Volume of Moduli Space of Vortex Equations and Localization

明治学院大学 太田和俊
E-mail: kohta@law.meijigakuin.ac.jp

今回の講演ではヴォーテックスのモジュライ空間の体積の計算方法とその結果について報告を行った。この研究は東京女子大の坂井氏と釧路高専の三宅氏との共同研究に基づく。

我々が扱うヴォーテックスとは一般の種数 h を持つ Riemann 面 Σ_h 上の BPS 方程式

$$
\begin{aligned}
F_{z\bar{z}} - \frac{g^2}{2}(c - HH^\dagger) = 0, \\
D_{\bar{z}}H = D_z H^\dagger = 0,
\end{aligned}
$$

の解であり、モジュライ空間とは BPS 方程式の解空間をゲージ群で割った商空間のことである。興味があるのはこのモジュライ空間の「体積」であるが、モジュライ空間の体積は、BPS ソリトン系の熱力学を考えた場合の古典統計の分配関数を与える。また、BPS ソリトンのモジュライ空間の体積は、そのソリトンが主要な働きをする超対称ゲージ理論の非摂動効果を導出するための重要な量となる。例えば、$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論におけるいわゆるインスタントン分配関数はインスタントンのモジュライ空間の体積によって与えられ、ゲージ理論に対する厳密な非摂動効果を与える。

このように BPS ソリトンのモジュライ空間の体積を求めることは非常に興味深く、重要な問題であるが、この問題を正面から考えると、ソリトンの解を具体的に構成し、モジュライ空間の計量を求め、計量から構成した体積要素に基づいてモジュライ空間全体にわたって積分しなければならない。しかし、この直接的な方法は困難を伴い、一般的な表現の Higgs 場や一般のゲージ群の場合に実行することは非常に難しい。

しかし、このような直接的な方法をとらずとも、「局所化定理」と呼ばれる方法を場の理論に用いてモジュライ空間の体積を計算する方法が、Moore-Nekrasov-Shatashvili によって与えられた。今回、我々はこの局所化の方法を用いて、上述の BPS ヴォーテックス方程式のモジュライ空間の体積について計算した。この方法を用いると、モジュライ空間の具体的な計量はもとより、BPS 方程式の具体的な解さえも必要としないため、計算の一般化が非常に容易である。Abel 的な $U(1)$ ゲージ群の場合には計量を通じた体積の計算が、すでに Manton らによって与えられていたが、我々が用いた方法であれば Manton らの結果を単純な留数計算によって再現することができ、さらに、非 Abel 的なゲージ群の場合にも容易に拡張が可能であることを示した。

ゲージ群が Abel 的な場合、非 Abel 的な場合いずれの場合においても、モジュライ空間の体積を求めた結果は、ゲージ結合定数 g、Fayet-Iliopoulos パラメータ c によって無次元化された Riemann 面の面積 $\tilde{\mathcal{A}} \equiv \frac{g^2 c}{4\pi}\mathrm{Area}(\Sigma_h)$ の多項式として一般的に表される。この Riemann 面の面積 $\tilde{\mathcal{A}}$ に対するモジュライ空間の体積の振る舞いについて注意深く調べると、そのモジュライ空間の (位相) 幾何学的な構造などについてもある程度知ることができることがわかった。また、非 Abel 的なゲージ群の場合に、多くの新たな興味深い結果を得ることができた。