Rotating string in doubled geometry with generalized isometries

酒谷 雄峰 (MISC, 京産大)

[arXiv:1205.5549, to appear in PRD. 菊池徹 氏 (NIMS/KEK)、岡田崇 氏 (京大) との共同研究]

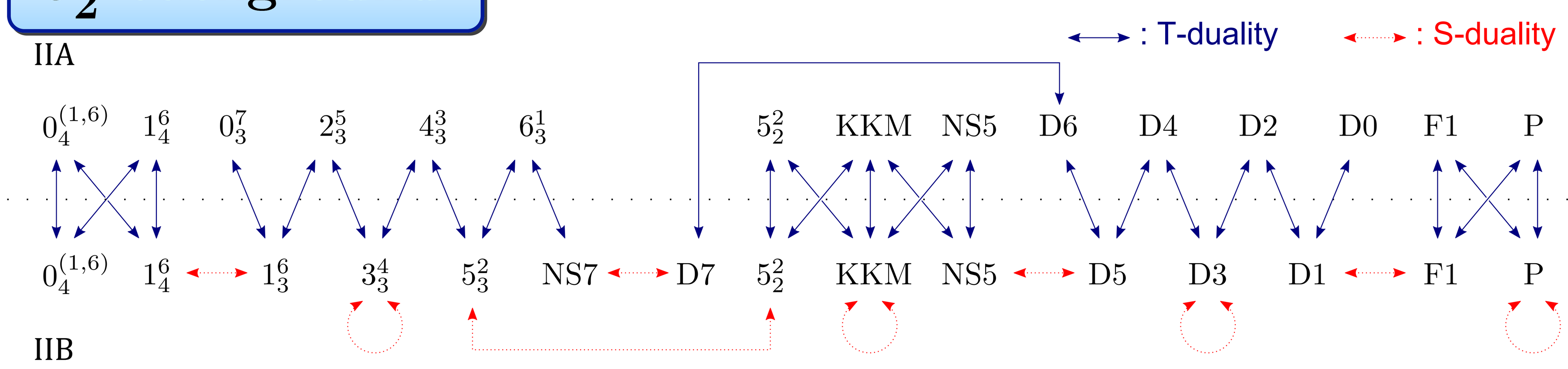
Motivation

T-fold: T-duality 群を transition function として持つ多様体.
⇒ ある非自明な cycle を一周回ると
背景場 ($G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ など) の値が T-dual 変換された値に変化し得る.
⋆ T-fold は string 理論に実際に存在する.
→ 例: 5^2_2 background [J. de Boer and M. Shigemori, PRL 104, 251603 (2010).]

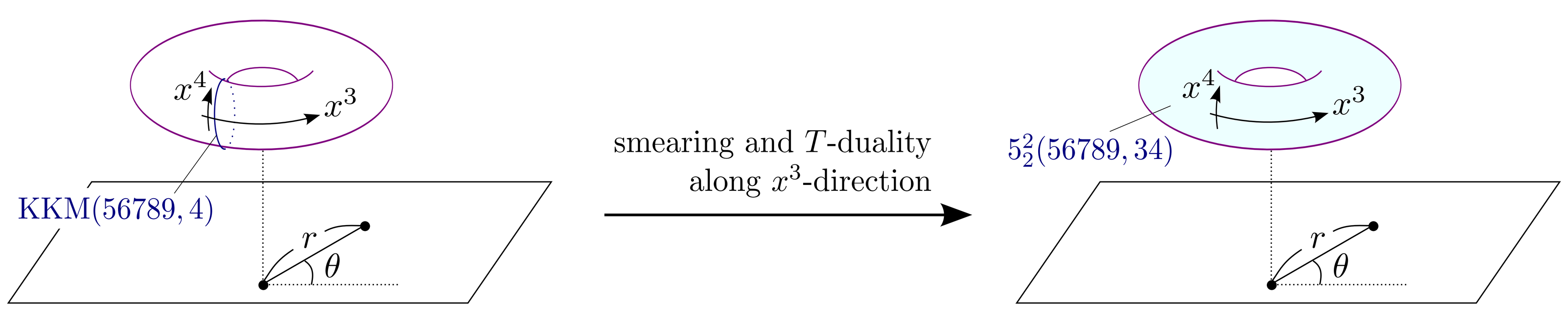
T-fold 上の非自明な cycle に沿って probe を回すと
probe の持つ charge はどう変化するのか? (T-dual 変換される?)

5^2_2 background

$[b^c_n$: mass $= R_{i_1}\cdots R_{i_b}(R_{j_1}\cdots R_{j_c})^2/g^n_s]$



構成 1: (smeared KKM → 5^2_2) [de Boer-Shigemori]



$$
\begin{aligned}
ds^2 &= H(r)\,(dr^2 + r^2 d\theta^2) + H(r)\,K^{-1}(r,\theta)\,dx^2_{34} + dx^2_{056789}\,, \\
B^{(2)} &= -K^{-1}\gamma\,\theta\,dx^3\wedge dx^4\,, \quad e^{2\phi} = H\,K^{-1}\,, \qquad \cdots(☆1) \\
H(r) &\equiv h + \gamma\,\log(\mu/r)\,, \quad K(r,\theta) \equiv H^2 + \gamma^2\theta^2\,.
\end{aligned}
$$

⇒ Generalized metric (in the x^3-x^4 space):

$$
(\mathcal{H}_{AB}) \equiv \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -B\,G^{-1} & G - B\,G^{-1}B \end{pmatrix} = \frac{1}{H}\begin{pmatrix} K\,\mathbb{1} & -\gamma\theta\epsilon \\ \gamma\theta\,\epsilon & \mathbb{1} \end{pmatrix},
$$

$$
\left[G \equiv \begin{pmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44}\end{pmatrix},\ B \equiv \begin{pmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44}\end{pmatrix},\ \mathbb{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{and } \epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right].
$$

性質: $\mathcal{H}(\theta) = \Omega^{\mathrm{T}}_\theta\,\mathcal{H}(\theta=0)\,\Omega_\theta\,, \quad \Omega_\theta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \gamma\theta\epsilon & \mathbb{1}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2,2,\mathbb{R})$

注意点1: monodromy: $\Omega_{\theta=2\pi} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 2\pi\gamma\epsilon & \mathbb{1}\end{pmatrix} \not\in \mathrm{O}(2,2,\mathbb{Z})$.

注意点2: $r = r_c \equiv \mu\,e^{h/\gamma}$ で 曲率が発散する. (時空は $0 < r < r_c$)

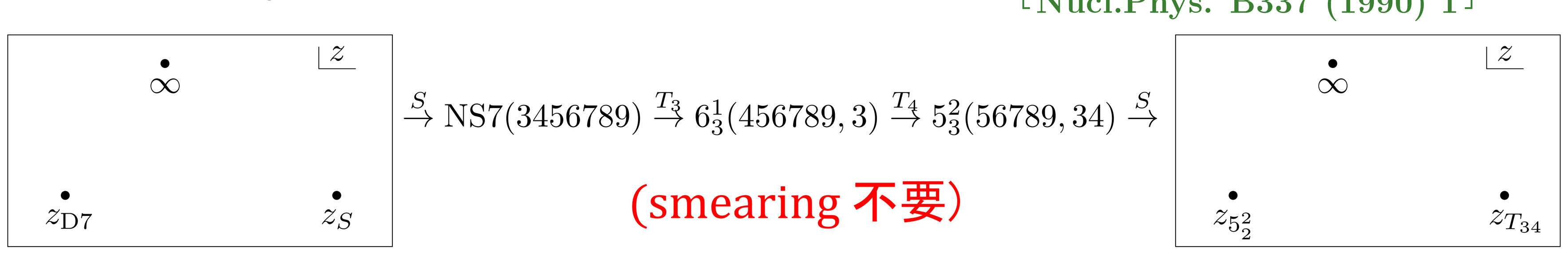
構成 2: (D7 → NS7 → 6^1_3 → 5^2_3 → 5^2_2) [Kikuchi-Okada-Y.S.]

$$
ds^2 = dx^2_{03456789} + \lambda_2\,|f|^2\,dz\,d\bar{z}\,, \quad \lambda(z) = \lambda_1 + i\lambda_2\,, \quad f = f(z)\,,
$$

$$
\lambda(z) = j^{-1}\Big(\frac{z_S - z_{D7}}{z - z_{D7}}\Big)\,, \quad j(\lambda) \equiv \frac{\big(\vartheta_2(\lambda)^8 + \vartheta_3(\lambda)^8 + \vartheta_4(\lambda)^8\big)^3}{\eta(\lambda)^{24}}\,,
$$

$$
f(z) = \rho_0^{\frac{1}{8}}\,\eta(\lambda)^2\,(z - z_{D7})^{-\frac{1}{12}}\,(z - z_S)^{-\frac{1}{4}}\,.
$$

[Greene-Shapere-Vafa-Yau, Nucl.Phys. B337 (1990) 1]



$$
\Rightarrow \quad ds^2 = \lambda_2\,|f|^2\,dz\,d\bar{z} + \tfrac{\lambda_2}{|\lambda|^2}\,dx^2_{34} + dx^2_{056789}\,, \quad B_{34} = -\tfrac{\lambda_1}{|\lambda|^2}\,.
$$

$z_{5^2_2}$ 近傍 ⋯ $r_c = |z_S - z_{D7}|$, $\gamma = \frac{1}{2\pi}$ という同一視により (☆1) を再現.

長所:
- global に定義された geometry を得た.
- charge が正しく量子化されている: $\Omega_{\theta=2\pi} \in \mathrm{O}(2,2;\mathbb{Z})$.
- 曲率が発散する半径 r_c は隣の brane との距離として理解できる.

Rotating F-string solutions

⋆ 5^2_2 background (☆1) 上を回転する string の古典解を求める.

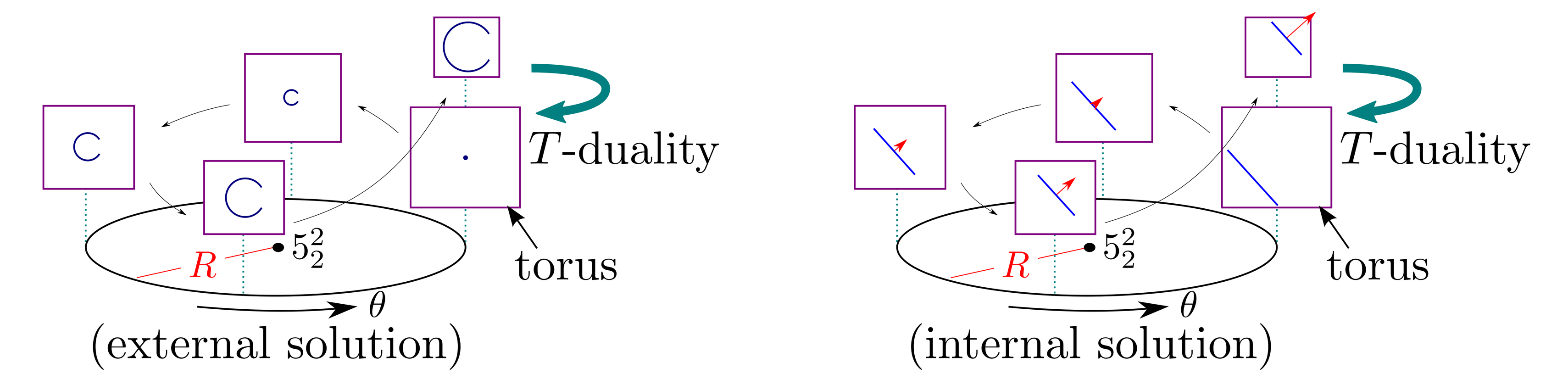
Ansatz:
$$
\begin{aligned}
&X^0(\sigma,\tau) = a\,\tau\,, \quad X^r(\sigma,\tau) = R \quad (a, R: \text{ 正定数})\,, \\
&X^\theta(\sigma,\tau) = \omega\,\tau\,, \quad X^3(\sigma,\tau),\ X^4(\sigma,\tau): \text{ 任意関数}\,, \\
&X^i(\sigma,\tau) = 0 \quad (i = 5,\ldots,9)\,.
\end{aligned}
$$

• External solution ($e^{-\frac{1}{2}}r_c \le R < r_c$):

$$
\mathrm{X}(\sigma,\tau) \equiv X^3 + iX^4 = \mathrm{x}_0 + a\,\tau\,\underbrace{\sqrt{\frac{H}{2}\,\frac{\gamma - 2H}{\gamma - H}}}_{\text{const.}}\,e^{i\kappa(\sigma - \sigma_0)} \quad (\kappa \equiv \gamma\,\omega/H)\,.
$$

• Internal solution ($0 < R \le e^{-\frac{1}{2}}r_c$):

$$
\mathrm{X}(\sigma,\tau) \equiv X^3 + iX^4 = \mathrm{x}_0 + \alpha\,\kappa\,\tau^2 - 2i\,\alpha\,\sigma \quad (\alpha \in \mathbb{C})\,.
$$



• Charge density [O(2,2)-vector]:

$$
(Z^A(\tau,\sigma))_{\text{external}} = \begin{pmatrix} P_3(\tau,\sigma) \\ P_4(\tau,\sigma) \\ X^{3\prime}(\tau,\sigma) \\ X^{4\prime}(\tau,\sigma)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{H}\sqrt{\frac{H}{2}\frac{\gamma-2H}{\gamma-H}}\cos\kappa\sigma \\ \frac{a}{H}\sqrt{\frac{H}{2}\frac{\gamma-2H}{\gamma-H}}\sin\kappa\sigma \\ -a\sqrt{\frac{H}{2}\frac{\gamma-2H}{\gamma-H}}\,\kappa\tau\sin\kappa\sigma \\ a\sqrt{\frac{H}{2}\frac{\gamma-2H}{\gamma-H}}\,\kappa\tau\cos\kappa\sigma \end{pmatrix}, \quad (Z^A(\tau,\sigma))_{\text{internal}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,\mathrm{Im}\,\alpha \\ -2\,\mathrm{Re}\,\alpha\end{pmatrix}.
$$

特徴: $\boxed{Z^A(\tau,\sigma) = \Omega^{-1}_{\theta=\omega\tau}Z^A(\tau=0,\sigma) \quad \Big(\Omega^{-1}_{\theta=\omega\tau} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\gamma\omega\tau\epsilon & \mathbb{1}\end{pmatrix}\Big)}$ ⋯(☆2)

⇒ Hamiltonian: $\mathrm{H} = \int d\sigma\,Z^A\,\mathcal{H}_{AB}\,Z^B + \cdots$ は τ に依らない.
※ 実は, (☆2) を要請すると解は上記の形のものしか存在しない.

⋆ (☆2) の意味を理解するため, doubled formalism を導入する.

Double field theory

目標: supergravity を T-duality covariant に formulate したい.

• Double the spacetime coordinates:
$$
(y^I) = (\tilde{x}_i,\ x^i) \leftrightarrow (\partial_I) = (\tilde{\partial}^i,\ \partial_i) \quad (i = 0,\ldots,9)\,.
$$

• 基本的な場 (NS-NS sector): $(\mathcal{H}_{IJ}(y),\ d(y))$.

• Constraints: $\partial^I F(y)\,\partial_I G(y) = 0 = \partial^I\partial_I F(y)$.

• Action: $S_{\text{DFT}} = \int d^{20}y\,e^{-2d}\,\mathcal{R}\,.$ [O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, JHEP 1008, 008 (2010)]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} \equiv\ & 4\mathcal{H}^{IJ}\,\partial_I\partial_J d - \partial_I\partial_J\mathcal{H}^{IJ} - 4\mathcal{H}^{IJ}\,\partial_I d\,\partial_J d + 4\partial_I\mathcal{H}^{IJ}\,\partial_J d \\
& + \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{IJ}\,\partial_I\mathcal{H}^{KL}\,\partial_J\mathcal{H}_{KL} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{IJ}\,\partial_I\mathcal{H}^{KL}\,\partial_K\mathcal{H}_{JL}\,.
\end{aligned}
$$

• Gauge symmetry [Generalized Lie dierivative で生成]:
$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_\xi V_I &\equiv \xi^J\partial_J V_I + (\partial_I\xi^J - \partial^J\xi_I)\,V_J\,, \\
\widehat{\mathcal{L}}_\xi V^I &\equiv \xi^J\partial_J V^I + (\partial^I\xi_J - \partial_J\xi^I)\,V^J\,,
\end{aligned}
$$

• Gauge fixing: $\tilde{\partial}^i = 0$
$$
\Rightarrow\ S_{\text{DFT}} = \int d^{10}x\sqrt{-G}\ e^{-2\phi}\Big(R_G + 4(\partial_M\phi)^2 - \tfrac{1}{12}\,(H_{LMN})^2\Big)
$$

実は 5^2_2 background は“軸対称”:

$$
\boxed{\widehat{\mathcal{L}}_{\xi_{\text{axi}}}\mathcal{H}_{IJ} = 0\,, \qquad \xi_{\text{axi}} \equiv \partial_\theta + \gamma\,\tilde{x}_3\partial_4\,.}
$$

一方, (☆2) は $\boxed{\widehat{\mathcal{L}}_\xi Z^I = 0}$ として理解できる:

$$
\begin{aligned}
\xi(y) &\equiv a\,\partial_0 + \omega\,\xi_{\text{axi}} + (\partial^I\phi)\,\partial_I \qquad \leftarrow \text{Generalized Killing} \\
\phi &\equiv \begin{cases} a\,\dfrac{(x^3 - x^3_0)\,\tilde{x}_3 + (x^4 - x^4_0)\,\tilde{x}_4}{x^0} & \text{(external solution)}\,, \\[2ex] \dfrac{2\kappa}{a}\,x^0\,([\mathrm{Re}\,\alpha]\,\tilde{x}_3 + [\mathrm{Im}\,\alpha]\,\tilde{x}_4) & \text{(internal solution)}\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

※ ξ^I は worldsheet 上では $\frac{\partial}{\partial\tau} = \dot{X}^I(\tau,\sigma)\,\frac{\partial}{\partial X^I}$ に一致.

⇒ 今回構成した回転する string 解は, charge が一定の解であった.

Future direction

• 一周すると charge が変化する配位も調べたい.
例1: 一周すると winding charge がなくなる (ほどける).
[R. Gregory, J. A. Harvey and G. W. Moore, Adv. Theor. Math. Phys. 1, 283 (1997)]
例2: 一周すると probe brane が異なる brane に変化する.

• 一般の U-fold も同様に記述できる幾何学的枠組みはあるのか?