蒸発するブラックホールの時空構造

京大　横倉祐貴

（共同研究者：川合光、松尾善典）

arXiv: 1203.5719

＠2012　研究会「場の理論と弦理論」

Introduction 1:
BHの蒸発の従来の見方と問題点

重力崩壊

↓

event horizonと特異点の形成

↓（QFT in curved space）

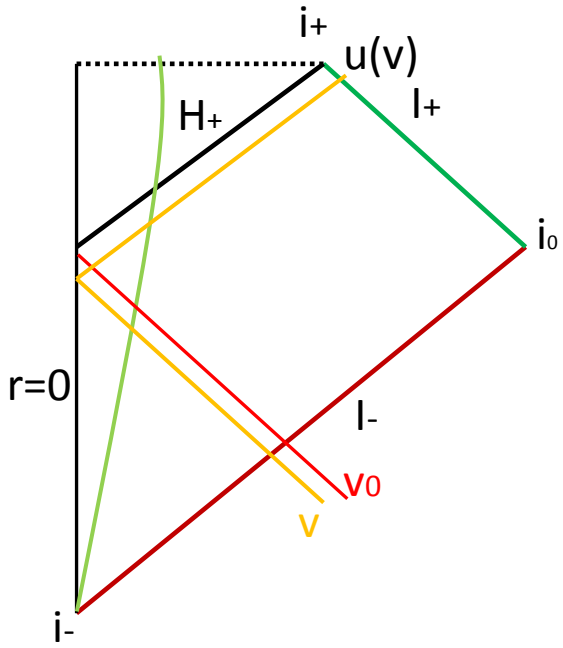
Hawking輻射 [Hawking 1975]

↓（負のエネルギー流）

ブラックホール蒸発

↓

情報喪失？ [Hawking 1976]

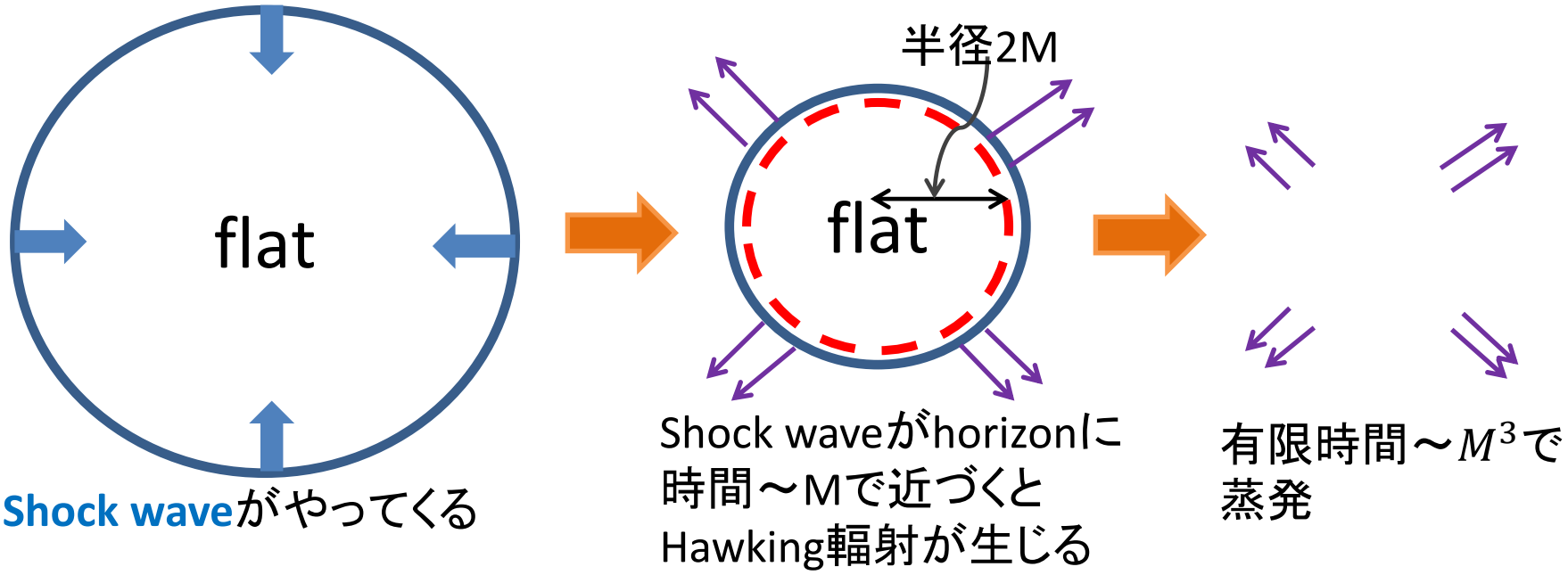


＜問題点＞

- event horizonが蒸発 ⇒ 外の世界はmixed stateになる
- 特異点⇒中に落ちていく人は有限時間でぶつかる。
  蒸発後はどうなる？

Introduction 2 : Motivation

- 古典的な重力崩壊では、外の人には無限の時間かかって、ホライズンや特異点が生じる
- ⇒「外の人から見て有限時間でブラックホールが蒸発するならば、event horizonも特異点もないのではないか？」



Introduction3:結果

- このnaiveな描像を表現する計量を構成した。つまり蒸発のback reactionを含むself-consistent な解$g^{(0)}{}_{\mu\nu}$を構築した。

Semi-classical Einstein方程式

$$0 = \frac{\delta S_{eff}}{\delta g^{(0)}{}_{\mu\nu}} = G^{(0)}{}_{\mu\nu} - \kappa^2 \langle T^{(0)}{}_{\mu\nu} \rangle$$

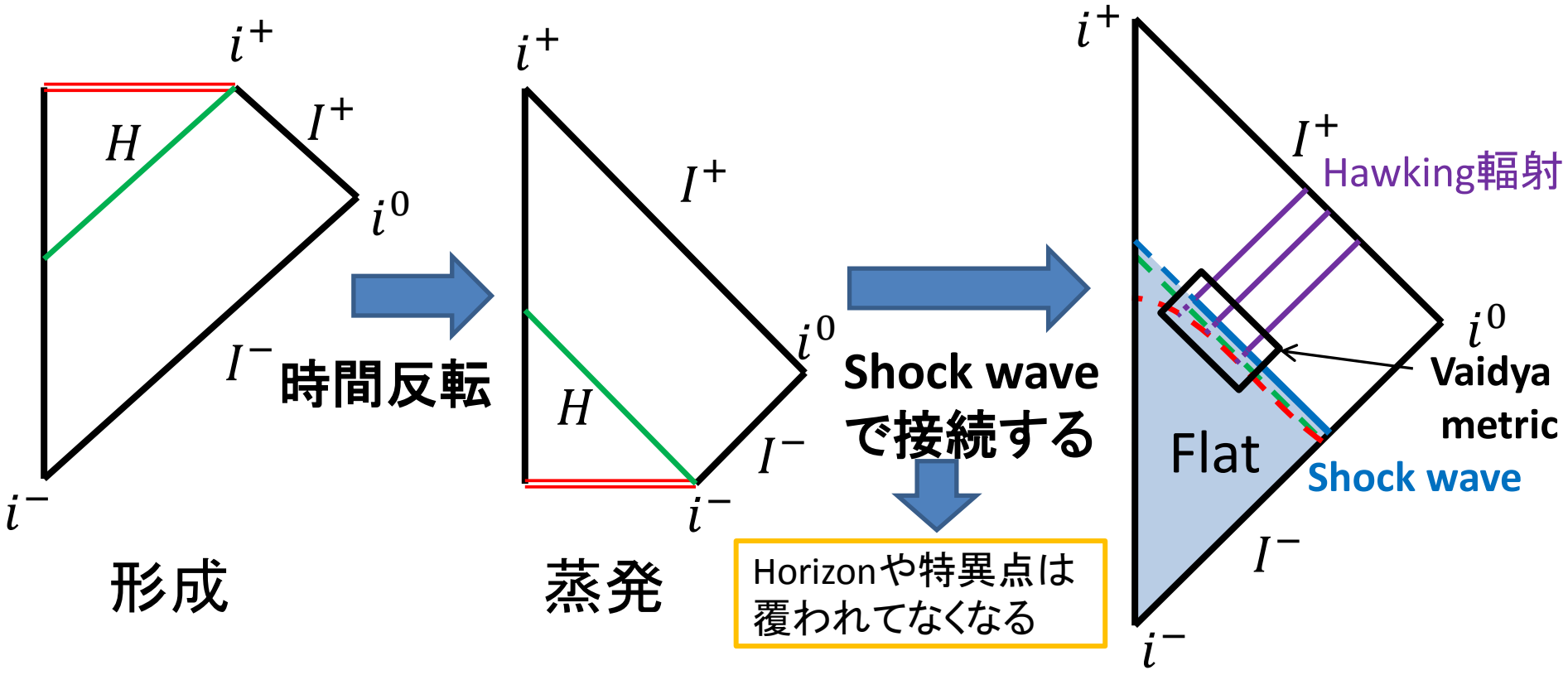
Hawking 輻射

このときに次の2つの機構を利用する

- Hawking輻射はhorizonが存在しなくても生じる。
- Weyl anomaly は重力の揺らぎによりキャンセルされる。

⇒その結果、horizonも特異点も生じることなく、重力崩壊から蒸発までが起きる

モデルの構築1：The model



今回は形成から蒸発までを最も簡単に記述できるモデルとして、次を考える：

The model=flat + shock wave + outgoing Vaidya

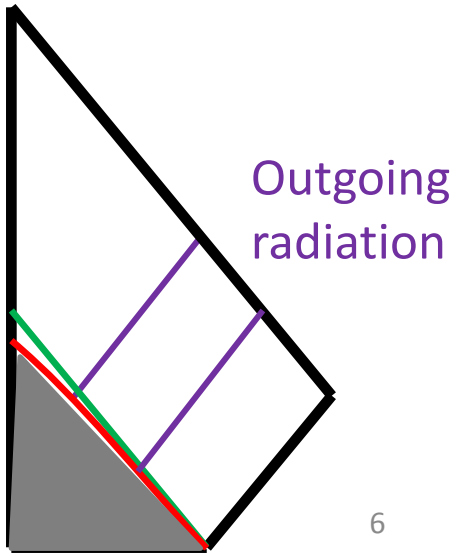
（ただし、Gray-body factorは無視している。後で取り入れる。）

モデルの構築2：The outgoing Vaidya metric

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a(u)}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2$$

～outgoing radiationを記述する時空

- The Bondi mass $m(u) = \frac{a(u)}{2}$
- Traceless $G_{ab}g^{ab} = 0$
- only (u,u)-component $G_{uu} = -\frac{\dot{a}(u)}{r^2}$
- ``apparent horizon” $r = a(u)$



モデルの構築3：
ホライズン近くのエネルギー運動量テンソルの評価

- Scalar field ϕ in $ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$ $\quad f(r) = 1 - \frac{a}{r}$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2} {m_0}^2\phi^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{l,m}\int dt dr_* \, \phi_{l,m}({\partial_t}^2 - {\partial_{r_*}}^2 + V_l(r))\phi_{l,m}$$

$$T_H{}^2 \sim V_l(r) = f(r)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\partial_r f(r)}{r} + {m_0}^2\right)$$

Conformal! $T^\mu{}_\mu = 0$

Eikonal 近似を使用

- $T_{\mu\nu}$ for $f \sim 0$

$$-T^t{}_t \sim T^r{}_r \sim \frac{\omega^2}{f(r)}|\phi|^2, \qquad T^\theta{}_\theta \sim \frac{l^2}{r^2}|\phi|^2$$

$\omega \sim T_H \sim \frac{1}{a}$ **仮定** $l \le l_c$ ⇒ $T^r{}_r \gg T^\theta{}_\theta$

気持ち： $V_l(r)$の外では$l \sim 1$であるので、もしモード間の散乱がなければ、horizon近傍でも、$l \sim 1$であろう。

ホライズン近傍では $T^\mu{}_\mu = 0 \ and \ T^\theta{}_\theta = 0$

⇒この仮定の下では、outgoing Vaidyaは、horizon近傍では、解として許される。

HorizonがなくてもHawking輻射は生じる

- 粒子生成 $< 0|{b_\omega}^\dagger b_\omega|0 >= \int_0^\infty d\omega' \, |A_{\omega,-\omega'}|^2$

⇒$A_{\omega,-\omega'} = \left(\phi_u(\omega), {\tilde{\phi}^*}_{\tilde{u}}(\omega')\right)$を求めよ

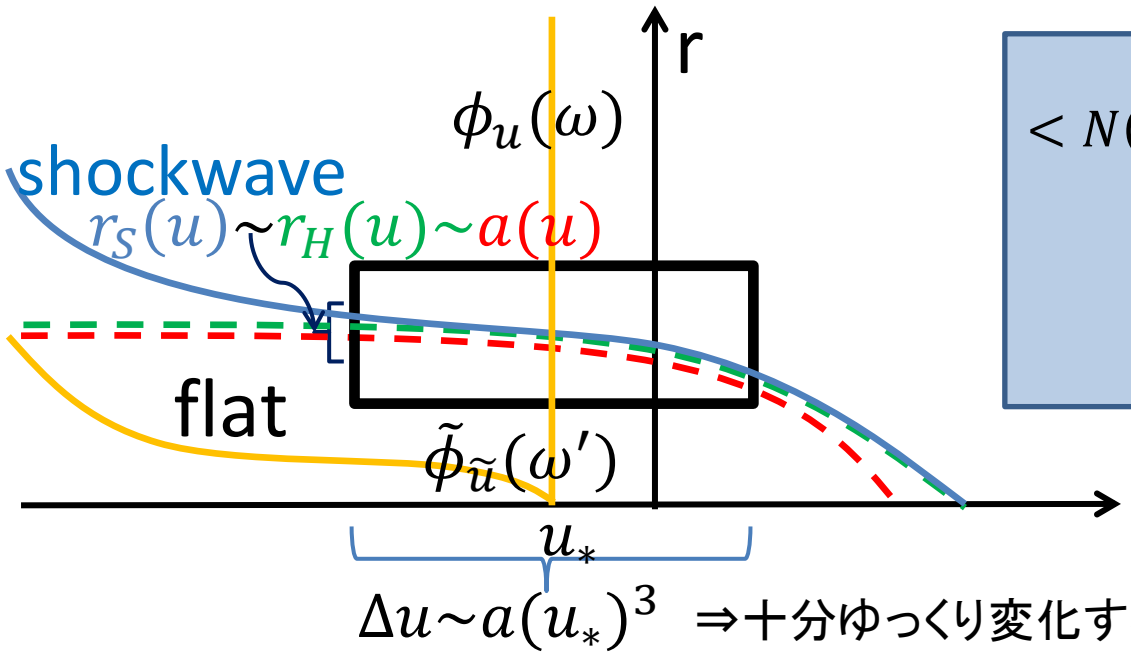
⇒Eikonal近似では関係式$\tilde{u} = \tilde{u}(u)$を求めればよい

⇒接続条件⇒ $$\tilde{u}(u) = \frac{2f}{a(u_*)^2} + D_* e^{-\frac{u}{2a(u_*)}} + C_*$$

[Barcelo et al 2011]

$$< N(u_*;\omega) >= \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T_*}) - 1}$$

$$T(u_*) = \frac{\hbar}{4\pi a(u_*)}$$



⇒十分ゆっくり変化する⇒$\tilde{u}(u)$が計算可能

Weyl anomaly cancellation 1

一般に曲がった時空上では量子効果によりWeyl anomalyが生じる。
⇒もし量子効果によりWeyl anomalyが存在すると、Vaidya metricは解として許されなくなる。
⇒ここでは「たとえ量子効果を考慮しても、ホライズン近傍では、エネルギー運動量テンソルはトレースレスになる」を示す

$$S[g_{\mu\nu}, X] = S_{EH}[g_{\mu\nu}] + S_{matter}[X, g_{\mu\nu}]$$

任意の基準計量$\hat{g}_{\mu\nu}$を用いて、$g_{\mu\nu} = e^{\phi}\hat{g}_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$とする。

⇒量子論では $[dh_{\mu\nu}]_g[d\phi]_g$はwell-definedではないので、2d quantum gravityのように、$\hat{g}_{\mu\nu}$により定義し、Liouville actionに対応したものを導入する: [Distler-Kawai 1989]

$$\frac{[dX]_g[dg_{\mu\nu}]_g}{vol\ Diff} = [dX]_{\hat{g}}[dh_{\mu\nu}]_{\hat{g}}[d\phi]_{\hat{g}}[dVdV^*]_{\hat{g}}e^{-S_{anom}[\phi;\hat{g}_{\mu\nu}]-S_{FP}[V,V^*;\hat{g}_{\mu\nu}]}$$

$$e^{-2\phi}\frac{2}{\sqrt{\hat{g}}}\frac{\delta S_{anom}[\phi;\hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta\phi} = \underbrace{\left[b\left(F + \frac{2}{3}\nabla^2 R\right) + b'G + b''\nabla^2 R\right]_{g=e^{\phi}\hat{g}}}_{\text{MattersのWeyl anomaly}}$$

⇒任意の$\hat{g}_{\mu\nu}$に対して、Weyl anomaly部分はキャンセルされる: [Antoniadis et al 1992]

$$\langle \hat{T}^{\mu}{}_{\mu} \rangle = \langle \hat{T}^{\mu}{}_{\mu} \rangle_{action} + \langle \hat{T}^{\mu}{}_{\mu} \rangle_{measure} = (\text{古典的に} conformal \text{でない部分の寄与})$$

S_{anom}の部分がWeyl anomaly部分をキャンセルする

Weyl anomaly cancellation 2

- $\hat{g}_{\mu\nu}$として、物理的な解${g^{(0)}}_{\mu\nu}$にとることができる:

$$0 = \frac{\delta S_{eff}}{\delta {g^{(0)}}_{\mu\nu}} = {G^{(0)}}_{\mu\nu} - \kappa^2 \langle {T^{(0)}}_{\mu\nu} \rangle$$

（これがsemi-classical Einstein方程式である）

⇒このtrace部分は

$$0 = -R^{(0)} - \kappa^2 g^{(0)\mu\nu} \langle {T^{(0)}}_{\mu\nu} \rangle$$

$= 0$

・ホライズン近傍では古典的にconformalになる

⇒ $0 = -R^{(0)}$

量子効果を考慮しても

Vaidya解はconsistentである

エネルギー運動量テンソル

- 仮定1：球対称、$T^{\mu}{}_{\mu}=0$、$T^{\theta}{}_{\theta}=0$ ⇒未知関数はT_{uu}とT_{rr}
- 仮定2の境界条件：「今はgray-body factorを無視しているので、ホライズンの外では外向きのHawking輻射だけで、内向きの流れはない」

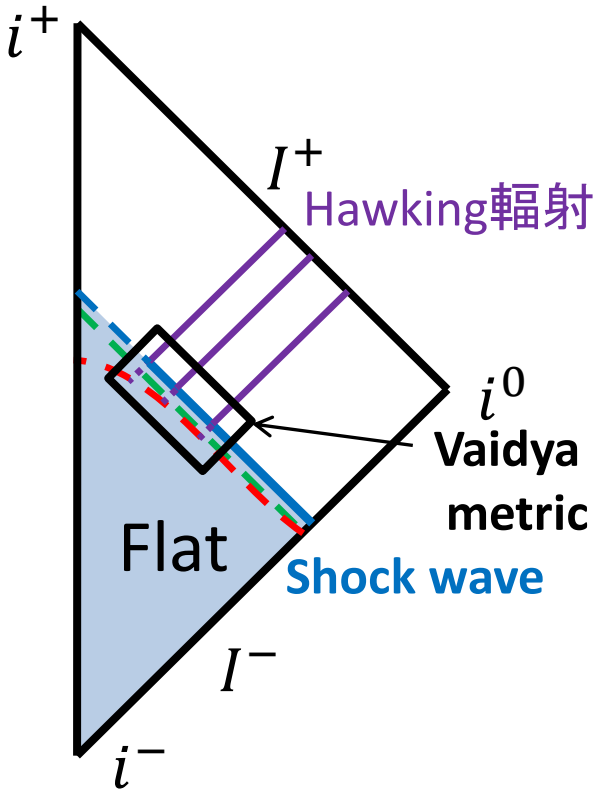
この下で、保存則：$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta}=0\ (\beta=u,r)$の2本を使う

⇒全時空でくりこまれたエネルギー
運動量テンソルが得られる:

$$<T_{uu}>\sim\frac{a^{-2}}{r^{2}},\quad <T_{rr}>=0$$

⇒これはVaidyaのEinstein tensorと同じ形

⇒Vaidyaはconsistentである



- Shock waveのsurface energy-momentum tensor

を調べると、shock wave から直接Hawking輻射が出ていることがわかる。

（負のエネルギー流は必要ない）

Gray-body factorの考慮

- Hawking輻射は重力ポテンシャルにより跳ね返る

⇒内向きのエネルギー流も含む解を作る必要あり

⇒条件$G^{\mu}{}_{\mu}=0, G_{\theta\theta}=0$を満たす一般解は

$$ds^2=-\partial_r p(u,r)\left(\frac{p(u,r)}{r}du^2+2dudr\right)+r^2d\Omega^2$$

ここで$p(u,r)$は$G_{\theta\theta}=0$より決まる

⇒時間変化がゆっくりな時は解ける:

- (1) for $r>a$

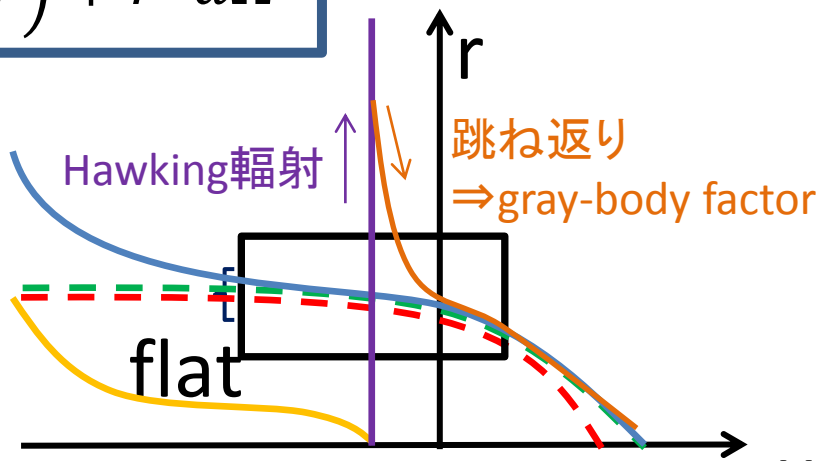
⇒$\mathrm{p(u,r)}\approx r-a'(u)$

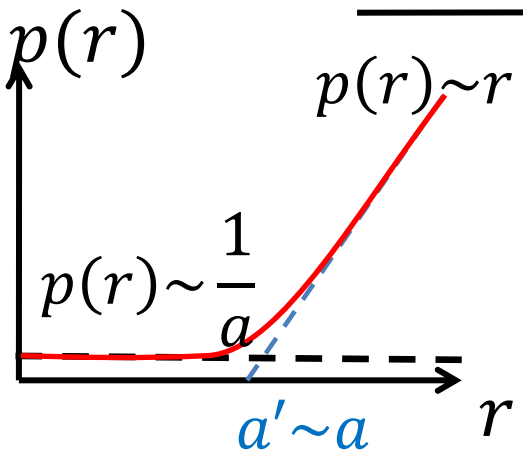
⇒先ほどのモデルと

ほとんど同じ結果になる

- (2) for $\mathrm{r}<a$

⇒$p(r)=const.\sim\frac{1}{a}\ll 1$

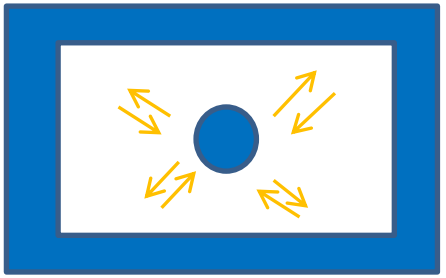




熱浴中の定常BHとエントロピー

- shock waveが完全に蒸発して、熱浴と完全に平衡になると、”horizon”の内側が熱浴からの熱輻射で満たされる

⇒“熱輻射の球体＝熱浴中のブラックホール”
のエントロピーを流体力学的に求める



- エネルギー密度: $\rho = -T^{t}{}_{t} = -\frac{1}{8\pi} g^{tt} G_{tt}$
- 局所温度: $T = \frac{T_H}{\sqrt{-g_{tt}}} \quad T_H = \frac{1}{4\pi a}$
- 局所平衡の熱力学関係式: $\rho + P = Ts$
- もし圧力を無視すると、エントロピー密度の体積積分からエントロピー面積則を再現できる:

$$S = \int_0^a d^3x \sqrt{g_\Sigma}\, s = \frac{1}{4} A$$

⇒熱浴中の熱輻射の球体と熱浴中のブラックホールは区別ない

⇒しかし、内部はプランクスケール超えている

結果

- 蒸発のback reactionを含むself-consistent な解を構築した。それはhorizonも特異点も持たない。
- Weyl anomaly は重力の揺らぎによりキャンセルされる。
- Hawking輻射はhorizonがなくても生じる。
- これらのことは「semi-classicalの範囲でさえも、正しくback reactionを取り入れると、horizonやsingularityは生じずに、重力崩壊した物質はそのエネルギーをHawking輻射として消費する」を意味する。

- Gray-body factorを考慮した解と熱浴中の定常解を構築した。今回もhorizonはない。
- “ホライズン”の内側のエントロピー密度を体積積分すると、エントロピー面積則を再現した。

今後の課題

- Horizonも特異点もないので、情報喪失ないはず。しかし熱輻射の“形”でエネルギーが放出されている。

  具体的にはshock waveの情報はどのように帰ってくるのか？

⇒現在、2つ以上のshock waveを用いて議論している

- 定常解の内側はPlanckスケールを越えている
- もし圧力を無視しないと、エントロピーは2倍になる
- 高密度な内側では角度方向の散乱が生じているはず

⇒（1）仮定 $l \leq l_c$ を取り除き、よりよい内部解を構成する

⇒（2）場の理論を越えた扱いを試みる

ありがとうございました