ローレンツ不変な質量項をもつ Einstein 重力理論や修正重力理論の定式化とその量子化

東京理科大学 基礎工学部 教養 (長万部キャンパス) 佐藤喜一郎

E-mail: kisato@rs.tus.ac.jp

ローレンツ不変性はぎりぎり保つ，$\sqrt{-g}$ の関数を無限個加える質量項をもつ Einstein 重力理論と Weyl ゲージ場を含む重力理論の量子化を研究している。一般座標変換に対する不変性の Stueckelberg 場での回復方法と，宇宙論的な効果を議論した。

1 新しい質量項の提案

質量項の候補は Boulware-Deser [1] で議論した g の単純関数ではなく，無限個用意する。単純な冪型で探すと候補者は

$$\mathcal{L}_m(a) = \frac{m^2}{K^2}\lambda\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a},$$

となる。ここで，スカラーモードがタキオンにならないための条件から，

$$\frac{2-d}{d} \leq a \leq 1, \tag{1}$$

である。時空が 4 次元ならば，

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq 1,$$

となり，実は $a = -1$ などはとることができない。$\sqrt{-g}$ のべきとしては，$\frac{1}{2}$ から 2 までの正冪に限られることが分かる。ただし，これらの項，単独では面白くないことは BD ですでにわかっているので，複数個 (無限個) 足す。これは，$\lambda(a_i)$ 自身が分布関数であるような意味で，

$$\mathcal{L}_m = \frac{m^2}{K^2}\int da\,\lambda(a)\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a}, \tag{2}$$

を考えることにする。積分した結果で線形近似の 2 次の項がタキオンが出ない係数になりさえすればよいとも考えられるので，積分区間はもっと広い範囲を考えても良い。

2 新しい質量項の意味

現時点は，分布関数を決める原理が見つかっていないので，とりあえず，連続分布の代表例で，$a = \bar{a}$ を中心に，正規分布している場合を考えよう。

$$\lambda(a) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(a-\bar{a})^2}{\sigma^2}}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} da\,\frac{m^2}{K^2}\frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(a-\bar{a})^2}{\sigma^2}}\left(\sqrt{-g}\right)^{1+a} \\ &= \frac{m^2}{K^2}\lambda_0\left(\sqrt{-g}\right)^{1+\bar{a}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\sigma\log\sqrt{-g})^2}\end{aligned} \tag{4}$$

となる。$\sqrt{-g}$ に関して，Liouville 的理論となる。(冪の違いに注意)

3　質量項の宇宙論的効果

FLRW 時空の計量 (一様等方宇宙) は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{5}$$

である。ここで，a がスケール因子，Hubble 膨張率を $H = \frac{\dot{a}}{a}$ とする。この計量のもとで質量項で修正された Einstein 方程式から，Friedman 方程式を求めると，

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{c^2K}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3} - \frac{c^2}{3}L, \tag{6}$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{8\pi G}{c^2}P - \frac{c^2K}{a^2} + c^2\lambda - c^2L, \tag{7}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{c^2}{3}\Lambda - \frac{c^2}{3}L, \tag{8}$$

となる。

物質の状態方程式を

$$w = \frac{P}{\rho c^2}, \tag{9}$$

と表わすと，

$$\dot{H} = -4\pi G(1+w)\rho + \frac{c^2K}{a^2}, \tag{10}$$

ここには，Λ や L は効かない！

FLRW 計量では

$$\sqrt{-g} = a^3\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-Kr^2}}, \tag{11}$$

である。簡単のために，種となった単純な質量項では

$$L = \frac{1}{2}(1+a')\lambda(\sqrt{-g})^{a'} = \frac{1}{2}(1+a')\lambda\left(a^3\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-Kr^2}}\right)^{a'}, \tag{12}$$

というように，L が空間点に依存する。これは，質量項が一般座標変換に対する不変性を破ったため生じた。この点に目をつむれば，$a'=1$ の単純 Fierz-Pauli 型では，Friedman 方程式に a^3 の寄与を与える。Gauss 型を採れば，指数関数でさらに enhance し，将来的に必ず膨張率を小さくする効果をもたらす。

ただし，座標系によって膨張率が変化するというのはかなり病的であり，簡単には受け入れがたい。そうなると，古典論ながら Steukelberg 場を導入して一般座標変換に対する不変性を回復する処理などを考える必要がある。

4　一般座標変換に対する不変性の回復へ向けて

1計量モデルでの質量項を最大限拡張したが，最終的に分布関数を計算してFP型にならないような分布を作ってしまうと，BDゴーストが生で現れる。これをresidualなDeser-Waldron型のゲージ変換[2]

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \left(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda\right) \Phi, \tag{13}$$

で消去できないかと格闘したが，$\nabla_\lambda \nabla^\lambda \Phi = 0$ の対称性しかなく，本格的なゲージ対称性としては確認されていない。Einstein Gravityから共形不変な理論に拡張すると，Weyl変換が自由にできるので，この任意関数への制約が緩和される可能性があり，Einsteinゲージを取る前のDirac-Utiyama-Freund型の重力理論で計算中である。

また，テクニカルにStueckelberg場が2種類必要である。質量項が，一般共変性とWeyl不変性を一気に破るため，背景時空での共変性を破らないためのStueckelberg場を ϕ^a

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b + K H_{\mu\nu},$$

で導入する。これに関しては，量子化で新たにFP(Feddeev-Popov)ゴーストが必要である！場の変数変換をIzawaのBRS処方を使って行うと，必要なFPゴーストは

$$-i\bar{C}^{\mu\nu}(2\eta_{ab}\partial_\mu \phi^a \partial_\nu C^b),$$

deRhamら[3,4]はこれがないので，ユニタリではないのでは？という疑念がある。

参考文献

[1] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. **D6** (1972), 3368.

[2] S. Deser and A. Waldron, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), 031601.

[3] C. de Rham and G. Gabadadze, Phys. Rev.**D 82** (2010), 044020.

[4] C. de Rham, G. Gabadadze, and A.J. Tolley, Phys. Lett. **711** (2012), 190.