Two-dimensional crystal melting and D4-D2-D0 on toric Calabi-Yau singularities

CQUeST (Center for Quantum Spacetime) 西中 崇博
E-mail: nishinaka_t@me.com

我々は一般の toric Calabi-Yau singularity 上の BPS D4-D2-D0 状態の index を数え上げる統計模型を構成した。本講演は山口 哲 氏（阪大）および吉田 豊 氏（KEK）との共同研究に基づく。

6 次元空間が Calabi-Yau 3-fold で与えられるような時空上の type II 弦理論を考えると、残りの平坦な 4 次元時空には $\mathcal{N} = 2$ の超対称性が残る。特に考えている Calabi-Yau が compact な場合には $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論が、non-compact な場合には $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論が、4 次元の有効理論として実現される。さらに Calabi-Yau 内の p-cycle に巻き付く BPS Dp-branes を考えると、それは 4 次元理論における BPS 状態を与える。このような BPS 状態の縮退度を調べる事は、超弦理論の非摂動的な性質を探る手がかりになるだけでなく、弦理論の量子効果まで含めた時空の微視的構造を知ることにつながると期待される。

例えば non-compact Calabi-Yau 3-fold 全体に巻き付く D6-brane を 1 枚考えたとする。これは 4 次元ゲージ理論において無限の質量を持つ BPS 粒子を考える事に対応する。さらにこの D6-brane に束縛された D2、D0-branes を考えることもできる。ただしここで D2 は Calabi-Yau の holomorphic 2-cycle に巻き付いているものとし、D0 は Calabi-Yau で point-like であるとする。これは 4 次元の言葉では、1 つの無限質量 BPS 粒子に幾つかの有限質量 BPS 粒子が束縛された状態を考えていることになる。一般にこのような BPS 束縛状態の縮退度は真空の moduli に依存し、今の例では Calabi-Yau の Kähler moduli に依って変化する。中でも特に面白いのは、Calabi-Yau の compact two-cycle が全てつぶれるような極限を取った場合で[1]、この場合の BPS D6-D2-D0 状態は、少なくとも Calabi-Yau が toric である場合には、3 次元の crystal が溶ける様子を調べる事で束縛状態の BPS index を求めることができると知られている [1, 2, 3, 4]。またこの 3 次元 crystal の "尾根" は元々の Calabi-Yau の toric web diagram の形に対応しており、さらに興味深い事には、ある種の熱力学極限における crystal の溶け具合を調べると、今度は mirror Calabi-Yau の情報が得られることが知られている [5, 6]。これら一連の事実は、BPS D6-D2-D0 状態の数え上げによって、D6 が probe している Calabi-Yau の（弦理論の意味での）微視的な性質を知り得るという可能性を示唆している。

これらの先行研究をふまえて、我々は non-compact D6 のかわりに non-compact D4 を置いたものを考察した。すなわち toric Calabi-Yau singularity の toric divisor に D4-brane を 1 枚おき、それに束縛された D2-D0 状態の BPS index を計算するための統計模型を構成した。我々の模型の構成法は、D6-D2-D0 の場合の構成法にひとつの条件を課したものである。この新たな条件は物理的には、D0 の moduli 空間を Calabi-Yau 全体から toric divisor に制限するための条件と解釈され

[1] 厳密には singularity に B 場を少し入れておいて、D2 が massless にならないようにしているので、この極限は弦理論的には singular ではない。

る。というのも、D6 を D4 に取り替えたために、BPS で D4 に束縛される D0-branes の moduli 空間はもはや Calabi-Yau 全体ではなく、D4 が置かれた toric divisor に制限されているためである。

具体例を挙げると、$\mathbb{C}^3$ 上の D6 に BPS で束縛された D0-branes は、3 次元 Young 図の melting を調べる事で数え上げることができる。これは $\mathbb{C}^3$ の Donaldson-Thomas 不変量と関係し、この場合の BPS index の母関数は D0 の Boltzmann 因子 q を用いて

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^3}(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-q^n} \right)^n \tag{1}$$

と書ける。この 3 次元 Young 図の "尾根" はちょうど $\mathbb{C}^3$ の toric web diagram と対応している。一方で D6 を置くかわりに、$\mathbb{C}^3$ の中の $\mathbb{C}^2$ という divisor に D4 を置いたとする。この D4 に BPS で束縛された D0-branes は、D4 上の場の理論の言葉では $d=4, \mathcal{N}=4$ ゲージ理論の instantons と見なせるから、その index は通常の 2 次元 Young 図の melting を調べる事で数え上げることができる。この場合の BPS D4-D0 index の母関数は良く知られているように

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \tag{2}$$

で与えられる。

このように、D6 を D4 に取り替えることで、3 次元 crystal から 2 次元の crystal が得られる。我々はこれを一般の toric Calabi-Yau 上の一般の toric divisor に巻き付く D4-brane に拡張した。その手法はいわゆる Calabi-Yau singularity 上の D-brane に付随する quiver ゲージ理論を用いるもので、ある意味では orbifold 上の D-branes に関する Douglas と Moore の仕事 [7] を一般の toric Calabi-Yau singularity に拡張したものと考えられる。我々の開発した統計模型は、D4-brane が probe している toric divisor の弦理論における微視的な構造を知るための手がかりになると期待される。

References

[1] A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, "Quantum Calabi-Yau and classical crystals," Progr. Math. **244** (2006) 597 [hep-th/0309208].

[2] B. Szendroi, "Non-commutative Donaldson-Thomas theory and the conifold," Geom. Topol. **12** (2008) 1171—1202, arXiv:0705.3419 [math.AG].

[3] S. Mozgovoy and M. Reineke, "On the noncommutative Donaldson-Thomas invariants arising from brane tilings," arXiv:0809.0117 [math.AG].

[4] H. Ooguri and M. Yamazaki, "Crystal Melting and Toric Calabi-Yau Manifolds," Commun. Math. Phys. **292** (2009) 179 [arXiv:0811.2801 [hep-th]].

[5] A. Iqbal, N. Nekrasov, A. Okounkov and C. Vafa, “Quantum foam and topological strings,” JHEP **0804** (2008) 011 [hep-th/0312022].

[6] H. Ooguri and M. Yamazaki, “Emergent Calabi-Yau Geometry,” Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 161601 [arXiv:0902.3996 [hep-th]].

[7] M. R. Douglas and G. W. Moore, “D-branes, quivers, and ALE instantons,” hep-th/9603167.