量子重力理論における GL 不変性と Weyl 不変性の関連について

東京理科大学 基礎工学部 教養 佐藤 喜一郎
E-mail: kisato@rs.tus.ac.jp

Dirac-Uchiyama-Freund 型の作用で与えられる Weyl 不変な重力理論の BRS 不変性に基づく量子化を調べている [1]。 BRS 変換は一般座標変換だけではなく，Weyl 変換に対しても独立に導入される。しかし，設定できるゲージ条件は注意が必要で，De Donder 条件を Weyl 不変性を保つように $\partial_\mu\left(\tilde{g}^{\mu\nu}\phi^2\right)=0$, のように拡張する必要がある。この条件は，一般座標変換の線形版である一般線形変換 GL(n) 不変性を保つ。一方，Weyl 変換に対するゲージ条件は，(i) $\phi=$const，(ii) $g^{\mu\nu}\nabla^\nu W_\mu=0$，(iii) $\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi^2\partial_\nu\phi)=0$ のいずれでも，$\delta g_{\mu\nu}=2\epsilon$ という大域的 Weyl 変換で不変である。ところで，GL(n) と大域的 Weyl 変換は，$<g_{\mu\nu}>=\eta_{\mu\nu}$ の背景の下では，その対称性は，Dilatation 対称性まで自発的に破れる。量子重力理論における共形不変性はこのような形で実現される。従って，GL(n) 不変性を保っておくことが重要である。(n は時空の次元)

現在，この理論の物理的部分空間を解析するために，新たに Weyl 不変な場の変数を，

$$\bar{g}^{\mu\nu}=(\sqrt{-g})^{2/n}g^{\mu\nu},\quad \bar{W}_\mu=W_\mu-\frac{1}{n}\partial_\mu\ln\sqrt{-g},\quad \bar{\phi}=(\sqrt{-g})^{\frac{n-2}{2n}}\phi,$$

と定義し，理論からは $\sqrt{-g}$ を消した上で解析を行なっている。また，完全にゲージ不変な量としては，$d\bar{s}^2=\bar{\phi}^{\frac{4}{n-2}}\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ，$d\bar{V}=\bar{\phi}^{\frac{2n}{n-2}}d^nx$, が作れる。これらの量の関係を計算できないか検討中である。

このような中，t'Hooft が Einstsien 重力理論の経路積分を $\sqrt{-g}$ を優先することにより得られる理論 (共形場の理論?) を議論していることが分かった [2] 。t'Hooft の議論はゲージ条件などが不明なため，de Donder 条件のもとで，先に導入した Weyl 不変な変数 $\bar{g}^{\mu\nu}$ と $\Omega=(\sqrt{-g})^{\frac{n-2}{2n}}$ という 2 つの変数で Hilbert-Einstein 作用を書き換えてみた。すると，Hilbert-Einstein 作用の項のみならず，ゲージ固定項や FP ゴースト項も Ω の 2 次式になり，経路積分が実行できる。

$$S_{HE}=\int d^nx\left[\frac{1}{4}\Omega^2(\bar{g}^{\omega\gamma}\bar{g}_{\alpha\lambda}\bar{g}_{\beta\rho}-2\delta^\omega{}_\lambda\delta^\gamma{}_\alpha\bar{g}_{\beta\rho})\partial_\omega\bar{g}^{\alpha\beta}\cdot\partial_\gamma\bar{g}^{\lambda\rho}-2\Omega\partial_\omega\bar{g}^{\omega\gamma}\cdot\partial_\gamma\Omega-4\frac{n-1}{n-2}\bar{g}^{\omega\gamma}\partial_\omega\Omega\cdot\partial_\gamma\Omega\right],$$

$$S_{GF}+S_{FP}=-\int d^nx\frac{1}{\kappa}\Omega^2\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu+i\int d^nx\Omega^2\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{C}_\lambda\partial_\nu C^\lambda,$$

この際，後者の 2 項も Ω の 2 次式になるのは de Donder 条件が GL(n) 不変性を保つためであり，他のゲージを取れば 2 次になる性質は失われることが分かる。't Hooft の議論にゴーストの寄与を入れると，恣意的な係数を選べば，有効作用の発散項を消すこともできるため，'t Hooft による量子重力の定式化の議論はいまだ生きていると思われる。その際，有効理論が共形理論であるなら，我々のモデル同様，GL(n) 不変性が重要な役割りを果たすであろう。

1. 佐藤喜一郎, 素粒子論研究, Vol.118, no.3 (2010), C58.

2. G. 't Hooft, arXiv:1009.0669v2 [gr-qc]