$S^3/\mathbb{Z}_n$ Partition Function and Dualities

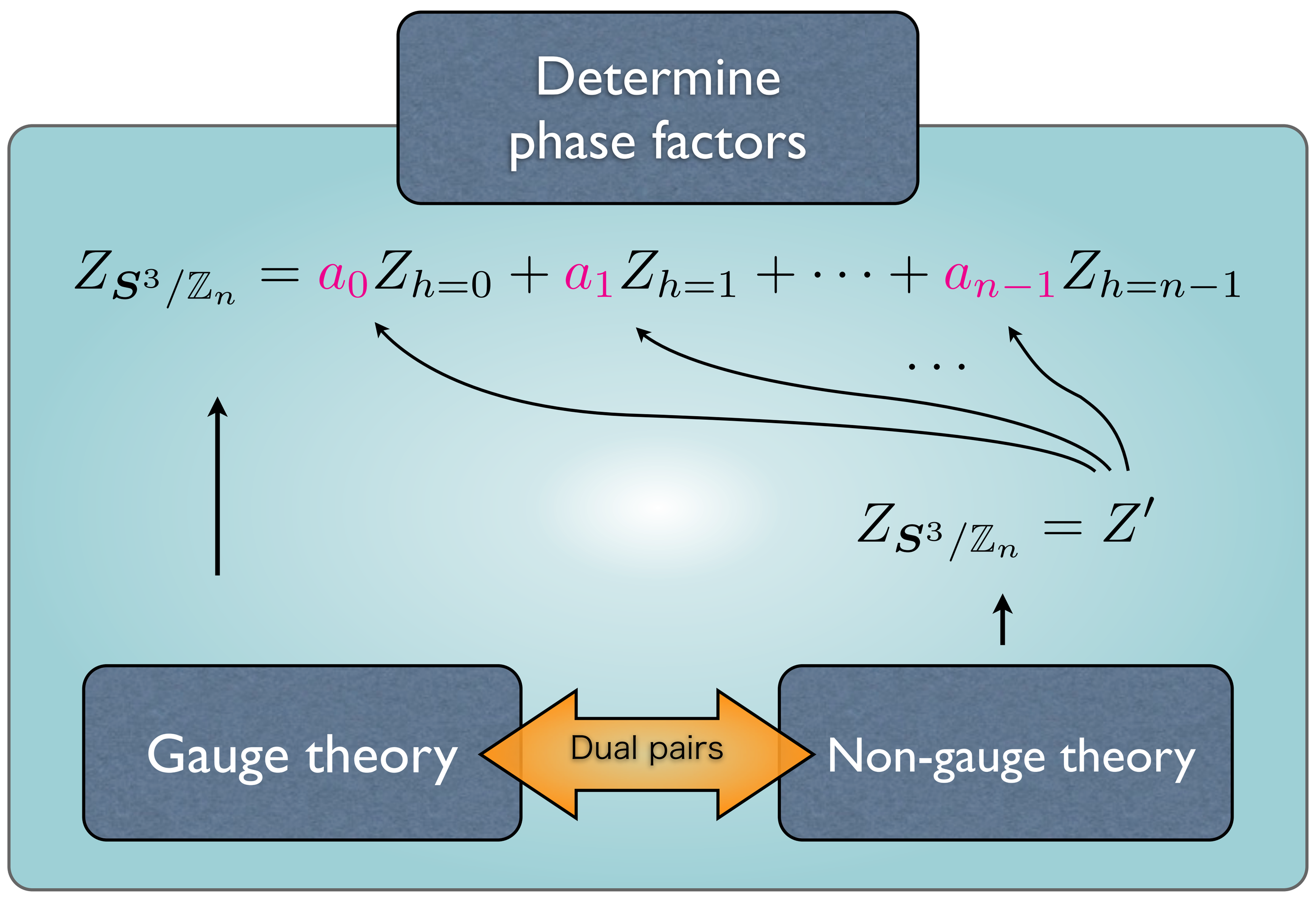
横山 大輔 / 東京工業大学　@　YITP “場の理論と弦理論” 23-27th July 2012

共同研究者：今村 洋介氏 / 東京工業大学

Introduction

Short Summary

- Orbifolded three-sphere $S^3/\mathbb{Z}_n$ 上の分配関数を考える。
- Orbifoldされた空間上ではホロノミーによって指定される縮退した真空がある。
- 分配関数を考える時には局所対称性に対するホロノミーによって指定されるそれぞれの寄与を足し上げなければならない。
- 分配関数は一般には複素数であるが、通常は分配関数の絶対値に興味がある。しかし、足し上げを考える時には相対的な位相を考えなければならない。
- ここではゲージ理論とゲージ場を含まない理論の間の双対性を使って、この位相因子を決める。



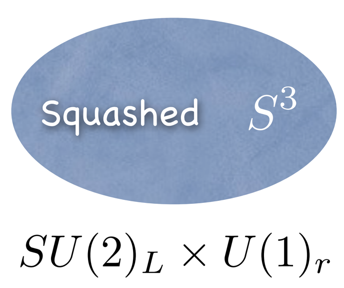
Motivations

- 大域的な対称性に対するホロノミーは理論のパラメータになるので、分配関数をより非自明なものにできる。
- Squashed S^3を境界に持つ局所漸近的AdS空間上で 1/2 BPSのインスタントン配位を考えると、squahing パラメータの値に依って二つの解が存在する。二つのうち一つは理論の無矛盾性から空間が大域的に$\mathbb{Z}_2$オービフォールドされていなければならない。よって必然的に境界もオービフォールドされていなければならない。

S^3 Partition Function

Summary of S^3 partition function

- 背景としてsquashed S^3 を考える。



$$ds^2 = \left[(\mu^1)^2 + (\mu^2)^2 + \frac{1}{v^2}(\mu^3)^2\right]$$

- ここでは天下り的に分配関数の公式を与える。

$$Z = \int [d\lambda] e^{-S_0(\lambda)} Z^{1\text{-loop}} \qquad [d\lambda] = \frac{1}{|W|}\prod_{a=1}^{\mathrm{rank}G} d\lambda_a$$

$$S_0(\lambda) = \pi i k \mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(\lambda^2) + 2\pi i \zeta \lambda_{U(1)}$$

Vector multiplet

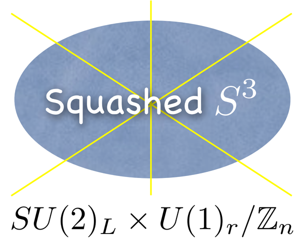
$$Z^{1\text{-loop}} = \frac{\prod_{\alpha\in\Delta} s_b\left(\alpha(\lambda) - \frac{i}{v}\right)}{\prod_I s_b\left(\rho_I(\lambda) - \frac{i(1-\Delta_I)}{v}\right)}$$

Chiral multiplet

- Double sine function

$$s_b(z) = \prod_{p,q=0}^{\infty} \frac{b\left(q+\frac{1}{2}\right) + b^{-1}\left(p+\frac{1}{2}\right) - iz}{b\left(p+\frac{1}{2}\right) + b^{-1}\left(q+\frac{1}{2}\right) + iz} \qquad u = \pm\sqrt{v^2-1} \qquad b = \frac{1+iu}{v}$$

$S^3/\mathbb{Z}_n$ Partition Function



- U(1)r 方向をオービフォルドする。
- この操作によってU(1)r neutralな超対称性は壊れない。
- オービフォールドした空間ではホロノミーで指定される縮退した真空がある。

$$m = \frac{n}{2\pi}\oint_C A$$

- ホロノミーは局所的および大域的な対称性に対していれる事ができるが、局所的対称性に対するホロノミーは経路積分の中で足し上げなければならない。

$$Z(m_{\mathrm{global}}) = \sum_{m_{\mathrm{local}}} \int [d\lambda] e^{-S_0(\lambda,m)} Z^{1\text{-loop}}(\lambda, m) \qquad [d\lambda] = \frac{1}{|W|}\prod_{a=1}^{\mathrm{rank}G} \frac{d\lambda_a}{n}$$

- Classical action part

$$\cancel{S_0^{\boldsymbol{S}^3/\mathbb{Z}_n}(\lambda, m) = \frac{1}{n} S_0^{\boldsymbol{S}^3}(\lambda)} \Rightarrow S_0^{\boldsymbol{S}^3/\mathbb{Z}_n}(\lambda, m) = \frac{1}{n} S_0^{\boldsymbol{S}^3}(\lambda) - i\Phi(m)$$

$$\Phi = \frac{\pi k}{n}\mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(m^2)$$

- 1-loop part
元々 S^3上で存在するモードの中から $\mathbb{Z}_n$ invariantなモードだけを残す事で得られる。

$$\varphi(\psi) = \sum_{m\in\boldsymbol{Z}/2} \varphi_m e^{im\psi} \qquad m : SU(2)_R \text{ magnetic quantum number} \qquad 0 \le \psi < 4\pi$$

$$\varphi\left(\psi + \frac{4\pi}{n}\right) = e^{2\pi i \frac{\rho(h)}{n}} \varphi(\psi)$$

Boundary condition after the orbifold

元々 S^3上で存在するモード

$$\frac{2j - 2imu - iv\alpha(\lambda)}{2j + 2 + 2imu + iv\alpha(\lambda)} \qquad 2m = p - q = \rho\cdot h \mod n$$

$$j = \frac{p+q}{2} \qquad m = \frac{p-q}{2}$$

j, m の置き換えをするとdouble sine functionになる。

$$p = np' + [k+h]_n$$

$$q = nq' + k \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

境界条件を満たすための置き換え

Orbifolded double sine function

$$s_{b,h}(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{p',q'=0}^{\infty} \frac{b(q'+\frac{1}{2}) + b^{-1}(p'+\frac{1}{2}) + b\langle k\rangle_n + b^{-1}\langle k+h\rangle_n - i\frac{z}{n}}{b(p'+\frac{1}{2}) + b^{-1}(q'+\frac{1}{2}) - b\langle k\rangle_n - b^{-1}\langle k+h\rangle_n + i\frac{z}{n}}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} s_b\left(\frac{z}{n} + ib\langle k\rangle_n + ib^{-1}\langle k+h\rangle_n\right)$$

$$\langle m\rangle_n = \frac{1}{n}\left([m]_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \qquad [m]_n \equiv m \mod n$$

$$Z^{1\text{-loop}}(\lambda, m) = \frac{\prod_{\alpha\in\Delta} s_{b,\alpha(m)}\left(\alpha(\lambda) - \frac{i}{v}\right)}{\prod_I s_{b,\rho_I(m)}\left(\rho_I(\lambda) - \frac{i(1-\Delta_I)}{v}\right)}$$

オービフォルド上の分配関数にするために必要な操作

- $s_b(z)$を$s_{b,h}(z)$ に置き換える。
- 積分速度dxをdx/n に置き換える。
- 古典作用の寄与 S_0 を S_0/n に置き換える。
- Chern-Simons項からくる位相因子 $e^{i\pi h^2/2n}$ を加える。

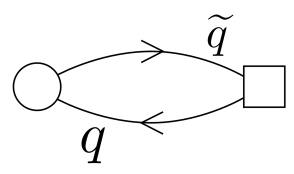
$S^3/\mathbb{Z}_n$ Partition Function and Dualities

Dualities in $S^3/\mathbb{Z}_n$

- ここでは二つの双対な理論を取り上げる。
  一つは$\mathcal{N}=2$ SQEDとXYZ modelであり、もう一つはJafferis, Yinによって発見的に見つけられた双対理論である。
- これらはともにゲージ理論と非ゲージ理論の間の双対性である。

$\mathcal{N}=2$ SQED と XYZ model

- ゲージ群は$U(1)$でニつのchiral multiplet $q,\ \tilde{q}$ と結合している理論を考える。



- Superpotentialが次で与えられる三つのchiral multipletからなる理論を考える。

$$W=\tilde{Q}SQ$$

	q	$\tilde{q}$	m	$\tilde{m}$	Q	$\tilde{Q}$	S
$U(1)_V$	0	0	1	-1	1	-1	0
$U(1)_A$	1	1	0	0	-1	-1	2
Weyl weight	Δ	Δ			$1-\Delta$	$1-\Delta$	2Δ

- この二つの理論は上表の様に二つの$U(1)$大域的対称性を持っている。ただし、表中の$m,\ \tilde{m}$はモノポール演算子である。
- $q,\ \tilde{q}$ のIRでのWeyl weightをΔとすると演算子対応$S=\tilde{q}q$より表中の様になる。

S^3 partition function

- 大域的対称性は微弱ゲージ化し、$U(1)_V,\ U(1)_A$ に対してそれぞれ $\xi,\ \mu$ という質量パラメータを導入する。すると、公式よりそれぞれの分配関数は以下の様になる。

$$Z^{\mathrm{SQED}}=\int\frac{e^{-2\pi i\zeta\lambda}}{s_b(\lambda+\mu-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_b(-\lambda+\mu-\frac{i(1-\Delta)}{v})}d\lambda$$

$$Z^{\mathrm{XYZ}}=\frac{1}{s_b(\zeta-\mu-\frac{i\Delta}{v})s_b(-\zeta-\mu-\frac{i\Delta}{v})s_b(2\mu-\frac{i(1-2\Delta)}{v})}$$

- これらの分配関数が等価である事は、pentagon relationと呼ばれる以下の式と$s_b(z)=s_b(-z)^{-1}$を用いて示す事が出来る。

$$\int\frac{s_b(x+r)}{s_b(x+s)}e^{-2\pi itx}dx=e^{\pi it(r+s)}\frac{s_b(t-\frac{r}{2}+\frac{s}{2}+\frac{i}{v})}{s_b(t+\frac{r}{2}-\frac{s}{2}-\frac{i}{v})}s_b(r-s-\frac{i}{v})$$

$$x=\lambda,\quad r=-\mu+\frac{i(1-\Delta)}{v},\quad s=\mu-\frac{i(1-\Delta)}{v},\quad t=\zeta,$$

$S^3/\mathbb{Z}_n$ partition function

- SQED側では局所的対称性に対するホロノミーは足し上げなければならない。
- 大域的対称性に対するホロノミー $h_V,\ h_A$ は理論のパラメータになる。
- SQEDの$U(1)_V$ カレントはゲージ場の強さなので、ホロノミーは次式で与えられる。

$$S=\frac{i}{2\pi}\int VdA\longrightarrow\Phi=2\pi\frac{h_Vh}{n}$$

Non-trivial phase factor

- $S^3/\mathbb{Z}_n$ partition functions

$$Z^{\mathrm{SQED}}(h,h_V,h_A)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i\zeta\lambda/n}e^{2\pi ih_Vh/n}}{s_{b,h_A+h}(\mu+\lambda-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_{b,h_A-h}(\mu-\lambda-\frac{i(1-\Delta)}{v})}\frac{d\lambda}{n}$$

$$Z^{\mathrm{XYZ}}(h_V,h_A)=\frac{1}{s_{b,-h_A+h_V}(-\mu+\zeta-\frac{i\Delta}{v})s_{b,-h_A-h_V}(-\mu-\zeta-\frac{i\Delta}{v})s_{b,2h_A}(2\mu-\frac{i(1-2\Delta)}{v})}$$

- これらの分配関数はナイーブには下記左式の様に単純なホロノミーの足し上げで等しくなると思われるが、実際は右式の様に位相因子を付けて足し上げる必要がある。

$$\cancel{Z^{\mathrm{XYZ}}(h_V,h_A)=\sum_{h=0}^{n-1}Z^{\mathrm{SQED}}(h,h_V,h_A)}\ \Rightarrow\ Z^{\mathrm{XYZ}}(h_V,h_A)=\sum_{h}\sigma(h,h_V,h_A)Z^{\mathrm{SQED}}(h,h_V,h_A)$$

- $\sigma(h,h_V,h_A)$の値は数値評価で調べることができる。以下に具体的な値をいくつか示す。

$$\sigma(h,h_V,0)=1$$

$$(\sigma^{(n)}_{h_A})_{h,h_V}=\sigma(h,h_V,h_A)\ \Rightarrow$$

$$\sigma_1^{(2)}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad\sigma_1^{(3)}=\sigma_2^{(3)}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{(4)}=\sigma_3^{(4)}=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix},\quad\sigma_2^{(4)}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

- 一般的には以下の様な式で位相因子が与えられると予想する。

$$\sigma(h,h_V,h_A)=(-1)^{f(h_A)+g(h_A,h)+g(h_A,h_V)}$$

$$f(h)=\min(|h+n\mathbb{Z}|),\quad g(h,h')=\min(f(h),f(h'))$$

Jafferis and Yin's duality

- $SU(2)$ $k=1$ Chern-Simons theory coupled to an adjoint chiral multiplet
- $SU(2)$ Cartan algebraは次の様にする。

$$\lambda=xT_3,\quad T_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

- Single chiral multiplet
- この分配関数は次の様に与えられる。

$$Z^X=\frac{1}{s_b(-\frac{i(1-2\Delta)}{v})}$$

- この分配関数は公式から次の様になる。

$$Z^{SU(2)}=\frac{1}{2}\int\frac{e^{-\frac{\pi}{2}ix^2}s_b(x-\frac{i}{v})s_b(-x-\frac{i}{v})}{s_b(x-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_b(-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_b(-x-\frac{i(1-\Delta)}{v})}\frac{dx}{\sqrt{2}}$$

- これら二つの分配関数は数値的に以下の様な位相因子を含めて一致する。

$$Z^{SU(2)}=e^{i\phi}Z^X,\quad\phi=-\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{2\Delta+\Delta^2}{2v^2}\right)$$

$S^3/\mathbb{Z}_n$ partition function

- ホロノミーを入れる際、ゲージ群が正確には$SU(2)/\mathbb{Z}_2=SO(3)$である事に注意する。
- この時Chern-Simons termから来る位相因子は次の様になっている。

$$e^{i\Phi}=e^{\frac{\pi i}{2n}h^2}$$

- この因子は $h\to h+n$ の元で不変でないのでill-definedだが、この不定性は後で導入する別なルールで固定する。
- これらを考慮すると分配関数は次の様になる。

$$Z^{SU(2)}(h,h_A)=\frac{1}{2}\int\frac{e^{\pi i\frac{h^2}{2n}}e^{-\frac{\pi}{2n}ix^2}s_{b,h}(x-\frac{i}{v})s_{b,-h}(-x-\frac{i}{v})}{s_{b,h_A+h}(x-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_{b,h_A}(-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_{b,h_A-h}(-x-\frac{i(1-\Delta)}{v})}\frac{dx}{\sqrt{2}n}$$

$$Z^X(h_A)=\frac{1}{s_{b,2h_A}(-\frac{i(1-2\Delta)}{v})}$$

- これからは n が奇数か偶数かで別々に考える。
- まず n が奇数の場合。
  この場合位相因子はhと$h+n$に対して異なる値を持つが、その位相差は常に$\pi/2$である。これらに対して$(e^{\frac{\pi i}{2n}h^2})_+=i(e^{\frac{\pi i}{2n}h^2})_-$を満たす様にサブスクリプトを付ける。
  この時対応して$Z_\pm^{SU(2)}(h,h_A)$を定義する事ができる。これを用いると次の等式が成り立つ事を数値的に確かめることができる。

$$\sum_{h=0}^{n-1}\sigma(h,h_A)e^{\mp\frac{\pi i}{4}}Z_\pm^{SU(2)}(h,h_A)=e^{i\phi(h_A)}Z^X(h_A)$$

$$\sigma(h,h_A)=(-1)^{g(h_A,h)},\qquad\phi(h_A)=-\pi\left[\frac{f(h_A)(f(h_A)+n)}{2n}+\frac{\Delta^2+2\Delta}{2nv^2}\right]$$

- n が偶数の場合。
  n個のホロノミーのうち $h-\frac{n}{2}\in 2\mathbb{Z}_n$ を満たすホロノミーだけを取り出してくると、$e^{i\Phi}=e^{\frac{\pi i}{2n}h^2}$がwell-definedとなり、次の等式が成り立つ事が確かめられる。

$$\sum_{h-n/2\in 2\mathbb{Z}_n}\sigma(h,h_A)\sqrt{2}Z^{SU(2)}(h,h_A)=e^{i\phi(h_A)}Z^X(h_A)$$

Conclusions

- オービフォールド上で分配関数を考える場合はホロノミーで指定される真空の足し上げを考えなければならない。この時、今まではあまり考えてこられなかった分配関数の位相が重要になってくる。
- 我々はゲージ理論と非ゲージ理論をつなぐ双対性を用いてこの足し上げのときに必要な位相因子を数値評価を用いて調べ上げた。
- 今後はここで予想した公式が他の双対性などの場合に適用出来るかどうかを調べる。
- Large N でホロノミーで区別されるそれぞれの寄与がどの様に振る舞うか調べる。
- 特にABJMのlarge N limitを調べる事で重力側から期待される自由エネルギーが導出出来るかどうかを確かめる。