$W_{1+\infty}$ algebra as a symmetry behind AGT relation

東京大学理学系研究科物理学専攻 菅野正一
E-mail: kanno@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

４次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論のネクラソフ分配関数と２次元共形場理論の相関関数の間の関係式、AGT 関係式は大きな関心を集め、関係式の拡張など現在でも様々な研究が行われている。その一方で、AGT 関係式自体の検証や証明はゲージ群が SU(2),SU(3) といった簡単な場合しかなされていない。一般の系での AGT 関係式の検証で困難な点として、(1)SU(N) ゲージ理論に対する共形場理論は W_N 代数で記述されるが W_N 代数は非線形代数であるため共形ブロックの計算が難しい、(2) 両者の一致を見るためには U(1) 部分を適切に補う必要があるが、クイバーゲージ理論などの複雑な系では U(1) 部分の取り方の指標がない、ことが挙げられる。

Belavin,Belavin[1] は共形場理論側で Virasoro 代数と U(1) カレントを自由ボソンで表示し、それらの適切な線形結合を取り Young 図で指定されるシューア多項式２個の積でかかれる基底を用いると共形ブロックの展開が SU(2) ゲージ理論のネクラソフ分配関数の公式の形になると予想した。この予想を拡張すると、W_N 代数と U(1) カレントを自由ボソン表示し、適切な線形結合を取り Young 図で指定されるシューア多項式 N 個でかかれる基底で共形ブロックを展開すると SU(N) ゲージ理論のネクラソフ公式の形に一致する、となる。ここで問題となるのは、適切な線形結合とは何か、なぜ U(1) カレントを含めると上手く行くのかということである。我々は、上記の点は $W_{1+\infty}$ 代数により説明できると主張した。

$W_{1+\infty}$ 代数は高階微分演算子 $z^n(z\frac{\partial}{\partial z})^m$ のなす代数の量子化で与えられる。この代数では一般に、Virasoro の L_0 固有値で表現空間を分解したとき各部分空間も無限次元になる。ここで最高ウェイトを適切に選ぶと各部分空間が有限次元になる表現を作ることができる。さらにユニタリーで中心電荷を整数 N に取ると、N 個の自由フェルミオンで表示することが可能となる。自由フェルミオン系には Young 図で指定される自然な基底が存在し、ボソン化を行うとシューア多項式の積となる。我々は、この表現では代数の自由度が W_N と U(1) に落ちており、$W_N\times$U(1) を自然に記述する自由ボソンの基底と $W_{1+\infty}$ を自然に記述する基底との間の変換式が先に述べた適切な線形結合であることを主張し、その根拠を示した。N=2 の場合に生成子の母関数を展開すると、U(1) カレントと自由ボソン表示のストレステンソルが得られ、高次の項はその２つ及びそれらの微分だけで書かれることが確かめられる。そして Virasoro$\times$U(1) を自然に記述する基底への書き換えが [1] で用いられた線形結合であることもわかる。次に N=3 において同様の手続きを行うと、 U(1) カレント、ストレステンソル、スピン３のカレントが得られ、これらが $W_3\times$U(1) の自由ボソン表示であることがわかる。この際得られた基底の変換式を用いてシューア多項式３つの積で書かれた状態で共形ブロックを展開すると、ネクラソフ公式との一致が１インスタントンで確認される。以上の結果は AGT 関係式の背後に $W_{1+\infty}$ 代数の構造があることを示唆している。

なお、本発表は松尾泰氏 (東大理)、柴正太郎氏 (KEK) との共同研究 [2] に基づく。

[1]A. Belavin and V. Belavin,Nucl. Phys. B **850**, 199 (2011)
[2]S. Kanno, Y. Matsuo and S. Shiba,Phys. Rev. D **84**, 026007 (2011)