

広田三輪方程式の八面体構造

首都大学東京 高エネルギー理論研究室 D 1 弓林 司
共同研究者：齋藤 暁 (TMU), 脇本 佑紀 (TMU)

概要

本発表では可積分系を導来圏の手法を使って調べる為の構成法を考察する。本発表は主に共同研究者の齋藤氏がテキサスで行った発表 [1] のレビューである。

Indtroduction

Homological Mirror Symmetry[2] の登場により、導来圏 (より一般に三角圏) を用いた弦理論の研究が注目を集めている。本発表では、弦理論の n 点関数と広田三輪方程式の t 関数に対応する事、広田三輪方程式が三角圏の構造を持つ事に言及し、導来圏を用いて弦理論を調べる新しい立場を考察した。

1. String Theory と HM eq の関係

Polyakov 作用は共形対称性を持つ 2 次元場の理論と考える事ができる。即ち、String Theory は string の parameter 空間上、つまり world sheet 上の共形場の理論 (CFT) と考える事ができる。

このとき一般的な string の Feynman Diagram を考える事は、境界を持つ punctured Riemann 面 (BPRS) を考える事に对应する。各 puncture が外縁に対応する。従って String theory はある見方において BPRS 上の CFT、つまり Boundary CFT (BCFT) となる。BPRS の上の一般的な関数は τ 関数で与えられる。従って、string の amplitude も τ 関数で与えられる事になる。

また、ある種の可積分系の根源であると考えられている広田三輪方程式は τ 関数を解にもつ [4]。この対応により我々は string amplitude の性質を可積分系の立場から調べる事が出来る。

2. 広田三輪方程式と八面体

本節では広田三輪方程式とその八面体構造を議論する。
広田三輪方程式は、

$$\begin{aligned} &\alpha_{12}\alpha_{34}f(p_1+1, p_2+1, p_3, p_4)f(p_1, p_2, p_3+1, p_4+1) \\ &- \alpha_{13}\alpha_{24}f(p_1+1, p_2, p_3+1, p_4)f(p_1, p_2+1, p_3, p_4+1) \\ &+ \alpha_{23}\alpha_{14}f(p_1+1, p_2, p_3, p_4+1)f(p_1, p_2+1, p_3+1, p_4) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる [5]。ここで $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ であり、BCFT 側では puncture の情報に対応する。また、 $p \in \mathbb{Z}^4$ をとる。

広田三輪方程式が八面体構造を持つ事を見る。その為に保存量、

$$t := p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2 \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

を導入する $(p_1+1, p_2+1, p_3, p_4), (p_1+1, p_2, p_3+1, p_4), (p_1+1, p_2, p_3, p_4+1), (p_1, p_2+1, p_3+1, p_4), (p_1, p_2+1, p_3, p_4+1), (p_1, p_2, p_3+1, p_4+1)$ を結べば基本正八面体が出来、それは $t+2$ で特徴づけられた 4 次元格子空間上の 3 次元平面内に在り、その面は正八面体により埋め尽くされる。この 6 つの頂点に t 関数を定めたのが広田三輪方程式と解釈される。以降、原点から八面体の頂点方向に座標軸を定義した新しい変数、

$$k_a = e^{abc} \frac{p_a - p_b - p_3c + p_4}{2}, \quad a, b, c = 1, 2, 3 \tag{3}$$

を定義し、これを用いる。

広田三輪方程式を満たす関数は $\mathbb{Z}^4$ を保存量一定の面上で切った 3 次元空間で定義され、この空間は八面体の埋め尽くし空間で表現される。こうして広田三輪方程式の解の定義域に八面体を定義する事が出来る。

3. 外差分作用素に依る定式化

外差分作用素

まず差分演算子 D_j を以下で定義する。

$$D_j f(p) := f(p + \delta_j) \tag{4}$$

ここで $(\delta_j)_i := \delta_{ji}$ である。このとき、外差分作用素 d_B を

$$d_B f(p) := \sum_{j=1}^4 D_j f(p) dp_j \tag{5}$$

と定める。高次の外差分形式については微分形式と同じアナロジーで定義する。ここで表記の節約の為、

$$\begin{aligned} D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_n} f(p) &=: f_{j_1 j_2 \dots j_n}(p) \\ &=: e^{j_1 j_2 \dots j_n k_1 \dots k_{|4-n|}} f_{(k_1 \dots k_{|4-n|})}(p) \end{aligned} \tag{6}$$

と表す事にする。

外差分作用素は複体を作る。即ち、

$$d_B^2 f(p) = \sum_{j=1}^4 D_j D_k f(p) dp_j \wedge dp_k = 0 \tag{7}$$

である。高次の場合についても同様である。

$$\dots \xrightarrow{d_B} 0 \xrightarrow{d_B} A^0 \xrightarrow{d_B} A^1 \xrightarrow{d_B} A^2 \xrightarrow{d_B} A^3 \xrightarrow{d_B} A^4 \xrightarrow{d_B} 0 \xrightarrow{d_B} \dots \tag{8}$$

ここで A^q は q 形式全体の集合を表す。

広田三輪方程式

以上の表記のもと、広田三輪方程式は以下のように表現される。

2 形式 $F, \bar{F}$ を、

$$F(p) := \sum_{i,j=1}^4 \alpha_{ij} f_{ij}(p) dp_i \wedge dp_j, \bar{F}(p) := \sum_{i,j=1}^4 \alpha_{ij} f_{(ij)}(p) dp_i \wedge dp_j \tag{9}$$

と定義すると、広田三輪方程式は、

$$\det[F_{ij}] = (\text{HM eq})^2 = 0, \quad \det[\bar{F}_{ij}] = (\text{HM eq})^2 = 0 \tag{10}$$

となる。

4. Bäcklund 変換

本節では、広田三輪方程式の Bäcklund 変換を議論する。Bäcklund 変換とはソリトン方程式が持つ重要な性質で、ある一つの解を与える事により独立な無限個の解を構成する変換の事で

$g(p)$ の構成

広田三輪方程式を満たす解 $f(p)$ を用意する。次に以下の条件を満たす $g(p)$ を考える。

$$\bar{F} \wedge g = 0 \tag{11}$$

ここで $g := d_B g(p)$ である。この条件は以下と同値である。

$$\sum_{j=1}^4 \bar{F}_{ij} g_j(p) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

これを解くことにより $g(p)$ が求まる。

$g(p)$ の意味

はじめに与えた条件 $\bar{F} \wedge g = 0$ から、これに外微分を作用したものと 0 とならなくてはならない。この条件から、

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_{lk} g_{lk}(p) f_{(k)}(p) = 0 \tag{13}$$

を得る。これは、

$$\det[G_{ij}] = 0 \tag{14}$$

即ち $g(p)$ が解である事を意味する。

注意

以上の過程において一つの解 $f(\mathbf{p})$ から新しい解 $g(\mathbf{p})$ を構成する事が出来た。この $g(\mathbf{p})$ を元の解と置き直す事で無限個の解のシリーズを得る事が出来る。

$$f(0) \xrightarrow{d_B} f(1) \xrightarrow{d_B} f(2) \xrightarrow{d_B} \dots \quad (15)$$

また、広田三輪方程式の解は一つの八面体を定めると説明した。つまり Bäcklund 変換により八面体の列

$$\mathcal{O}(0) \xrightarrow{d_B} \mathcal{O}(1) \xrightarrow{d_B} \mathcal{O}(2) \xrightarrow{d_B} \dots \quad (16)$$

と考える事が出来る。このとき、 d_B による parameter 発展は保存量を保つ変換とする。

5. 三角構造

次に広田三輪方程式の三角構造を議論する。

八面体上の頂点移動作用素

三角構造を与えるべく、八面体上の頂点を関係付ける変換を考える。頂点の移動は、 $\pm(k_i - k_j)$ で定義されるが、これは $\pm(p_i - p_j)$ と同じである。従って頂点作用素は以下で定義できる。

$$T_{ij} := D_i D_j^{-1}, \quad i \neq j \quad (17)$$

この作用素は、

$$T_{ij} = T_{ji}^{-1}, \quad i \neq j \quad (18)$$

を満たす。従って、1 個の成分のうち独立なものは 6 となる。

八面体公理

以上で定義された頂点移動作用素を用いて三角構造を定義する。

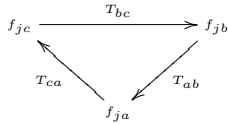
八面体には 8 つの正三角形がある。その一つの三角形を

$$\tilde{S}_j = (X, Y, Z) := (f_{bc}, f_{ca}, f_{ab}), \quad a, b, c \neq j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

と書く事にする。対面に対応する三角形を

$$S_j = (X, Y, Z) := (f_{ja}, f_{jb}, f_{jc}), \quad a, b, c \neq j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (20)$$

と書く。このとき、三角形の頂点の移動は



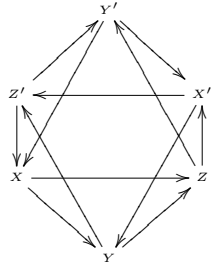
と書く事が出来る。

また、各正八面体の間の面 S_j 方向の発展は T_{ja} で与えられる。これと三角系列を合わせると正八面体の一つの三角形から、隣の正八面体の三角形への対応を得る。これを、

$$\mathcal{O} := (\tilde{S}_j, S_j) \xrightarrow{T_{ja}} \mathcal{O}[1] := (\tilde{S}_j[1], S_j[1]) \quad (21)$$

と表す。

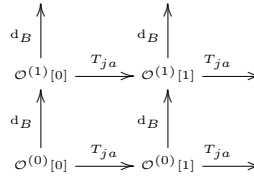
これをまとめて書くと、



という八面体のシフトだと考える事が出来る。

Double Complex Structure

以上の事をまとめると、広田三輪方程式八面体は以下の Double Complex Structure を持つことがわかる。



6. 写像化

本節では以上の議論の見通しを良くする為に、移動方向を固定して考える。即ち、移動の方向を T_{43} 方向に制限する。つまり、新しい変数

$$q := k_1 - k_2 = p_1 - p_2 \quad (22)$$

を定義し、これの発展を見る。

また、この移動と垂直方向の移動も見る。これは、 $k_1 + k_2 \propto p_4$ より、 p_4 の発展を追えば良い。そこで、

$$n := p_4 = -\frac{3}{2}(k_1 + k_2 + k_3) \quad (23)$$

と置く。これらの変数を用いると広田三輪方程式は以下のように書き換えられる。

$$\tau_{q-1}^{(n-1)} \tau_q^{(n)} - 2\tau_{q+1}^{(n-1)} \tau_q^{(n)} + \tau_{q-1}^{(n-1)} \tau_q^{(n)} = 0 \quad (24)$$

但し、 $\tau_q^{(n)} := f_4(\mathbf{p})$ と置いた。

また、三角系列を表現すべく、条件

$$\tau_{q+3}^{(n)} = \tau_q^{(n)}, \quad q = 1, 2, 3 \quad (25)$$

を置く。この Notation の下で、

$$\tilde{S}_4 = (X, Y, Z) := (\tau_1^{(n-1)}, \tau_2^{(n-1)}, \tau_3^{(n-1)}) \quad (26)$$

$$S_4 = (X', Y', Z') := (\tau_3^{(n)}, \tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}) \quad (27)$$

と書くことが出来る。こうする事により、八面体の移動 T_{43} は写像、

$$(\tau_1^{(n-1)}, \tau_2^{(n-1)}, \tau_3^{(n-1)}) \rightarrow (\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)}) \quad (28)$$

と解釈する事が出来た。

まとめ

本発表では、弦理論の可積分性を用いて弦理論を見る新しい立場の構築について考察した。言うならば String/Integrability 対応である。

特に、この立場では写像という計算機の中で実際に動かす事が可能な対象を用いて導来圏 (三角圏) を調べる事が出来るため、従来の方法に比べても興味深いと考えられる。

これからは実際にこの視点を用いて、意味付けを含めた対応を模索したい。

参考文献

- [1] S. Saito, "Octahedral Structure of the Hirota Miwa Equation" (unpublished).
- [2] M. Kontsevich, *Homological Algebra of Mirror Symmetry*, in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", pages 120–139. Birkhäuser, (1995)
- [3] Nobuhiko Shinzawa and Satoru Saito (1998) J. Phys. A: Math. Gen. 31 4533
- [4] S. Saito, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1798, S.Saito and R.Sato JHEP11(2003)008, R.Sato and S.Saito JHEP11(2004)047.
- [5] R.Hirota, J. Phys. Soc. Jpn 50 (1981) 3787, T.Miwa, Proc. Japan Acad. A 58 (1982) 9.
- [6] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, "Difference Scheme of Soliton Equations", in *Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems*, ed. by P.L.Christiansen et al., p.7 Plenum Press, New York, (1993).
- [7] R. P. Thomas. Derived categories for the working mathematician. In Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), volume 23 of AMS/IP Stud. Adv. Math., pages 349–361. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.