\lambda}$ 、補助場  $D$  からなるベクトル多重項の変換則は以下のとおり、

$$\begin{aligned}\delta A_m &= -\frac{i}{2}(\bar{\epsilon}\gamma_m\lambda - \bar{\lambda}\gamma_m\epsilon), \\ \delta\sigma &= \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}\lambda - \bar{\lambda}\epsilon), \\ \delta\lambda &= \frac{1}{2}\gamma^{mn}\epsilon F_{mn} - D\epsilon + i\gamma^m\epsilon D_m\sigma + \frac{2i}{3}\sigma\gamma^m D_m\epsilon, \\ \delta\bar{\lambda} &= \frac{1}{2}\gamma^{mn}\bar{\epsilon}F_{mn} + D\bar{\epsilon} - i\gamma^m\bar{\epsilon}D_m\sigma - \frac{2i}{3}\sigma\gamma^m D_m\bar{\epsilon}, \\ \delta D &= -\frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^m D_m\lambda - \frac{i}{2}D_m\bar{\lambda}\gamma^m\epsilon + \frac{i}{2}[\bar{\epsilon}\lambda, \sigma] + \frac{i}{2}[\bar{\lambda}\epsilon, \sigma] - \frac{i}{6}(D_m\bar{\epsilon}\gamma^m\lambda + \bar{\lambda}\gamma^m D_m\epsilon),\end{aligned}\quad (13)$$

複素スカラー  $\phi$ 、フェルミオン  $\psi$ 、補助場  $F$  からなる、ゲージ場に結合した R 電荷  $q$  のカイラル多重項の変換則は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \bar{\epsilon}\psi, \\ \delta\psi &= i\gamma^m\epsilon D_m\phi + i\epsilon\sigma\phi + \frac{2qi}{3}\gamma^m D_m\epsilon\phi + \bar{\epsilon}F, \\ \delta F &= \epsilon(i\gamma^m D_m\psi - i\sigma\psi - i\lambda\phi) + \frac{i}{3}(2q-1)D_m\epsilon\gamma^m\psi.\end{aligned}\quad (14)$$

ここで  $D_m$  は一般共変およびゲージ共変な共変微分である。このもとで不変なラグランジアンは CS 項  $\mathcal{L}_{\text{CS}}$ 、YM 項  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  および物質場の運動項  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$  などがある。

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \text{Tr}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{mnp}(A_m\partial_n A_p - \frac{2i}{3}A_m A_n A_p) - \bar{\lambda}\lambda + 2D\sigma\right],\quad (15)$$

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \text{Tr}\left[\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{2}D_m\sigma D^m\sigma + \frac{1}{2}(D + \frac{\sigma}{\ell})^2 + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\gamma^m D_m\lambda + \frac{i}{2}\bar{\lambda}[\sigma, \lambda] - \frac{1}{4\ell}\bar{\lambda}\lambda\right],\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mat}} &= D_m\bar{\phi}D^m\phi + \bar{\phi}\sigma^2\phi + \frac{i(2q-1)}{\ell}\bar{\phi}\sigma\phi + \frac{q(2-q)}{\ell^2}\bar{\phi}\phi + i\bar{\phi}D\phi + \bar{F}F \\ &\quad - i\bar{\psi}\gamma^m D_m\psi + i\bar{\psi}\sigma\psi - \frac{(2q-1)}{2\ell}\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\lambda\phi - i\bar{\phi}\bar{\lambda}\psi.\end{aligned}\quad (17)$$

その他の SUSY 不変量については [7] などを参照のこと。

$\mathcal{L}_{\text{YM}}$  および  $q \neq 1/2$  の場合の  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$  は、 $D_m\epsilon = +\frac{i}{2\ell}\gamma_m\epsilon$  に従う SUSY 変換でのみ不変である。これは超対称であるが超共形でない理論を球面に載せたことによる。また、 $\mathcal{L}_{\text{YM}}, \mathcal{L}_{\text{mat}}$  はどのよ

うな SUSY を選んでも、そのもとで完全であることが示せる。実際  $\epsilon, \bar{\epsilon}$  を Grassmann 偶な任意の Killing スピノルの対とすると、以下が示せる。

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}\epsilon \cdot \mathcal{L}_{\text{mat}} &= \delta_{\bar{\epsilon}}\delta_{\epsilon}\left(\bar{\psi}\psi - 2i\bar{\phi}\sigma\phi + \frac{2(q-1)}{\ell}\bar{\phi}\phi\right), \\ \bar{\epsilon}\epsilon \cdot \mathcal{L}_{\text{YM}} &= \delta_{\bar{\epsilon}}\delta_{\epsilon}\text{Tr}\left(\frac{1}{2}\bar{\lambda}\lambda - 2D\sigma\right).\end{aligned}\tag{18}$$

局所化原理 上の作用で定義される球面上の理論の経路積分によって分配関数を定義する。この経路積分は局所化原理を用いると有限次元積分に帰着することが示せる。

一般に超対称性のある経路積分においては、非零の積分値は「鞍点」つまり理論の全てのフェルミオンの SUSY 変分が零になるような、ボソンの配位に局所化する。球面上の  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論の経路積分にこれを適用すると、 $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  は ( 何らかのフェルミオンの SUSY 変分と書けるので ) 鞍点上では零である。従って鞍点上では

$$F_{mn} = D_m\sigma = D + \frac{\sigma}{\ell} = 0\tag{19}$$

である。ゲージ対称性を用いて鞍点上では  $A_m = 0$ ,  $D = -\sigma/\ell$  かつ  $\sigma$  は定数となり、この  $\sigma$  の定数値が鞍点のラベルとなる。同様の考察を物質場についても行うと、鞍点上で  $\phi = F = 0$  が示せる。

鞍点多様体に垂直な方向のモード ( 直交モード ) の積分を安全に正則化するために、分配関数の値を変えない理論の変形  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + t_1\mathcal{L}_{\text{YM}} + t_2\mathcal{L}_{\text{mat}}$  を行う。 $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$  の完全性から分配関数の値は  $t_1, t_2$  の値によらない。そこで  $t_1, t_2$  を大きくとると、 $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$  を直交モードの 2 次までで近似した Gauss 積分が厳密となり、積分値は対応する波動演算子の行列式 ( 1-ループ行列式 ) で与えられる。また 3 次以上の superpotential は鞍点近似に影響し得ないので、分配関数は superpotential の関数形には依存しない。

分配関数の行列積分公式 まとめると、分配関数は Lie 代数値の変数  $\sigma$  に関する以下のような積分に帰着する。

$$Z = \int [d\sigma] \exp(-S_{\text{cl}}) \times \left( \frac{\det\Delta_{\text{fermions}}}{\det\Delta_{\text{bosons}}} \right),\tag{20}$$

$S_{\text{cl}}$  は理論の元々の作用の鞍点上での値で、例えばレベル  $k$  の CS 項は鞍点上で  $-S_{\text{cl}} = i\pi k(\ell\sigma)^2$  の寄与をする。積分測度と 1-ループ行列式は理論に登場する多重項ごとの寄与に分けて評価できる。簡単のため  $2\pi\ell = 1$  と固定すると、ゲージ対称性  $G$  のベクトル多重項の寄与は

$$\frac{1}{|\mathcal{W}|} \int d^r\sigma \prod_{\alpha \in \Delta_+} \left( 2 \sinh \frac{\alpha \cdot \sigma}{2} \right)^2\tag{21}$$

となる。ただし  $\mathcal{W}$  は  $G$  の Weyl 群、 $r$  は階数、 $\alpha \in \Delta_+$  は正ルートである。またゲージ対称性を用いて積分変数  $\sigma$  を Cartan 部分代数値にさらに制限した。ゲージ群の表現  $R$  に属する  $U(1)_R$  電

荷  $q$  のカイラル多重項は、被積分関数に次の寄与をする。

$$\prod_{\rho \in R} s_{b=1}(i - iq - \rho \cdot \sigma), \quad s_b(x) \equiv \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m + \frac{1}{2})b + (n + \frac{1}{2})b^{-1} - ix}{(m + \frac{1}{2})b + (n + \frac{1}{2})b^{-1} + ix}. \quad (22)$$

ただし  $\rho$  は表現  $R$  のウェイトベクトルである。

## 4 Large $N$ での ABJM 行列積分の厳密解

ABJ(M) 行列積分と種数展開 前節の公式を  $U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k}$  ABJ 模型に適用すると、分配関数は以下の  $N_1 + N_2$  次元積分で与えられる。

$$\begin{aligned} Z &= \exp \left[ -F(N_1, N_2, g_s \equiv \frac{2\pi i}{k}) \right] \\ &= \int \prod_{i=1}^{N_1} \frac{d\mu_i}{2\pi} \prod_{j=1}^{N_2} \frac{d\nu_j}{2\pi} \prod_{i < j}^{N_1} \left( 2 \sinh \frac{\mu_i - \mu_j}{2} \right)^2 \prod_{i < j}^{N_2} \left( 2 \sinh \frac{\nu_i - \nu_j}{2} \right)^2 \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=1}^{N_2} \left( 2 \cosh \frac{\mu_i - \nu_j}{2} \right)^{-2} \exp \left[ -\frac{1}{2g_s} \left( \sum_{i=1}^{N_1} \mu_i^2 - \sum_{i=1}^{N_2} \nu_i^2 \right) \right] \\ &\equiv \int \prod_{i=1}^{N_1} d\mu_i \prod_{j=1}^{N_2} d\nu_j \exp(-S(\mu, \nu)). \end{aligned} \quad (23)$$

自由エネルギーは't Hooft の議論に従って、リーマン面の種数展開に従う。

$$F(N_1, N_2, g_s) = \sum_{h \geq 0} g_s^{2h-2} f_h(t_1, t_2). \quad (24)$$

ここで  $t_i \equiv g_s N_i$  は't Hooft 結合定数である。我々の興味のある強結合極限は  $t_i$  を大きな値に固定し、 $N_i$  および  $k$  を無限大に飛ばす極限である。この極限で自由エネルギーを支配する planar 項 ( $h = 0$ ) は、上の積分の鞍点近似として評価できる。つまり

$$F \simeq g_s^{-2} f_0(t_1, t_2) = S(\mu, \nu) \Big|_{\partial_{\mu_i} S = \partial_{\nu_j} S = 0}. \quad (25)$$

以下で説明するように、large  $N$  行列模型の標準的な手法がこの問題に応用できる。

**Large  $N$  での厳密解法** さて、 $N_1 + N_2$  個の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\mu_i}{g_s} &= \sum_{j \neq i} \coth \frac{\mu_i - \mu_j}{2} - \sum_j \tanh \frac{\mu_i - \nu_j}{2}, \\ -\frac{\nu_i}{g_s} &= \sum_{j \neq i} \coth \frac{\nu_i - \nu_j}{2} - \sum_j \tanh \frac{\nu_i - \mu_j}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

を解くことを考える。これらの式は同種の固有値の入れ替えのもとで不変なので、2種類の固有値の分布を表す関数  $\rho_1(\mu), \rho_2(\nu)$

$$\int_{C_1} d\mu \rho_1(\mu) = \int_{C_2} d\nu \rho_2(\nu) = 1 \quad (27)$$

を導入して、以下のような積分方程式に従う  $\rho_1, \rho_2$  を求める問題に書き換える。

$$\begin{aligned} \mu &= t_1 \oint d\mu' \rho_1(\mu') \coth \frac{\mu - \mu'}{2} - t_2 \int d\nu' \rho_2(\nu') \tanh \frac{\mu - \nu'}{2}, \\ -\nu &= t_2 \int d\nu' \rho_2(\nu') \coth \frac{\nu - \nu'}{2} - t_1 \oint d\mu' \rho_1(\mu') \tanh \frac{\nu - \mu'}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

ここで横棒付きの積分記号は Cauchy の主値積分を表す。また実軸上の区間  $C_1, C_2$  は2種類の固有値の分布する領域を表す。さらに解核 (resolvent) と呼ばれる複素関数  $\omega(\lambda)$  を定義する。

$$\omega(\lambda) \equiv t_1 \int_{C_1} d\mu \rho_1(\mu) \coth \frac{\lambda - \mu}{2} - t_2 \int_{C_2} d\nu \rho_2(\nu) \tanh \frac{\lambda - \nu}{2}. \quad (29)$$

解核  $\omega(\lambda)$  は周期  $2\pi i$  を持ち、 $C_1, C_2 + i\pi$  およびその周期性による像において不連続であるほかは解析的である。積分方程式を解核で書き換えた式

$$\begin{aligned} 2\mu &= \omega(\mu + i\epsilon) + \omega(\mu - i\epsilon), \quad (\mu \in C_1), \\ 2\nu &= \omega(\nu + i\pi + i\epsilon) + \omega(\nu + i\pi - i\epsilon), \quad (\nu \in C_2) \end{aligned} \quad (30)$$

は、cut における解核の不連続性を規定する。これと境界条件より、 $\omega(\lambda)$  を用いて複素平面上いたる所解析的な次の関数を構成することができる。

$$e^{t_1 - t_2} \{e^\omega + e^{2\lambda - \omega}\} = 1 + \zeta z + z^2. \quad (z = e^\lambda; \zeta \text{ は積分定数}) \quad (31)$$

これを解核について解くと以下を得る。

$$\omega(\lambda) = \log \left[ \frac{1}{2} e^{-\eta} \left\{ 1 + \zeta z + z^2 - \sqrt{(1 + \zeta z + z^2)^2 - 4e^{2\eta} z^2} \right\} \right]. \quad (\eta \equiv t_1 - t_2) \quad (32)$$

解核から自由エネルギーを読み取る planar な自由エネルギー  $f_0$  を  $t_1, t_2$  の関数として求めるには、 $t_1, t_2$  および  $f_0$  の適当な微分が全て解核の周回積分として与えられ、皆  $(\zeta, \eta)$  の関数として書けることに注意する。まず (29) から直ちに

$$t_1 = \frac{1}{4\pi i} \oint_{\alpha_1} \omega(\lambda) d\lambda, \quad t_2 = \frac{-1}{4\pi i} \oint_{\alpha_2} \omega(\lambda) d\lambda \quad (33)$$

が従う。ここで経路  $\alpha_1, \alpha_2$  の定義は図2を参照のこと。いっぽう自由エネルギー  $F$  の引数  $N_1$  を1増やすと  $t_1$  は  $g_s$  増加するが、これは  $N_1$  個の固有値  $\mu_1, \dots, \mu_{N_1}$  に新たに1つ追加する操作に対



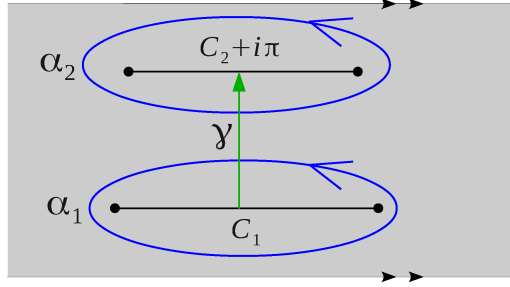


Figure 2: 複素  $\lambda$  平面の基本領域内の 2 つの cut  $C_1, C_2$  と、解核の積分経路  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ .

応する。新たな固有値を  $\mu_0$  と書くと、無限遠から cut  $C_1$  上の点  $\mu_*$  まで新たな固有値を引っ張ってくる「仕事」を素朴に

$$g_s \frac{\partial F}{\partial t_1} \stackrel{?}{=} \int_{\infty}^{\mu_*} d\mu_0 \frac{\partial S(\mu_i, \nu_j)}{\partial \mu_0} \quad (34)$$

と書けると想像できる。 $\mu_0$  以外の固有値が関数  $\rho_1(\mu), \rho_2(\nu)$  に従って分布しているとする、作用関数  $S$  の  $\mu_0$  微分は解核を用いて書け、上の素朴な式は

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_1} \stackrel{?}{=} \int_{\infty}^{\mu_*} d\lambda (\omega(\lambda) - \lambda) \quad (35)$$

となる。実際は無限遠までの積分は発散するので素朴な式は正しくないが、代わりに

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) f_0 = -i\pi(t_1 - t_2) + \int_{\gamma} d\lambda \omega(\lambda) \quad (36)$$

が成り立つ。積分路  $\gamma$  は図 2 を参照のこと。

1-形式  $\omega(\lambda)d\lambda$  は一見複雑な表式をしている。ところがこれを  $\zeta$  で微分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [d\lambda \omega(\lambda)] = \frac{-dz}{\sqrt{(1 + \zeta z + z^2)^2 - 4e^{2\eta} z^2}} \quad (37)$$

となる。分母の根号の中身は  $z$  の 4 次式であるから、これはあるトーラス上の正則 1-形式に他ならず、その周回積分は第 1 種完全楕円積分  $K(k)$  を用いて表される。

$$K(k) \equiv \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K'(k) \equiv K(\sqrt{1-k^2}). \quad (38)$$

ABJM 模型の場合 これまでの議論を  $N_1 = N_2 = N$  の ABJM 模型に適用すると、planar 自由エネルギー  $f_0$  の 't Hooft パラメータ  $\lambda \equiv N/k$  への依存性は媒介変数  $\kappa$  を用いて

$$\frac{d\lambda}{d\kappa} = \frac{1}{\pi^2} K(i\kappa), \quad \frac{d^2 f_0(\lambda)}{d^2 \lambda} = -4\pi^3 \frac{K'(i\kappa) + iK(i\kappa)}{K(i\kappa)} \quad (39)$$

のように書ける。この式から  $\kappa$  を消去すると、 $\lambda$  の非常に大きな場合 ( $\kappa \gg 1$ ) に

$$f_0(\lambda) \simeq -\frac{4\sqrt{2}}{3} \pi^3 \lambda^{3/2}, \quad F \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{3} k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}} \quad (40)$$

を示すことができ、重力双対理論の解析結果が正しく再現される [4]。

## 5 終わりに

Euclid 符号の 3 次元超対称ゲージ理論の球面上の分配関数が局所化原理を用いて行列積分に帰着できることを紹介し、その応用として ABJM 模型の自由エネルギーの  $\mathcal{O}(N^{3/2})$  スケーリング則の導出を紹介した。厳密な分配関数は 3 次元ゲージ理論を探る新しいタイプの物理量である。今後これを用いてより超対称性の少ない理論の研究が進んで行くのではないかと期待される。

また球面上の分配関数の評価を高次元に拡張したり、丸い球面以外の背景を考えるなどの拡張も非常に興味深く、今後の発展が期待される。

## References

- [1] J. Bagger and N. Lambert, Phys. Rev. D **75**, 045020 (2007); Phys. Rev. D **77**, 065008 (2008); JHEP **0802**, 105 (2008).
- [2] O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis and J. Maldacena, JHEP **0810**, 091 (2008).
- [3] O. Aharony, O. Bergman and D.L. Jafferis, JHEP **0811**, 043 (2008).
- [4] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, arXiv:1007.3837 [hep-th].
- [5] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, JHEP **1003**, 089 (2010).
- [6] D.L. Jafferis, arXiv:1012.3210 [hep-th].
- [7] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, JHEP **1103**, 127 (2011).
- [8] S. Kim, Nucl. Phys. B **821**, 241 (2009).
- [9] Y. Imamura and S. Yokoyama, Nucl. Phys. B **827**, 183 (2010); JHEP **1104**, 007 (2011).