Renormalization group approach to matrix models via noncommutative space

黒木経秀 (立教大)

河本祥一氏、富野弾氏 (Tunghai University) との共同研究

arXiv: 1206.0574

1 Motivations

量子重力理論:

large-N ゲージ理論 or large-N matrix model による構成的定義

Banks-Fishler-Shenker-Susskind
Ishibashi-Kawai-Kitazawa-Tsuchiya
Maldacena

double scaling limit: $(g-g_c)^2 N^{\star}$: fixed, $g \to g_c$, $N \to \infty$ (cf. lattice)

特に g_s に関して非摂動: e.g. $(g-g_c)^2 N^{\frac{9}{5}}$ ($c=0$ noncritical string)

$\star$: universal, dynamical。しかし一般に large-N 極限のダイナミクスの解析は困難

- 固有値密度
- 直交多項式
- SD eq.
- (super)symmetry
- 平均場近似 $\cdots$

行列の数が多いと現実問題として解けない! $\Rightarrow$ 何か "universal" な構造だけ抜き出す新しい解析法が編み出せないか?? $\Rightarrow$ 繰り込み群

2 Large-N 繰り込み群

Brézin-Zinn-Justine

Higuchi-Itoi-Nishigaki-Sakai

large-N 繰り込み群:

$(N+1)\times(N+1)$ 行列 $\longrightarrow N\times N$ 行列 s.t

$$M_{N+1}=\begin{pmatrix} M_N & v_i \\ {}^t v_i^* & \alpha \end{pmatrix}, \qquad e^{-S'_N(M'_N,g')}=\lambda_N(g)\int dv dv^*(d\alpha)\, e^{-S_{N+1}(M_N,v,g)}$$

$$S_{N+1}(M_{N+1})=(N+1)\mathrm{tr}_{N+1}\left(\frac{1}{2}M_N^2+\frac{g}{4}M_N^4\right)$$

$$=(N+1)\left[\mathrm{tr}_{N+1}\left(\frac{1}{2}M_N^2+\frac{g}{4}M_N^4\right)+v^*v\right]+(N+1)g\left[v^*M_Nv+\frac{1}{2}(v^*v)^2\right]$$

$$\to\quad S'_N(M_N)=(N+1)\left[\mathrm{tr}_N\left(\frac{1}{2}M_N^2+\frac{g}{4}M_N^4\right)\right]+g\,\mathrm{tr}_N M_N^2$$

$$\to\quad S'(M'_N)=N\mathrm{tr}_N\left(\frac{1}{2}M'^2_N+\frac{g'}{4}M'^4_N\right),\quad M_N=\rho M'_N,\quad \rho^2=\left(\frac{\frac{N}{2}}{\frac{N+1}{2}+g}\right)$$

$$\to\quad g'=g-\frac{1}{N}(g+4g^2)$$

$$\to\quad \beta(g)\equiv\frac{\partial g}{\partial\left(\frac{1}{N}\right)}=-g-4g^2\quad\longrightarrow\quad g^*=-1/4\ (-1/12),\quad \gamma_1=2\ (5/2)$$

$F_N(g) = \frac{1}{N^2}\log Z_N(g)$ がCallan-Symanzik方程式

$$\left[N\frac{\partial}{\partial N} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g)\right] F_N(g) = -r(g)$$

を満足するとする(N,g 依存性を規定)。

$$\beta(g) \equiv \frac{\partial g}{\partial\left(\frac{1}{N}\right)} \qquad g' = g + \frac{1}{N}\beta(g) + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2}) \quad \rightarrow \quad \beta(g) = -g - 4g^2 + \mathcal{O}(g^2)$$

2次元重力の場合(厳密な結果):

$$Z_{h=0} = \Delta^{\gamma_1} f(\Delta N^{2/\gamma_1}), \quad \Delta = g_c - g, \quad \gamma_1 = 5/2,$$

CS方程式に代入

$$\left[N\frac{\partial}{\partial N} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g)\right] Z_{h=0}(\Delta, N) = -r(g)$$

$$\rightarrow \quad \beta(g^*) = 0 \ (\beta'(g^*) > 0) \text{ において } \quad \gamma_1 = \frac{2}{\beta'(g^*)}$$

large-N 繰り込み群

$$\beta(g) = -g - 4g^2 \quad \rightarrow \quad g^* = -1/4 \ (g_c = -1/12), \quad \gamma_1 = 2 \ (\gamma_1 = 5/2)$$

large-N RGE で fixed point から臨界指数が分かる! $\Rightarrow$ double scaling limit

利点:

行列が複数あっても、action が複雑でも適用可能

欠点:

- 高エネルギー、低エネルギーの概念が不明 ($\longrightarrow$ 繰り込み群の locality) Wilson
- 行列模型と時空の関係:
  対角成分 $\sim$ 時空の点、D-brane の座標、 非対角成分 $\sim$ open string
  「対角成分から遠い順に積分」がふさわしい $\longrightarrow$ 性質のよい繰り込み群

行列の空間の中で「高/低エネルギーの概念」を同定してそれに基づいて
large-N くりこみ群を定式化したい

3 Large-N RG on fuzzy sphere

Fuzzy sphere:

角運動量演算子 $\hat{J}_1,\ \hat{J}_2,\ \hat{J}_3$:

$$\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = L(L+1), \quad N = 2L+1\text{-次元行列}$$

これを球の方程式と見なす! すると座標は $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$: 非可換

球面上の関数:

$$Y_{lm} = \sum_{i_1,\cdots,i_l} c^{(lm)}_{i_1\cdots i_l} x^{i_1}\cdots x^{i_l} \quad \to \quad T_{lm} = \sum_{i_1,\cdots,i_l} c^{(lm)}_{i_1\cdots i_l} \widehat{J}^{i_1}\cdots\widehat{J}^{i_l}$$

$$\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m}Y_{\ell m} \quad \to \quad \widehat{\phi} = \sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m}T_{\ell m} \quad : \quad \begin{array}{c} N\times N \text{ matrix} \\ (\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=-l}^{l} 1 = N^2) \end{array}$$

$$\int d\Omega\, Y_{lm}Y^*_{l'm'} = \mathrm{tr}(T_{lm}T^\dagger_{l'm'}) = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

$$\Delta Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm} \quad \to \quad [\hat{J}_i, [\hat{J}_i, T_{lm}]] = l(l+1)T_{lm}$$

- 回転対称性を保つ完全に有限な理論: $U(R)T_{lm}U(R)^{-1} = \sum_{m'=-l}^{l} T_{lm'}R^l_{mm'}(R)$
- 行列の空間に角運動量を実現

- **非可換平面 (Moyal 積): 運動量を実現、しかし無限次元行列でないと表現不可**
  $\longrightarrow$ **large-N くりこみ群への適用には不向き**

fuzzy sphere上のlarge-N繰り込み群　($2L = N-1$: Nから来るlのcutoff)

Hermite行列: $\phi = \sum_{l,m} \phi_{lm} T_{lm} \quad (\phi_{lm}^* = (-1)^m \phi_{l\,-m})$ に対する$N \times N$行列模型

$$
\begin{aligned}
S_N =& \frac{\rho_N^2}{N} \mathrm{tr}_N \left(-\frac{1}{2\rho_N^2} [J_i,[J_i,\phi]] + \frac{m_N^2}{2}\phi^2 + \frac{g_N}{4}\phi^4 \right) \\
=& \sum_{lm} \frac{1}{2} (l(l+1) + \rho_N^2 m_N^2) \phi_{lm}^* \phi_{lm} \\
&+ \frac{N\rho_N^2 g_N}{4} \sum_{\substack{l_r, m_r \\ (r=1\sim 4)}} \prod_{r=1}^{4} \phi_{l_r m_r} \\
&\times \sum_{l,m} (-1)^m (2l+1) \begin{pmatrix} l_1 & l_4 & l \\ m_1 & m_4 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_2 & l_3 \\ m & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l_4 & l \\ L & L & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & l_2 & l_3 \\ L & L & L \end{Bmatrix},
\end{aligned}
$$

に対し、cutoffモード$\phi_{2L\,m}$のみを積分してeffective Lagrangianを構成:

$$
e^{-S_{N-1}} = \int \prod_{m=-2L}^{2L} d\phi_{2L\,m}\, e^{-S_N}, \quad \left(\sum_{m=-2L}^{2L} 1 = 4L+1 = 2N-1 = N^2 - (N-1)^2 \right)
$$

し、S_{N-1}を改めて$(N-1)\times(N-1)$行列模型として書き直す。

その際$(m_N^2 . g_N) \;\to\; (m_{N-1}^2, g_{N-1}) \qquad \Longrightarrow$ RGE, β-関数

- 高エネルギー側を積分 $\rightarrow$ 新しい $N \rightarrow (N-1)$ の行列模型間の写像

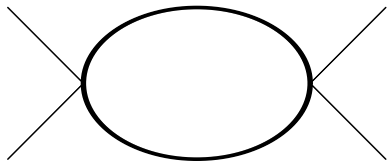
  「局所的」な性質の良いものになっているはず

  (※ favor する基底の取り方の違い: 「局所的」変換には重要、「時空」の概念)

- しかし S_{N-1} が行列の積、trace にまとまるかは自明ではない (ように見える):

  e.g. vertex correction:

$$\frac{g^2}{8} \int dx \int dy\, \phi(x)^2 \phi(y)^2 \Delta(x-y)^2 \quad : \text{bilocal field}$$

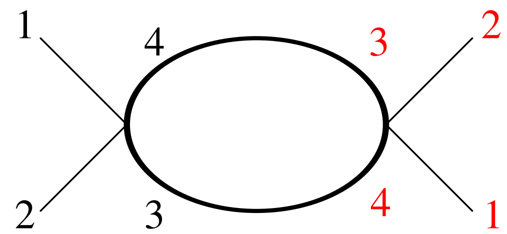


  $\rightarrow$ Δ の振る舞いが良ければ derivative 展開により local field の無限和 $\rightarrow$ 今は?

4 Properties

1. 一般には multi trace interaction が生成される

   e.g. vertex correction:



$$\Delta_{2L}^2 \mathrm{tr}_N\left(\phi^2 T_{2L\,m} T_{2L\,m'}\right) \mathrm{tr}_N(\phi^2 T_{2L\,m'} T_{2L\,m})$$

$$\Delta_{2L} = \frac{1}{N(N-1)+\rho_N^2 m_N^2}$$

$$\sum_{l,m}(-1)^m(2l+1)\begin{pmatrix} l_1 & l_4 & l \\ m_1 & m_4 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & l_2 & l_3 \\ m & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} l_1 & l_4 & l \\ L & L & L \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l & l_2 & l_3 \\ L & L & L \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l & 2L & 2L \\ L & L & L \end{Bmatrix}^2,$$

しかし $l \ll L \to \begin{Bmatrix} l & 2L & 2L \\ L & L & L \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^l}{\sqrt{(2N-1)N}}\left(1 - \frac{l(l+1)}{4N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right),$

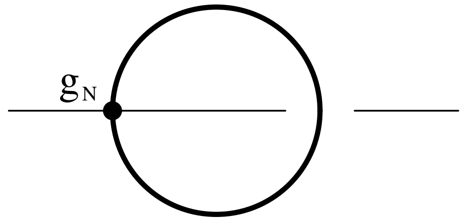
から上式は、$\frac{\Delta_{2L}^2}{(2N-1)N}\left(\mathrm{tr}_N\phi^4 - \frac{1}{2N}\mathrm{tr}_N\left(\phi^2[L_i,[L_i,\phi^2]]\right) + \cdots\right)$

外線運動量 $\ll L$ なら行列の空間の"derivative 展開"により single trace の無限和

局所性: $l = 2L$ のモードを積分したため (注: $\Delta_{2L} : \mathcal{O}(1/N^2) \ll 1$)

2. nonplanar diagram は "nonlocal" な変換を含む項を induce する

e.g. mass term correction



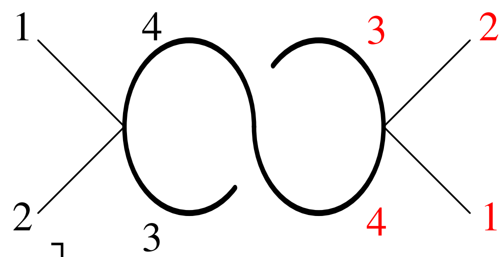
$$
\begin{aligned}
&g_N\Delta_{2L}\mathrm{tr}_N(\phi T_{2L\,m}\phi T_{2L\,-m})\\
&\propto\ g_N\Delta_{2L}\sum_{l,m}(-1)^l\phi^*_{lm}\phi_{lm}\begin{Bmatrix} L & L & 2L\\ L & L & l\end{Bmatrix}\\
&=\ g_N\Delta_{2L}\sum_{l,m}(-1)^l\phi^*_{lm}\phi_{lm}\frac{1}{N}\left(1-\frac{l(l+1)}{N}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

"antipode"変換: $\phi=\sum_{lm}\phi_{lm}T_{lm}\mapsto\phi^A\equiv\sum_{lm}(-1)^l\phi_{lm}T_{lm}$

$$
=\frac{g_N\Delta_{2L}}{N}\left[\mathrm{tr}_N\left(\phi^A\phi\right)+\frac{1}{N}\mathrm{tr}_N\left([L_i,\phi^A][L_i,\phi]\right)+\cdots\right]
$$

"antipode変換" $Y_{lm}(\theta,\phi)\rightarrow Y_{lm}(\pi-\theta,\phi+\pi)=(-1)^lY_{lm}(\theta,\phi)$ の行列版。

時空はないがその存在を知っている?



nonplanar vertex correction も

$$
\begin{aligned}
&g_N^2\Delta_{2L}^2\mathrm{tr}_N\left(\phi^2T_{2L\,m}T_{2L\,m'}\right)\mathrm{tr}_N(\phi^2T_{2L\,m}T_{2L\,m'})\\
&=g_N^2\Delta_{2L}^2\left[\mathrm{tr}_N\left(\phi^2{\phi^A}^2\right)+\frac{1}{2N}\mathrm{tr}_N\left([L_i,\phi^2][L_i,{\phi^A}^2]\right)+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

3. 非可換性は繰り込まれる!

recall 非可換性 $\sim 1/N$, large-N 繰り込み群: $N \longrightarrow N-1$ 粗視化

非可換性は vertex に入る: N 依存性は $6j$ のみで、$l \ll N$ であれば

$$\begin{Bmatrix} a & b & l \\ L & L & L \end{Bmatrix} = \frac{-2L\sqrt{(2L+l+1)(2L-l)}}{\sqrt{(2L+a+1)(2L-a)(2L+b+1)(2L-b)}} \begin{Bmatrix} a & b & l \\ L-\frac{1}{2} & L-\frac{1}{2} & L-\frac{1}{2} \end{Bmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$\longrightarrow (N-1) \times (N-1)$ 行列模型の 4 点 vertex として書ける。

scale変換

通常の繰り込み群: $\Lambda/b \le p \le \Lambda$を積分、$p \to bp$: エネルギースケールを$b$倍

今はcutoff modeのCasimir energy[2]が不変になるように

$$\frac{2L(2L+1)}{\rho_N^2} = \frac{2L(2L-1)}{\rho_{N-1}^2}$$

でρ_{N-1}を定義。つまり$b_N = \dfrac{1/\rho_N}{1/\rho_{N-1}} = 1 + \dfrac{1}{N}$

b倍のスケール変換の元で、bの何乗で振る舞うかがscaling dim.

$\to$ scaling dim$= d \Leftrightarrow$ 繰り込み変換の固有値が$(1+1/N)^d \simeq 1 + d/N$

NCFT limit (different large-N limit)

$$N \to \infty \quad \text{with} \quad \theta = \frac{2\rho^2}{N} : \ \text{fixed}$$

Chu-Madore-Steinacker

つまり

$$\frac{\rho_N^2}{N} = \frac{\rho_{N-1}^2}{N-1} \quad \Rightarrow \quad b_N = 1 + \frac{1}{2N}$$

fuzzy sphere上、非可換平面上の場の理論両方を一気に記述でき、かつscaling dimensionの読み取り方も明白。

5 Fixed point analysis

繰り込み変換の固定点 $\sim$ large-N limit (**理論の定義**)

固定点の周りでの変換の固有値 $\sim$ **理論のオペレーターの** scaling dim.

<u>RGE</u>

$$m_{N-1}^2 = b_N^2 \left(m_N^2 + g_N B_1(N, m_N^2) - \rho_N^2 g_N^2 B_1(N, m_N^2) B_2(N, m_N^2)\right),$$

$$g_{N-1} = b_N^2 (g_N - \rho_N^2 g_N^2 B_2(N, m_N^2)),$$

$$B_1(N, m_N^2) = 2(2N-1)P_N, \quad B_2(N, m_N^2) = 2(2N-1)P_N^2,$$

$$P_N = \frac{1}{N(N-1) + \rho_N^2 m_N^2} (= \Delta_{2L}).$$

<u>**重要な注意**</u>

- nonplanar diagrams **は必ず** antipode **を含む項を** induce (up to $\mathcal{O}(g_N^2)$)
  $\longrightarrow$ **無視。** fixed point **の存在そのもの、** scaling dim. **等に影響しないことを仮定。**
  (irrelevant **ではない。** UV/IR mixing **等に対する予言能力はない。**)
- higher order terms **は強く** suppress: locality $\Leftarrow$ fuzzy sphere **の構造に依拠した我々の定式化**
- **場の理論の繰り込み群との対応が** straightforward (cf. BZ)

fixed points:

- Gaussian fixed point $m_* = g_* = 0$. この周りで展開

$$m_{N-1}^2 = b_N^2 (m_N^2 + g_N B_1(N)), \quad g_{N-1} = b_N^2 g_N$$

m^2, g のscaling dim. は2、 critical surface: $m_c^2(g) = -(4\log N)g + \mathcal{O}(1/N)$

- nontrivial fixed point (analogous to Wilson-Fisher)

通常の場の理論のようにnontrivial scaling dim. を仮定: $g_N \longrightarrow c(N) g_N$

$$m_*^2 = -\frac{N(N-1)}{\rho_N^2} \frac{b_N^2 (\frac{c(N)}{c(N-1)} b_N^2 - 1)}{\frac{c(N)}{c(N-1)} b_N^4 - 1}, \qquad g_* = \cdots ,$$

$$\delta m^2 \ : \ b_N^2 \left(2 - \frac{c(N)}{c(N-1)} b_N^2\right), \qquad \delta g \ : \ \left(\frac{c(N)}{c(N-1)} b_N^2\right)^{-1}.$$

fuzzy sphere case (fixed α) $\rho_N^2 \simeq N^2\alpha^2/4$

$$(m_*^2, g_*) = \left(-\frac{2}{\alpha^2}, \frac{1}{2c\alpha^2}\right), \qquad \text{scaling dim.}: \quad \delta m^2 : 0 \quad \delta g : -2$$

NCFT case (fixed θ) $\rho_N^2 = N\theta/2$

$$(m_*^2, g_*) = \left(-\frac{4N}{3\theta}, \frac{1}{9c\theta}\right), \qquad \text{scaling dim.}: \quad \delta m^2 : -2 \quad \delta g : -4$$

large ρ_N^2 limit

$$\text{RGE} \to m_*^4 = \frac{2(2N-1)}{b_N^2 - 1}\frac{g_*}{\rho_N^2} : \text{ phase transition line}$$

other approaches (disordered-matrix phase transition for $\rho \gg 1$, $g = \frac{1}{4\pi}$)

numerical : $\dfrac{m^2}{N} = -\dfrac{0.56}{R}$, Martin

eigenvalue distribution : $\dfrac{m^2}{N} = \pm\dfrac{3}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{R} = \pm\dfrac{0.846}{R}$. Steinacker

ours : $\dfrac{m_*^2}{N} = \pm\dfrac{0.564}{R} \quad (N \to \infty)$

2次元重力

kinetic termを落とす。

$\beta(g) = -2g - 12g^2 \Rightarrow g_c = -1/6$, $\gamma_1 = 1$ (exact: -1/12, 5/2, BZ: -1/4, 2)

$\Rightarrow$ 回転対称性を保っている、antipodeを落とした。

6 Discussions

- 非可換空間により行列に「運動量」を持ち込み、新しい large-N 繰り込み群を構成 $\longrightarrow$ 素性が良い。”局所的”

- 回転対称性は保つ $\longrightarrow$ derivative correction は $[L_i,[L_i,\cdot]]$ の形

- 非可換性は繰り込まれ、粗視化

- UV/IR への知見。“nonlocal” matrix model を考える必要?

$$S_N = N\mathrm{tr}_N\left(-\frac{1}{2}[L_i,\phi]^2 - \alpha[L_i,\phi][L_i,\phi^A] + \frac{\rho_N^2 m^2}{2}\phi^2 + \rho_N^2\widetilde{m}^2\phi\phi^A + \cdots\right),$$

- fuzzy torus では運動量保存を破る項が出てしまう:

$$\delta^{(N)}\left(\sum_r p_\mu^{(r)}\right) \quad \overset{?}{\longrightarrow} \quad \delta^{(N-1)}\left(\sum_r p_\mu^{(r)}\right)$$

- large-N ゲージ理論への適用。S^2 上 CSMM などすぐできそう。量子重力理論の universality、連続極限の取り方
$\longrightarrow$ universality, integrability in the large-N limit
(large-N reduced model, KP, spin chain, AGT, $\cdots$)