

# ツイスター量子化における Hilbert 空間

日本大学大学院 理工学研究科 量子理工学専攻 野手 順一

E-mail: note@phys.cst.nihon-u.ac.jp

Penrose は量子重力への1つのアプローチとして1967年にツイスター理論を提唱し、その翌年にツイスター量子化とよばれるこの理論における量子化の手法を提唱した [1]。この理論をもちいると、任意のヘリシティをもつ時空上の無質量場はツイスター空間（3次元複素射影空間）上の関数（ツイスター関数）を積分変換することにより統一的に構成される。このとき構成される無質量場がどのような特異点をもつかということは、ツイスター関数をもつ特異点の種類により決定される。また、無質量場のエネルギーが正または負であるという性質は、ツイスター関数の定義域に依存しており、ツイスター空間の部分領域として幾何学的に与えられる。この理論形式においてはツイスターを演算子（ツイスター演算子）に置き換えて交換関係を設定し量子化を行う。これにより、ツイスター演算子の一部はツイスターに関する微分演算子として表現される。Penrose は、このような演算子表現の背景にある Hilbert 空間を構成するために、ツイスター関数に対して内積を定義した [1]。この定義はツイスター演算子の共役性を要請することにより決められている。しかし、この定義においてはノルムの詳細やツイスター演算子の定義域などは不明である。

このような背景のもとに本研究で我々は、明確な内積の定義を提案し、これに基づきノルムの性質と積分変換により構成される無質量場をもつ特異点の関係を調べた。詳述すると、まずツイスター演算子の固有状態を構成し、これを基底として演算子表現を求めた。このような求め方は Penrose の方法とは異なっているが結果として同一の演算子表現が得られることがわかる。次にこの固有状態表示のツイスター関数を求めて、これに対して内積を定義した。我々の内積の定義は、ツイスター演算子の共役性が成り立つこと、積分測度が共形不変であること、ツイスター関数が3次元複素射影空間上の関数であることなどの必要条件で絞り込むことにより決定されている。この定義においては、ノルムはツイスター関数をもつ特異点の種類により正値または不定値であることがわかり、各々の場合においてツイスター演算子の作用が閉じていることを確認できる。さらに、ノルムが正値であるツイスター関数から構成される正エネルギー場は特異点をもたないことがわかり、不定値の場合には特異点をもつことがわかる。このような結果から、ノルムが正値であるようなツイスター関数の集合が Hilbert 空間として適した性質をもっていると考えられる。今後の課題の一つとしては、我々が構成した Hilbert 空間に基づいてツイスター量子化の経路積分形式を構築することが挙げられる。

なお、本研究は出口真一氏（日本大学量子科学研究所）との共同研究である。

## References

- [1] R. Penrose, *Int. J. Theor. Phys.* **1**,61 (1968).  
R. Penrose, In *Quantum Gravity, an Oxford Symposium*, eds. C. J. Isham, R. Penrose and D. W. Sciama, (Oxford University Press, Oxford, 1975).