Comments on multi-brane solutions in open string field theory

University of Tokyo, Komaba Tohru Masuda
E-mail: masuda@hep1.c.u-tokyo.ac.jp

Witten の開弦の場の理論が多重ブレーン解を持つかどうかという問題は興味深い。もともとの開弦の自由度はブレーンの集団座標を表すようなものであり、これを用いて D25-ブレーンが複数枚ある背景を記述できるとすれば不思議なことである。昨年、この問題について、Murata-Schnabl により重要な議論が与えられた。彼らは wedge state の重ねあわせで記述できる解が ある条件を満たす場合に、解の形とエネルギーの値を直接結びつける公式を導いたのである。この議論から多重ブレーン解の形が強く予想されたが、その表式には弦の場 K の逆 $\frac{1}{K}$ が含まれている。弦の場を行列と見なす half-string picture において、K はゼロ固有値を持つと考えられており、一般には逆をとることはできないものの、相関関数の中である適当な位置に置かれた場合には、問題なく定義できる可能性がある。

たとえば、次の解は二重ブレーン解の候補である;

$$\Psi = \frac{1}{K}c\frac{K^2B}{K-1}c \sim \int_0^\infty dx\int_0^\infty du e^{-u}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\,e^{Kx}cBe^{Ku} \tag{1}$$

ここで弦の場 K の逆 $\frac{1}{K}$ は $*$-積の下で関係式 $K*\frac{1}{K}=\frac{1}{K}*K=\mathcal{I}$（$\mathcal{I}$ は $*$-積の単位元）を満たす弦の場という意味で書かれているが、これには今のところ構成的な定義が無い。具体的な計算を行うため、(1) の最右辺ではとりあえず $\dfrac{1}{K}=-\lim\limits_{\Lambda\to\infty}\displaystyle\int_0^\Lambda e^{Kx}dx$ としたが、この定義ではうまくいかないことが、以下のエネルギー計算からわかる。

我々の計算の手順を説明すると、まず相関関数 $N(x,y;u,v)\equiv \mathrm{tr}[e^{xK}cBe^{uK}cQ(e^{yK}cBe^{vK})]$ の具体形を求め、(1) の最右辺の表式を使って、運動項を

$$\mathrm{tr}[\Psi Q\Psi] = \lim_{\Lambda,\Lambda'\to\infty}\int_0^\Lambda dx\int_0^{\Lambda'} dy\int_0^\infty du\int_0^\infty dv e^{-u-v}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}N(x,y;u,v) \tag{2}$$

と表し、四重積分を解析的に評価した。解が二重ブレーン解を表すものであれば、この値は $\frac{3}{\pi^2}$ となるはずである。計算の結果、積分値は有限ではあるものの、x,y 積分のカットオフに依存し、確定しないことがわかった。(x,y 積分は $\frac{1}{K}$ を表すのに使ったものであることに注意されたい。) また、同様の方法で cubic term を評価したところ、やはり結果はカットオフに依存した。つまり解自身と内積した運動方程式が満たされているとはいえないことがわかった。

そこで、$1/K$ を含む相関関数を計算するのにどのような処方を用いるべきか考察し、次のような処方に基づけば、少なくとも (1) の解について、エネルギーの値などが適切に得られることを見つけた。その処方というのは、x,y について 0 から ∞ まで積分する代わりに、x,y に関する原始関数を適当な境界条件の下で求め、その $(x,y)=(0,0)$ での値を見るというものである。この処方を用いると、二重ブレーンのエネルギーが再現され、解自身と内積した運動方程式も満たされることがわかった。(この発表は大川祐司氏との共同研究に基づくものである。)