

# BPS 状態の数え上げと壁越え現象

大阪大学 山口哲

E-mail: yamaguch (at) het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

弦理論を 4 次元にコンパクト化したときの、粒子のスペクトラムが (ソリトンや結合状態を含めて) どうなっているかという問題は、重要な問題ではあるが、一般には非常に難しい問題である。近年、4 次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称性をもつコンパクト化における BPS 状態に関して発展があり、スペクトラムを計算する手法が発達してきている。このスペクトラムにはモジュライ (スカラー場の真空期待値) の依存性があり、「壁越え現象」と呼ばれている。ここでは壁越え現象を含めた BPS スペクトラムについてのレビューを行う。また、Conifold 上の D4-D2-D0 結合状態の数え上げに関して、壁越えを含めて BPS 状態の分配関数を完全に求めた結果、および BPS 状態の数え上げと組み合わせ論的モデルについて説明する。

## 1 導入

ここでは、弦理論を 4 次元にコンパクト化したときに、

- 4 次元でどのような粒子が現れるか
- それらの粒子の間の相互作用はどうなっているか。

という問題を取り上げたい。この問題は非常に重要な問題ではあるが、一般には難しい問題である。

例として IIA 型超弦理論を Calabi-Yau 多様体でコンパクト化した場合を考えてみる。この場合、4 次元では  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性があり、粒子のスペクトラムはこの超対称性の表現 (多重項) に分解される。今の場合、質量のない場については、比較的よく分かっており、その数は次のようになっている。

- 1 個の重力多重項 (計量、2 つの gravitino、graviphoton と呼ばれるベクトル場からなる)
- $h^{1,1}$  個のベクトル多重項 (ベクトル場、2 つの Weyl spinor、複素スカラーからなる)
- $h^{2,1} + 1$  個のハイパー多重項 (2 つの Weyl spinor、2 つの複素スカラーからなる)

ここで、 $h^{p,q}$  は、Calabi-Yau 多様体の Hodge 数である。また、これらの質量のない場の間の相互作用を表す低エネルギー有効理論についてはベクトル多重項に関する部分については研究が進んでいる。

では、質量のある粒子についてはどうであろうか。質量のある粒子に関しては、その質量  $M$  と central charge  $Z$  の間に次のような「BPS 不等式」が成り立つことが知られている。

$$M \geq |Z|. \tag{1}$$

ここで、Central charge とは  $\mathcal{N} = 2$  の SUSY 代数に現れる charge の一つで、その値は電荷、磁荷を決めれば決まる複素数である。この不等式の等号を満たす場合、つまり  $M = |Z|$  の状態は BPS 状態と呼ばれる。BPS 状態では、超対称性の表現が小さくなり、 $M > |Z|$  の場合に連続的に行きにくくなるため、BPS 状態の数を数えるという問題はアプローチが可能な問題である。本稿で取り上げる問題はこの「BPS 状態の数え上げ (BPS state counting)」の問題である。

超対称性の表現論的見地からは、この BPS 状態の数（正確には後に述べるように指数）は連続パラメーターの変形で不変なように思える。もし、これが本当ならある計算しやすいパラメーター領域で数を求めれば、すべてのパラメーター領域で問題は解けたことになる。

しかし、この素朴な期待は成り立たず、ある種の連続パラメーター（ベクトル多重項の中の複素スカラー場の真空期待値）を変化させると、BPS 指数が変化することが起こる。この現象は「壁越え現象 (wall-crossing phenomena)」と呼ばれている。

近年この分野で発展があり、壁を越えた時に BPS 指数がどのように変化するかという公式が提案された [1, 2, 3]。これを用いると様々な Calabi-Yau 多様体で BPS 指数の計算をすることが可能となる。本稿では、この壁越え公式 (wall-crossing formula) についてレビューし、その応用として Conifold 上の D4-D2-D0 系の BPS 指数の計算 [4] について説明する。また、この指数を出すような統計模型 [5] についても触れる。

## 2 BPS 状態

これは 4次元の  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性の有質量表現を考える。このときこの粒子の静止系に移って考えると質量  $M$  と複素数の central charge  $Z$  の間に

$$M \geq |Z| \quad (2)$$

の不等式が成り立つことが分かる。しかも等号が成り立つ場合と成り立たない場合で表現の次元が異なる。等号が成り立つ場合は表現は short multiplet、その状態は BPS 状態と呼ばれる。一方、等号が成り立たない場合は long multiplet、その状態は非 BPS 状態と呼ばれる。Long multiplet は short multiplet 4つ分の長さを持っている。

Short multiplet は、long multiplet と表現の次元が異なるので、理論の連続変形によって short multiplet が long multiplet に変化することはない。言い換えれば、BPS 状態が非 BPS 状態に変化することはない。しかし、この議論には抜け穴があって、理論の連続変形により、short multiplet 4つ分が一つの long multiplet になり、非 BPS 状態になるということはある。

このような変化を考慮したうえで、BPS 状態の「数」として比較的安定な指数を考えたい。Short multiplet から long multiplet を作る場合、Fermion 的な short multiplet 2つと boson 的な short multiplet 2つから作る。したがって例えばパラメータの連続変形で short multiplet が合わさって long multiplet になったとしても次の BPS 指数は変化しない。

$$\Omega(\gamma) := (\text{boson 的 short multiplet の数}) - (\text{fermion 的 short multiplet の数}) \quad (3)$$

ここで、 $\gamma$  は状態の電荷と磁荷をまとめたものである。状態は  $\gamma$  を固定して、その電荷磁荷を持つもののみ数える。

この  $\Omega(\gamma)$  を求めることが「BPS 状態の数え上げ」と呼ばれ、それが今回考えたい問題である。ここまでの議論から  $\Omega(\gamma)$  は理論や真空の連続変形により変化しないように思われる。しかし実際には、ある種の連続変形により変化するのである。これが「壁越え現象」である。これについて次節で議論する。

### 3 壁越え現象

BPS 指数が変化するということを説明するために、ある電荷磁荷  $\gamma$  を持つ粒子が、それぞれ  $\gamma_1, \gamma_2$  の電荷磁荷を持つ BPS 粒子からなる結合状態であったとしよう。このとき  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  を満たすため、central charge も

$$Z(\gamma) = Z(\gamma_1) + Z(\gamma_2) \quad (4)$$

を満たす。BPS 条件を考えると結合エネルギーは

$$(\text{結合エネルギー}) = |Z(\gamma_1)| + |Z(\gamma_2)| - |Z(\gamma_1) + Z(\gamma_2)| \quad (5)$$

となる。これは三角不等式から正または 0 である。ここで問題となるのはこの結合エネルギーが 0 となる場合である。このとき、1 粒子状態から 2 粒子状態に「崩壊」することができる。つまり、状態が 1 粒子状態と 2 粒子状態を行き来することが出来て、1 粒子状態のみに注目した場合、状態の数が増えるということが起こり得るのである。これが「壁越え現象 (wall-crossing phenomena)」である。また、真空の moduli 空間の中で結合エネルギーが 0 となる部分、つまり central charge  $Z(\gamma_1)$  と  $Z(\gamma_2)$  の位相がそろった部分を「限界安定の壁 (wall of marginal stability)」と呼ぶ。

まとめると、壁越え現象とは真空の moduli を連続変形させていき限界安定の壁を越えた時に BPS 指数  $\Omega(\gamma)$  が変化する現象のことである。

さて、壁越え現象が起こった時、具体的に BPS 指数がどれだけ変化するのかを表すのが「壁越え公式」である。壁越え公式については、いろいろなバージョンのものがあるが、ここでは Denef と Moore によって [1] で最初に与えられた “semi-primitive wall-crossing formula” と呼ばれるものを紹介する。

$\gamma_1$  と  $\gamma_2$  をそれぞれ primitive な電荷磁荷とする。ここで  $\gamma_1$  が primitive とは、ある 2 以上の整数  $n$  と別の電荷磁荷  $\gamma_3$  を用いて  $\gamma_1 = n\gamma_3$  と書くことはできないということである。電荷磁荷  $\gamma_1 + n\gamma_2$  を持つ状態を考え、その分配関数を考える。 $Q$  を形式的なパラメータとして、分配関数

$$Z(Q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Omega(\gamma_1 + n\gamma_2) Q^n \quad (6)$$

を考える。このような状態は  $Z(\gamma_1)$  と  $Z(\gamma_2)$  の位相がそろうところが限界安定の壁となり、それを越えると壁越え現象を引き起す。  $\arg Z(\gamma_1) > \arg Z(\gamma_2)$  と  $\arg Z(\gamma_1) < \arg Z(\gamma_2)$  での分配関数をそれぞれ  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}'$  とするとこれらの間には、

$$\mathcal{Z}'(Q) = \mathcal{Z}(Q) \times \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^{n\langle\gamma_2, \gamma_1\rangle} Q^n)^{n\langle\gamma_2, \gamma_1\rangle \Omega(n\gamma_2)} \quad (7)$$

という関係がある。ここから  $\Omega$  がどう変化するかが読み取れる。

この semi-primitive wall-crossing formula は Kontsevich-Soibelman の壁越え公式 [2, 3] から導出できる。その意味で semi-primitive wall-crossing formula は Kontsevich-Soibelman の壁越え公式の特別な場合と言える。

## 4 Conifold 上の D4-D2-D0 系

これまで一般論を進めてきたが、ここでは、具体的な問題として Conifold 上の D4-D2-D0 系の BPS 状態の数を上げを問題にしたい。

Conifold とは非コンパクトな Calabi-Yau 多様体の一種であり、一つだけコンパクトな 2-cycle を持つ。この 2-cycle の大きさ、およびここを通る B 場の真空期待値が 1 つの複素数となり、Moduli パラメータを与える。

ここでは、非コンパクトな 4-cycle に巻きついた D4-brane 1 枚とコンパクトな 2-cycle に巻きついた何枚かの D2-brane、および何個かの D0-brane の結合状態を考える。これらの brane の central charge の値は、それぞれ次のような値にとる。

D0-brane	1
D2-brane	$z$
D4-brane	$\Lambda^2 e^{2\varphi}$

ここで、 $z$  は先ほど述べた「2-cycle の大きさ」である。厳密には D0-brane の central charge を 1 としたときの D2-brane の central charge という定義になる。D4-brane の central charge に現れる  $\Lambda$  は、だいたいある非コンパクト 2-cycle の大きさであり、その値は無限にする極限をとる。一方位相因子の  $\varphi$  はこの非コンパクト 2-cycle にある B 場を考えたため現れたものである。このような位相因子は [6] により初めて導入された。

さて、このような状態の限界安定の壁を調べて  $z$  平面上に表したものが図 1 である。このような構造になっているので、どこか一つの部屋で分配関数が決まれば他のすべての部屋の分配関数は壁越え公式を使って求めることができる。

我々の求めた分配関数の結果は次のとおりである。D0 charge を  $\ell_0$ 、D2-charge を  $\ell_2$ 、それぞれを数える形式的パラメータを  $u, v$  として、分配関数は

$$\mathcal{Z}(u, v) = \sum_{\ell_0, \ell_2} \Omega((D4) + \ell_2(D2) + \ell_0(D0)) u^{\ell_0} v^{\ell_2}. \quad (8)$$

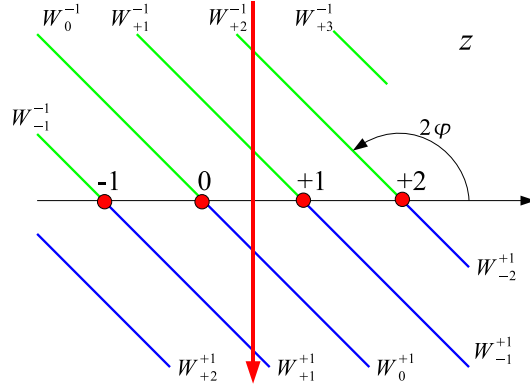


Figure 1: Conifold の D4-D2-D0 系の限界安定の壁の様子。

とする。図 1 の赤い線にそって Moduli を動いていく。  $z = -i\infty$  での分配関数を初期条件として与える。これは、D2 charge を持たないと考えられるので  $v$  によらない。実際、4 次元の Instanton の数え上げの考察から

$$\mathcal{Z}_{-\infty}(u, v) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - u^r)} \quad (9)$$

とするのが適当である。このとき分配関数は  $W_n^-$  と  $W_{n+1}^-$  の間では、

$$\mathcal{Z}(u, v) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - u^r)} \prod_{r=1}^n (1 - u^r v^{-1}) \prod_{r=0}^{\infty} (1 - u^r v), \quad (10)$$

となる。特に  $\text{Im } z = 0$  では、

$$\mathcal{Z}(u, v) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - u^r)} \prod_{r=0}^{\infty} (1 - u^r v), \quad (11)$$

である。一方  $W_{n-1}^+$  と  $W_n^+$  の間では、

$$\mathcal{Z}(u, v) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - u^r)} \prod_{r=n}^{\infty} (1 - u^r v). \quad (12)$$

となる。

このような BPS 状態の数え上げは、しばしば統計モデルと等価となり、時空の離散的な構造とから興味深い描像を与える。我々の結果も統計モデルとして解釈できる。特に式 (11) の分配関数を導きだす統計モデルを紹介する [5]。

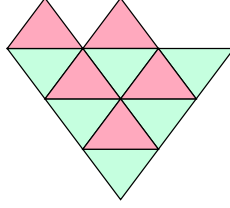


Figure 2: Triangular partition の例

これは Young 図の 4 角形を 3 角形にしたようなモデルで triangular partition と名付けられた。具体的には図 2 のような図形の数え上げである。

この統計モデルの分配関数を次のように定義する。まず、

$$a = (\text{上向き三角形の数}), \quad b = (\text{下向き三角形の数}). \quad (13)$$

と定義する。分配関数は  $x, y$  を形式的パラメータとして

$$Z_{tri}(x, y) := \sum_{\text{triangular partition}} x^a y^b \quad (14)$$

と定義する。すると、次の式が示せる。

$$Z_{tri}(x, y) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - (xy)^r)} \prod_{r=0}^{\infty} (1 + (xy)^r y)., \quad (15)$$

つまり、 $u = xy$ ,  $v = -y$  と同定すれば、(11) の分配関数を再現する。

## References

- [1] F. Denef and G. W. Moore, “Split states, entropy enigmas, holes and halos,” [arXiv:hep-th/0702146](#).
- [2] M. Kontsevich and Y. Soibelman, “Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations,” [arXiv:0811.2435](#) [[math.AG](#)].
- [3] M. Kontsevich and Y. Soibelman, “Motivic Donaldson-Thomas invariants: summary of results,” [arXiv:0910.4315](#) [[math.AG](#)].
- [4] T. Nishinaka and S. Yamaguchi, “Wall-crossing of D4-D2-D0 and flop of the conifold,” *JHEP* **09** (2010) 026, [arXiv:1007.2731](#) [[hep-th](#)].

- [5] T. Nishinaka and S. Yamaguchi, “Statistical model and BPS D4-D2-D0 counting,”  
arXiv:1102.2992 [hep-th].
- [6] D. L. Jafferis and G. W. Moore, “Wall crossing in local Calabi Yau manifolds,”  
arXiv:0810.4909 [hep-th].