Higher spin gauge theories and their CFT duals

慶應義塾大学 日吉物理学教室 疋田泰章

E-mail: hikida@phys-h.keio.ac.jp

高いスピンをもつゲージ理論は、スピン 2 の重力場の理論を拡張したものと解釈できる。特に、AdS 空間上では非自明な相互作用を含む理論を構成することができ、Vasiliev 理論と呼ばれている。最近では主に、AdS/CFT 対応の文脈で興味を持たれている。4 次元の Vasiliev 理論は 3 次元の $\mathrm{O}(N)$ ベクトル模型と双対であり、3 次元の Vasiliev 理論は 2 次元の W_N ミニマル模型と双対であると主張されているが、ここでは特に後者に注目する。この対応がどのようなものであり、どのような証拠があるかについて解説したい。最後に、我々による超対称性のある場合への拡張に関しても触れたい。

1 導入

最近高いスピンを持つゲージ理論が、特に AdS/CFT 対応への応用として注目を集めている。重力理論はスピン 2 の計量 $g_{\mu\nu}$ を場とするゲージ理論であるが、高いスピンに拡張されたゲージ理論を構成することができる。超弦理論にも高いスピンをもつゲージ場が数多く存在しており、それらゲージ場の質量のない極限に関係していると考えられている。その意味で、高いスピンを持つゲージ理論は超弦理論のおもちゃ模型として扱うことができる。特に、Vasiliev は AdS 空間上では相互作用を含むような非自明な理論を構成できることを示した [1]。ただ、今のところ運動方程式しか知られておらず、古典論しか扱うことができない。

AdS/CFT 対応は anti-de Sitter (AdS) 空間上の超弦理論と次元の低い共形場理論 (CFT) との対応のことで、1997 年に Maldacena によって提唱された [2]。ところが、提唱されてすでに 15 年ほど経っているにもかかわらず、未だに証明はなされていない。AdS/CFT 対応では、片方の理論の弱結合領域がもう片方の強結合領域にあたるため、直接摂動論同士を比較することができない。また、AdS 空間上の超弦理論は未だに解かれておらず、対応を調べるうえでの足かせとなっている。そこで、高いスピンに拡張された重力理論を利用して簡単化された AdS/CFT 対応を構成し、その対応を調べることで AdS/CFT 対応に関するより深い理解を得たい。

簡単化された AdS/CFT 対応の例としては、次のようなものがある。一つ目は Klebanov-Polyakov によるもので、4 次元の Vasiliev 理論が 3 次元の $\mathrm{O}(N)$ ベクトル模型に双対という主張である [3]。この提案に関する証拠はいろいろとあるが、最近相関関数に関する研究が Giombi-Yin によってなされ [4, 5]、この研究を機に高いスピンを持つゲージ場の理論が再び注目を集めることになった。また、違う次元での対応も Gaberdiel-Gopakumar によって提案された [6]。彼らによると、3 次元の Vasiliev 理論が 2 次元のあるラージ N ミニマル模型と双対となっている。この提案はすでにいろいろな証拠が挙がっており、ラージ N の極限では正しいだろうと思われている。私たちの研究 [7] は、彼らの提案を超対称性のある場合に拡張したものとなっている。ここでは、特に 3 次元の高いスピンに拡張された重力理論の解説をし、その後 AdS/CFT 対応への応用に関して述べたい。

2 高いスピンに拡張された重力理論

まず、高いスピンに拡張された重力理論の紹介から始めたい。特に時空の次元が 3 の場合には、物理的な自由度のない位相的な場の理論となるため、他の次元の場合に比べて取り扱いが容易とな

る。まず一般次元における自由場の理論を考える。高いスピンをもつゲージ場として、$\phi_{\mu_1\ldots\mu_s}$ のように s 個の座標の脚について対称化したものを考える。特に $s=1$ の場合は abelian Yang-Mills 場 A_μ となり、$s=2$ の場合は計量 $g_{\mu\nu}$ となる。この場の満たす運動方程式としては、$s=1,2$ の場合を一般化することで

$$\mathcal{F}_{\mu_1\ldots\mu_s} \equiv \Box\,\phi_{\mu_1\ldots\mu_s} - \partial_{(\mu_1|}\partial^\lambda\phi_{|\mu_2\ldots\mu_s)\lambda} + \partial_{(\mu_1}\partial_{\mu_2}\phi_{\mu_3\ldots\mu_s)\lambda}{}^\lambda = 0 \tag{1}$$

のように書くことができる [8]。この運動方程式は

$$\delta\phi_{\mu_1\ldots\mu_s} = \partial_{(\mu_1}\xi_{\mu_2\ldots\mu_s)}\ , \qquad \xi^\lambda_{\lambda\mu_3\ldots\mu_s} = 0 \tag{2}$$

のゲージ変換のもとで不変である。また、この運動方程式を出すような作用も

$$S = \frac{1}{2}\int d^Dx\phi^{\mu_1\ldots\mu_s}\left(\mathcal{F}_{\mu_1\ldots\mu_s} - \frac{1}{2}\eta_{(\mu_1\mu_2}\mathcal{F}_{\mu_3\ldots\mu_s)\lambda}{}^\lambda\right) \tag{3}$$

のように書くことができる。ここで、

$$\phi^{\lambda\sigma}_{\lambda\sigma\mu_5\ldots\mu_s} = 0 \tag{4}$$

のような制約をおいた。実際、式 (2) のようなゲージ変換のもとでの不変性を要請すると、作用は全体の因子を除いて唯一に決まることが示されている [9]。

高いスピンを持つゲージ場に関しても、自由場の理論ならば上で述べたように構成することができる。ところが、一般に相互作用項を入れようとすると非常に難しいことが知られている。Vasiliev は背景を AdS 空間にし、さらに無限個のスピン $s=2,3,\ldots,\infty$ の場を導入することで、非自明な相互作用を含むような高いスピンに拡張された重力理論を構成することができた [1]。また 3 次元の場合は、高いスピンを持つゲージ場は Chern-Simons 理論で記述することができる [10]。以下では、この Chern-Simons 理論による記述を用いて、3 次元の場合の高いスピンに拡張された重力理論の説明をしたい。

3 次元の重力場だけの理論は、SL(2)×SL(2) Chern-Simons 理論で記述することができる [11, 12]。この理論の作用は

$$S = S_{\rm CS}[A] - S_{\rm CS}[\tilde{A}]\ , \qquad S_{\rm CS}[A] = \frac{k_{\rm CS}}{4\pi}\int {\rm tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{5}$$

で、係数 $k_{\rm CS}$ は AdS 半径 ℓ と重力定数 G と $k_{\rm CS} = \ell/4G$ の関係にある。ゲージ場は SL(2) Lie 代数の生成子 J_a $(a=1,2,3)$ を用いて、$A = A^a_\mu J_a dx^\mu$ で与えられる。また、Chern-Simons 理論の作用は

$$\delta A = d\lambda + [A,\lambda]\ , \qquad \delta\tilde{A} = d\tilde{\lambda} + [\tilde{A},\tilde{\lambda}] \tag{6}$$

のゲージ変換で不変となっている。多脚場 e^a_μ とスピン接続 $\omega_{\mu,a,b}$ を

$$e^a_\mu = \tfrac{\ell}{2}(A^a_\mu - \tilde{A}^a_\mu)\ , \qquad \omega_{\mu,a,b} = \tfrac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^c_\mu\ , \qquad \omega^c_\mu = \tfrac{1}{2}(A^c_\mu + \tilde{A}^c_\mu) \tag{7}$$

のように定義することによって、Chern-Simons 作用 (5) を負の宇宙定数を持つ Einstein-Hilbert 作用に写すことができる。また、ゲージ変換 (6) は一般座標変換を含むことも分かる。ただし、経路積分で積分する領域などが異なるため、これら二つの理論の関係は自明という訳ではない。

3 次元における高いスピンに拡張された重力理論は、Chern-Simons 理論において群を一般の $G \times G$ に置き換えることによって得られる。例えば $G = \mathrm{SL}(N)$ の場合を考えることにする。うまく sl(2) を埋め込むことによって、sl(N) の随伴表現を

$$\mathrm{sl}(N) = \mathrm{sl}(2) \oplus \left(\bigoplus_{s=3}^{N} \mathrm{g}^{(s)} \right) \tag{8}$$

のように分解することができる。ここで $g^{(s)}$ は sl(2) の $(2s-1)$ 次元表現に属する。埋め込んだ sl(2) を先ほど考えた重力理論の sl(2) と同一視することで、$g^{(s)}$ の s を時空のスピンとみなすことができるようになる。したがって、$G = \mathrm{SL}(N)$ の場合はスピン $s = 2, 3, , \ldots, N$ を持つゲージ場の理論となる。Gaberdiel-Gopakumar による提案 [6] では、重力理論として [13] で与えられたもののボソン部分だけ取り出したものを用いている。この理論のゲージ場の部分は、$G = \mathrm{SL}(N)$ でうまく $N \to \infty$ の極限を取ったものである。論文 [7] で私たちの提唱した対応では、重力理論で [13] の与えられた $\mathcal{N} = 2$ の超重力理論全体を用いる。この理論のゲージ場の部分は $G = \mathrm{SL}(N+1|N)$ でうまく $N \to \infty$ の極限を取ったものとなっている。

Chern-Simons 理論による記述の良い点のひとつとして、漸近的な対称性の議論が容易になることがある。Chern-Simons 理論は位相的な理論であるため、バルクには物理的な自由度は存在しない。ところが境界がある場合には、物理的自由度が境界に局在し、その自由度は群 G をもとにした Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) 模型で記述できることが知られている。AdS/CFT 対応に応用する場合は、さらに境界の近傍で漸近的 AdS 空間になるように要請する必要がある。このさらなる制約は、古典的な Hamiltonain 縮約と同じ操作であることが論文 [14, 15] によって示されている。この事実を用いることによって、境界の近傍における古典的な対称性を読み取ることができる。例えば、重力のみの場合 ($G = \mathrm{SL}(2)$) では、境界の対称性は共形 (Virasoro) 対称性になり、有名な Brown-Henneaux の結果 [16] を再現する。高いスピンに拡張された重力理論 ($G = \mathrm{SL}(N)$) では、境界の対称性は Virasoro 対称性を高いスピンに拡張した W_N 対称性になることが分かる [17, 14]。この W_N 対称性に関するレビューとしては [18] がある。超対称性のある場合 ($G = \mathrm{SL}(N+1|N)$) には、境界の対称性は $\mathcal{N} = 2$ W_N 対称性となる [7, 19, 20]。この事実を利用することで、新たな AdS/CFT 対応の提案をすることが可能となった。

3　簡単化された AdS/CFT

高いスピンに拡張された重力理論を用いることで、簡単化された AdS/CFT 対応を考えることができる。まず Klebanov-Polyakov による提案 [3] から始めたいと思う。この提案によると、4 次元の AdS 空間上の高いスピンに拡張された重力理論 [1] が 3 次元の O(N) ベクトル模型と双対となっている。ここで、双対な理論がベクトルの自由度を持った理論であることが重要である。例えば、O(N) ベクトル模型でスピン s のゲージ不変演算子を構成しようとすると、

$$J = \sum_{a=1}^{N} h^a \partial_{(\mu_1} \cdots \partial_{\mu_s)} h^a + \cdots \tag{9}$$

のような形で書くことができる。したがって、一つスピンを固定すると実質的に一種類しかなく、これは重力理論に一種類しか高いスピンの場 $\phi_{\mu_1 \ldots \mu_s}$ を導入していないことに対応している。一方、

U(N) ゲージ理論では場は行列で記述することができ、スピン s のゲージ不変演算子は

$$\mathrm{tr}[\Phi \nabla^{l_1} \Phi \nabla^{l_2} \cdots \Phi] \ , \qquad s = \sum_i l_i \tag{10}$$

の形をしている。すなわち、スピン s の演算子は s の整数分解の数だけ演算子があり、この数は超弦理論の状態と一対一対応している。Klebanov-Polyakov による主張 [3] には様々な証拠があり、例えば共形場理論の相関関数を重力理論から再現する試みなどがある [4, 5]。また最近高いスピンの対称性を利用すると、共形場理論の相関関数を決定できることが論文 [21, 22] によって議論されており、主張が正しいことを強く示唆している。

次に Gaberdiel-Gopakumar による次元の低い場合 [6] に移りたいと思う。重力理論は [13] によって得られた超重力理論のボソニック部分の一部を持ってきたもので、ゲージ場の部分は $G = \mathrm{SL}(N)$ の Chern-Simons 理論のラージ N 極限で与えられる。さらに二つの複素スカラー場が結合しており、質量 $M^2 = -1 + \lambda^2$ を持っている。この重力理論の AdS 空間の境界近傍での対称性が W 代数であったので、双対な理論としては W_N ミニマル模型で与えられると考えるのが自然である。このミニマル模型は

$$\frac{\mathrm{SU}(N)_k \otimes \mathrm{SU}(N)_1}{\mathrm{SU}(N)_{k+1}} \tag{11}$$

のようなコセット表示を用いることができるが、ラージ N 極限を取る際に't Hooft パラメータ

$$\lambda = \frac{N}{k+N} \tag{12}$$

を有限に保つようにする。このパラメータが重力理論の質量にある λ と同一視できるというのが論文 [6] の主張である。この提案はすでに様々な証拠があり、特に論文 [23] で重力理論の 1 ループ分配関数がミニマル模型の't Hooft 極限で再現できることが示されている。このことは、スペクトルが対応の両者で一致することを意味している。

論文 [6] における対応は、いくつかの拡張がなされている。論文 [24, 25] では、双対な共形場理論が WD_N ミニマル模型 [18] となる場合を取り扱っている。我々は論文 [7] で超対称性のある場合への拡張を行った。重力理論側としては、[13] で得られた $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論の全体を取り扱った。ゲージ場の部分は $G = \mathrm{SL}(N+1|N)$ の Chern-Simons 理論のラージ N 極限で与えられる。さらに質量のあるスカラー場とスピン 1/2 フェルミオン場を含んでおり、質量はパラメータ λ に依存している。この重力理論の AdS 空間の境界近傍での対称性は $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称性 W 代数で与えられるため、我々は双対な共形場理論が $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称性 W_N 代数のミニマル模型で与えられると予想した。このミニマル模型は $\mathbb{CP}^N$ 風間・鈴木模型 [26, 27]

$$\frac{\mathrm{SU}(N+1)_k \otimes \mathrm{SO}(2N)_1}{\mathrm{SU}(N)_{k+1} \otimes \mathrm{U}(1)_{N(N+1)(k+N+1)}} \tag{13}$$

で記述できる [28]。さらに、't Hooft パラメータ (12) を有限にするようにラージ N, k 極限をとり、そのパラメータを重力理論の物質場の質量に現れる λ と同一視することにする。我々の提案に関してもすでにいろいろな証拠があり、特にスペクトルの一致が論文 [29] によって示されている。

4 結論

重力理論はスピン 2 のゲージ理論として捉えることができるが、高いスピンのゲージ場を含むように重力理論を拡張することができる。特に Vasiliev は、AdS 空間上で非自明な相互作用を含むような高いスピンに拡張されたゲージ理論を構成した [1]。また、時空が 3 次元の場合には Chern-Simons 理論を用いた記述が可能となり、他の次元の場合と比較して取り扱いが容易となる。ここでは、高いスピンに拡張された重力理論の AdS/CFT 対応への応用に関する研究の紹介をおこなった。4 次元の Vasiliev 理論は 3 次元の O(N) ベクトル模型と双対であり [3]、また 3 次元の Vasiliev 理論は 2 次元の W_N ミニマル模型と双対である [6] と主張されている。これらの提案に関しては、相関関数や分配関数の比較などすでに様々な証拠が挙がっている。ただし、これまでの研究は主に N が非常に大きな極限に関してであった。重力理論側では $1/N$ 補正は重力の量子効果を取り入れることに対応する。共形場理論側は $1/N$ 補正を導入することは比較的容易であるため、この AdS/CFT 対応を応用することで重力の量子効果に関して何らかの知見が得られるのではないかと期待している。

参考文献

[1] M. A. Vasiliev, "Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions," Phys. Lett. B **243**, 378 (1990).

[2] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].

[3] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "AdS dual of the critical O(N) vector model," Phys. Lett. B **550**, 213 (2002) [hep-th/0210114].

[4] S. Giombi and X. Yin, "Higher spin gauge theory and holography: The three-point functions," JHEP **1009**, 115 (2010) [arXiv:0912.3462 [hep-th]].

[5] S. Giombi and X. Yin, "Higher spins in AdS and twistorial holography," JHEP **1104**, 086 (2011) [arXiv:1004.3736 [hep-th]].

[6] M. R. Gaberdiel and R. Gopakumar, "An AdS$_3$ dual for minimal model CFTs," Phys. Rev. D **83**, 066007 (2011) [arXiv:1011.2986 [hep-th]].

[7] T. Creutzig, Y. Hikida and P. B. Ronne, "Higher spin AdS$_3$ supergravity and its dual CFT," JHEP **1202**, 109 (2012) [arXiv:1111.2139 [hep-th]].

[8] C. Fronsdal, "Massless fields with integer spin," Phys. Rev. D **18**, 3624 (1978).

[9] B. de Wit and D. Z. Freedman, "Systematics of higher spin gauge fields," Phys. Rev. D **21**, 358 (1980).

[10] M. P. Blencowe, "A consistent interacting massless higher spin field theory in $D = (2+1)$," Class. Quant. Grav. **6**, 443 (1989).

[11] A. Achucarro and P. K. Townsend, "A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories," Phys. Lett. B **180**, 89 (1986).

[12] E. Witten, "(2+1)-dimensional gravity as an exactly soluble system," Nucl. Phys. B **311**, 46 (1988).

[13] S. F. Prokushkin and M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge interactions for massive matter fields in 3-D AdS space-time," Nucl. Phys. B **545**, 385 (1999) [hep-th/9806236].

[14] A. Campoleoni, S. Fredenhagen, S. Pfenninger and S. Theisen, "Asymptotic symmetries of three-dimensional gravity coupled to higher-spin fields," JHEP **1011** (2010) 007 [arXiv:1008.4744 [hep-th]].

[15] A. Campoleoni, S. Fredenhagen and S. Pfenninger, "Asymptotic W-symmetries in three-dimensional higher-spin gauge theories," JHEP **1109** (2011) 113 [arXiv:1107.0290 [hep-th]].

[16] J. D. Brown and M. Henneaux, "Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three-dimensional gravity," Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986).

[17] M. Henneaux and S. -J. Rey, "Nonlinear W_∞ as asymptotic symmetry of three-dimensional higher spin anti-de Sitter gravity," JHEP **1012**, 007 (2010) [arXiv:1008.4579 [hep-th]].

[18] P. Bouwknegt and K. Schoutens, "W symmetry in conformal field theory," Phys. Rept. **223**, 183 (1993) [hep-th/9210010].

[19] M. Henneaux, G. Lucena Gomez, J. Park and S. -J. Rey, "Super- W_∞ asymptotic symmetry of higher-spin AdS_3 supergravity," JHEP **1206**, 037 (2012) [arXiv:1203.5152 [hep-th]].

[20] K. Hanaki and C. Peng, "Symmetries of holographic super-minimal models," arXiv:1203.5768 [hep-th].

[21] J. Maldacena and A. Zhiboedov, "Constraining conformal field theories with a higher spin symmetry," arXiv:1112.1016 [hep-th].

[22] J. Maldacena and A. Zhiboedov, "Constraining conformal field theories with a slightly broken higher spin symmetry," arXiv:1204.3882 [hep-th].

[23] M. R. Gaberdiel, R. Gopakumar, T. Hartman and S. Raju, "Partition functions of holographic minimal models," JHEP **1108**, 077 (2011) [arXiv:1106.1897 [hep-th]].

[24] C. Ahn, "The large N 't Hooft limit of coset minimal models," JHEP **1110**, 125 (2011) [arXiv:1106.0351 [hep-th]].

[25] M. R. Gaberdiel and C. Vollenweider, "Minimal model holography for SO($2N$)," JHEP **1108**, 104 (2011) [arXiv:1106.2634 [hep-th]].

[26] Y. Kazama and H. Suzuki, "New $\mathcal{N} = 2$ superconformal field theories and superstring compactification," Nucl. Phys. B **321**, 232 (1989).

[27] Y. Kazama and H. Suzuki, "Characterization of $\mathcal{N} = 2$ superconformal models generated by coset space method," Phys. Lett. B **216**, 112 (1989).

[28] K. Ito, "Quantum Hamiltonian reduction and $\mathcal{N} = 2$ coset models," Phys. Lett. B **259**, 73 (1991).

[29] C. Candu and M. R. Gaberdiel, "Supersymmetric holography on AdS_3," arXiv:1203.1939 [hep-th].