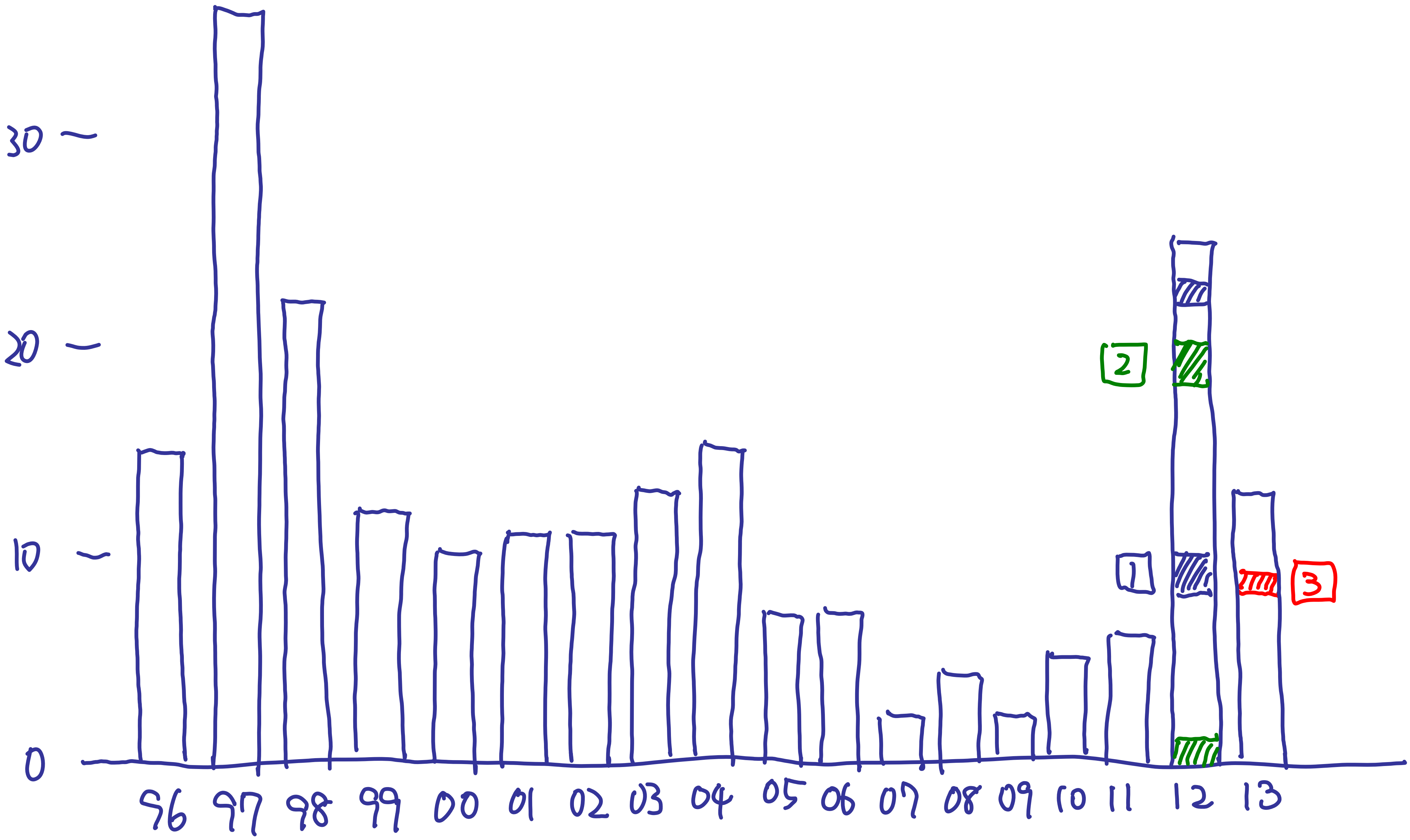
5次元のYang-Mills理論についての最近の話題

東工大
今村洋介

@基研
6月19日 12:00〜13:10

Seiberg, hep-th/9608111 ∧ a citation



5d Yang-Mills theory

$$S = \int d^5x \left[-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \cdots \right] \qquad g^2 : \text{mass}^{-1}$$

scattering amplitude

$$A \sim f(g^2 E)$$

Ultra Violet : strongly coupled

摂動論が使えない。

繰り込み不可能 (少なくとも power counting の意味で)

それでも5dゲージ理論を考える理由

UV についてはよく分からないが、
IR dynamics を調べることはできる。

→ non trivial IR fixed pt の存在

(2,0)-theory (M5-brane) と S^1 コンパクト化で
関係している。

→ M5-brane を調べるのに使える。

技術的な進展によって、定量的な解析が可能となった。
(localization)

ここでは次の話題について紹介する。

$\boxed{1}$ 5d non-trivial SCFT

$\boxed{2}$ 5d SYM と (2,0) theory

$\boxed{3}$ 5d SYM と 3d-3d 対応

$\boxed{1}$ 5d non-trivial SCFT

5d SYM 研究の初期の論文

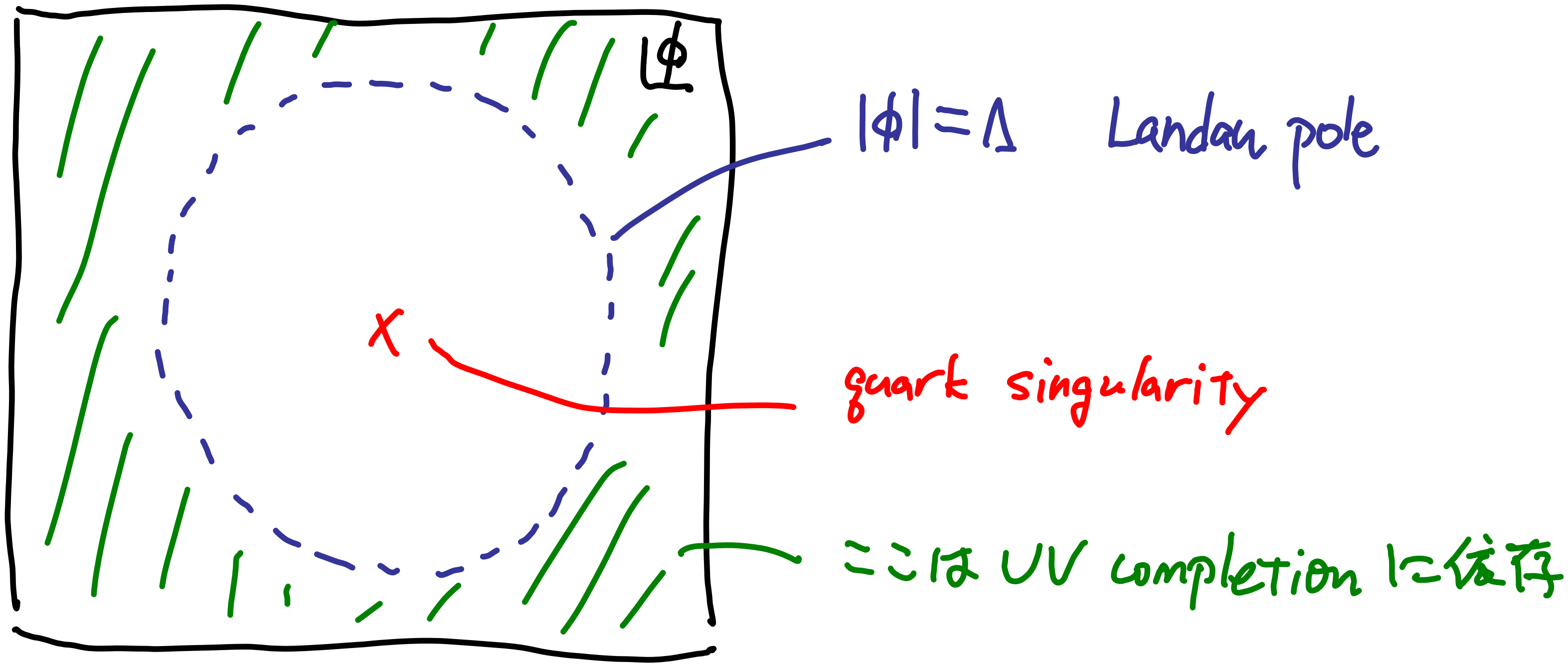
Seiberg, hep-th/9608111
"Five dimensional SUSY field theories,
non-trivial fixed points,
and string dynamics"

- 5d $\mathcal{N}=1$ SQCD の Coulomb branch の構造
(つまり "exact result") を与えた。
- Singularity において、E_n global sym をもつ
non-trivial SCFT が実現されることを指摘した。
(brane realization による。)

UVの情報なしで exact results は得られる?

4d $\mathcal{N}=2$ SQEDの場合

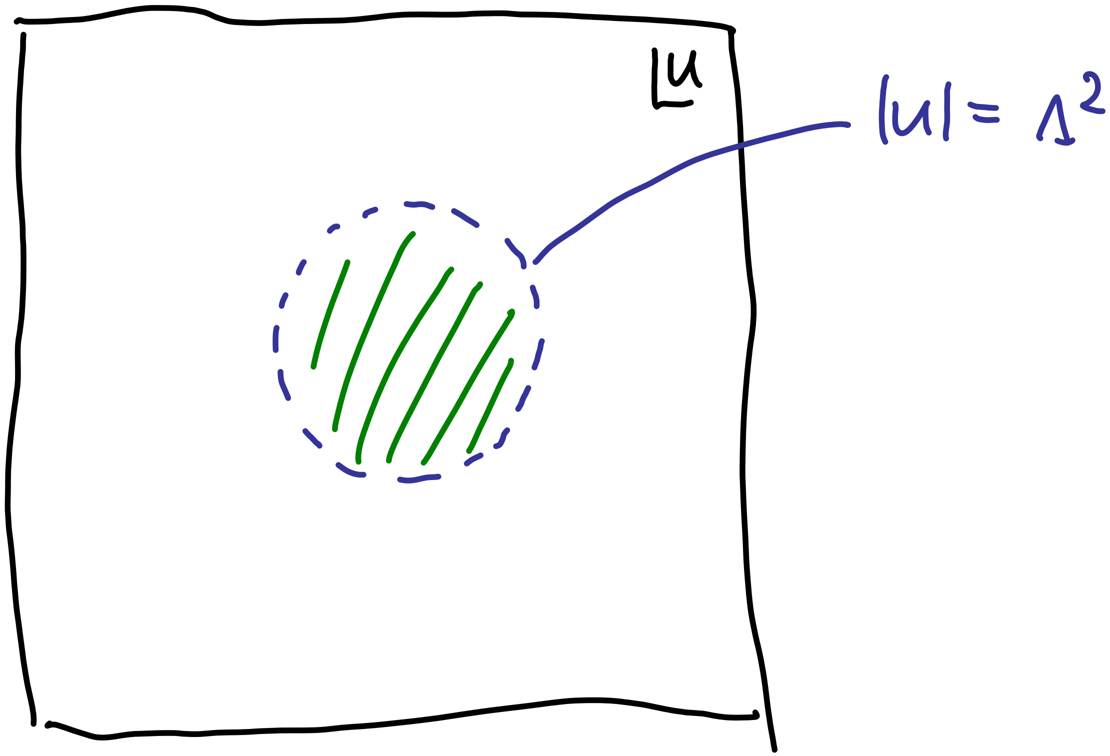
$$\tau \equiv \frac{2\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} = \underbrace{\frac{i}{2\pi}(-N_f)\log\frac{\phi}{\Lambda}}_{\text{tree + 1-loop}}$$



4d $\mathcal{N}=2$ SU(2) SYM

$$\tau \equiv \frac{2\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{i}{2\pi}(4-N_f)\log\frac{u}{\Lambda^2}$$

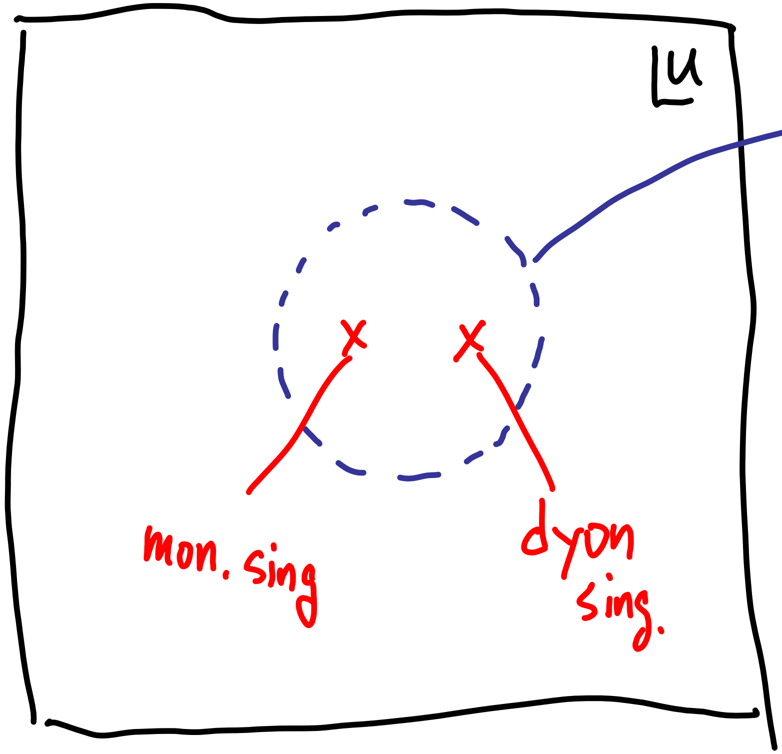
$N_f < 4$ で asymptotically free



4d $\mathcal{N}=2$ SU(2) SYM

$$\tau \equiv \frac{2\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{i}{2\pi}(4-N_f)\log\frac{u}{\Lambda^2} + (\text{instanton})$$

$N_f < 4$ で asymptotically free



$|u| = \Lambda^2$

instanton の効果をとり入れると strong coupling region まで決まる。

UVの情報は不要

5dでも同様

Coulomb branch の有限の領域については

UV completion に依らずに調べられる。

5d $\mathcal{N}=1$ SQCD について調べてみよう。

5d $\mathcal{N}=1$ supersymmetry

Q_I : symplectic Majorana

$I=1,2$ 8 components

$SU(2)_R$ doublet

4d $\mathcal{N}=2$ SUSY に類似

vector mult

A_μ gauge field

ϕ real scalar

λ_I symplectic Majorana

D_a auxiliary fields
($a=1,2,3$)

hyper mult

q_i real scalars

ψ_A symplectic Majorana
($A=1,2$)

SUSY変換

vector multiplet

$$\delta A_\mu = -(\epsilon^I \gamma_\mu \lambda_I)$$

$$\delta \phi = i(\epsilon^I \lambda_I)$$

$$\delta \lambda_I = -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\epsilon_I F_{\mu\nu} + i\gamma^\mu \epsilon_I D_\mu \phi + i\tau_{aI}{}^J \epsilon_J D_a$$

$$\delta D_a = i(\epsilon^I \tau_{aI}{}^J \cancel{D} \lambda_J)$$

hyper multiplet

$$\delta q_i = i(\epsilon^I \rho_{iI}{}^A \psi_A)$$

$$\delta \psi_A = i\bar{\rho}_{iA}{}^I \gamma^\mu \epsilon_I D_\mu q_i$$

SU(2) SQCD

$$S = -\frac{1}{g^2}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu \Phi D^\mu \Phi + \cdots\right) \qquad \text{vector}$$

$$-\sum_{i=1}^{N_f} D_\mu q_i^\dagger D^\mu q_i - q_i^\dagger (\underbrace{m_i + \Phi}_{\text{mass term}})^2 q_i + \cdots \qquad \text{hyper}$$

真空

固有値 $m_i \pm \phi$

Coulomb branch

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi & \\ & -\phi \end{pmatrix}$$

$SU(2) \to U(1)$

prepotential $\mathcal{F}(\phi)$

Higgs branch

$m_i \pm \phi = 0$

$\langle q_i \rangle \neq 0$

hyper Kähler

Low energy effective action (一般形)

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}''\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi - \frac{1}{2}D_aD_a - \frac{1}{2}(\lambda^I \not{D} \lambda_I)\right]$$

$$+\mathcal{F}'''\left[\underbrace{\frac{i}{24}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho\sigma}A_\lambda F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}}_{\text{Chern-Simons term}} + \frac{i}{8}F_{\mu\nu}(\lambda^I\gamma^{\mu\nu}\lambda_I) - \frac{1}{4}D_a(\lambda^I \tau_{a\,I}{}^J \lambda_J)\right]$$

gauge invariance

$\mathcal{F}'''$ is constant ($\mathcal{F}$ is at most cubic)

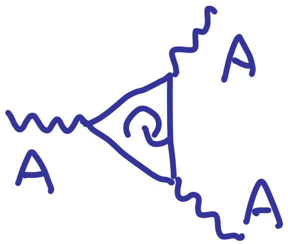
$\mathcal{F}'''$ (CS level) is quantized. $\mathcal{F}''' = \frac{k}{(2\pi)^2} \equiv 2\kappa \quad k \in \mathbb{Z}$

prepotential

$$F(\phi) = \frac{K}{3}\phi^3 + \frac{1}{2g_0^2}\phi^2 + \overbrace{\cdots}^{\text{actionに効かない。}}$$

を与えれば、Coulomb branch の構造が決まる。

CS term は 1-loop exact



$$= \int d^5k \, \frac{1}{\not{k}_1 - M} \not{A} \frac{1}{\not{k}_2 - M} \not{A} \frac{1}{\not{k}_3 - M} \not{A}$$

$$\sim \int d^5k \, \frac{M}{(k^2 - M^2)^3} \, A\partial A \partial A$$

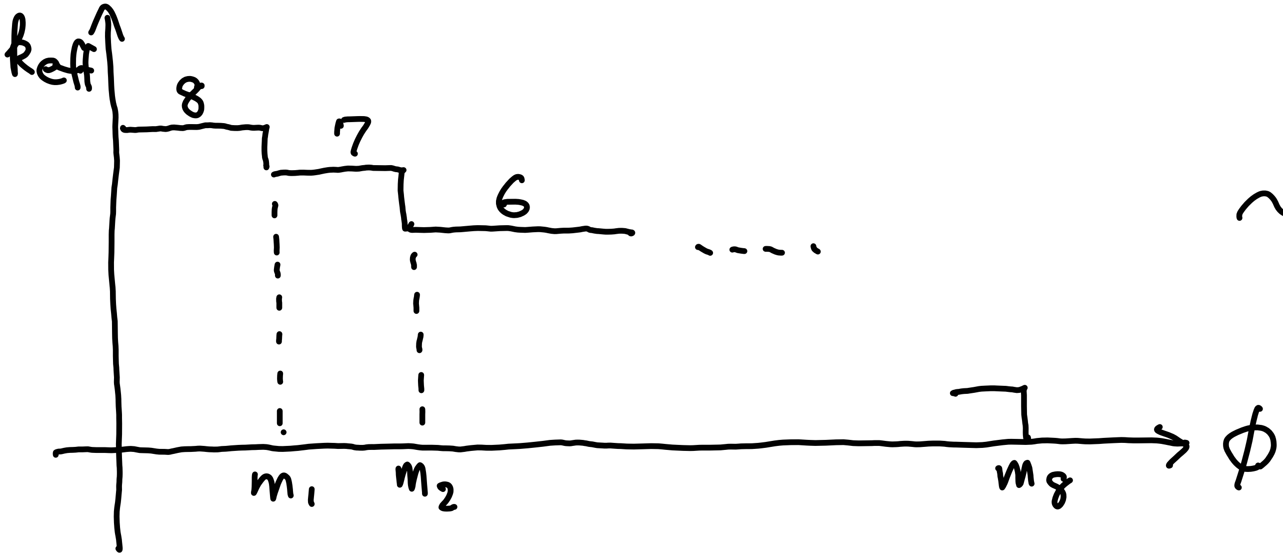
$$\sim \frac{M}{|M|} \, A\partial A \partial A$$

fermionごとの寄与 $\Delta k \propto \operatorname{sign} M$

SU(2) SQCD の場合

gaugino λ $\qquad\qquad$ ψ_i の effective mass

$$k_{\text{eff}} = 8 - \frac{1}{2}\sum_i \operatorname{sign}(m_i + \phi) - \frac{1}{2}\operatorname{sign}(m_i - \phi)$$

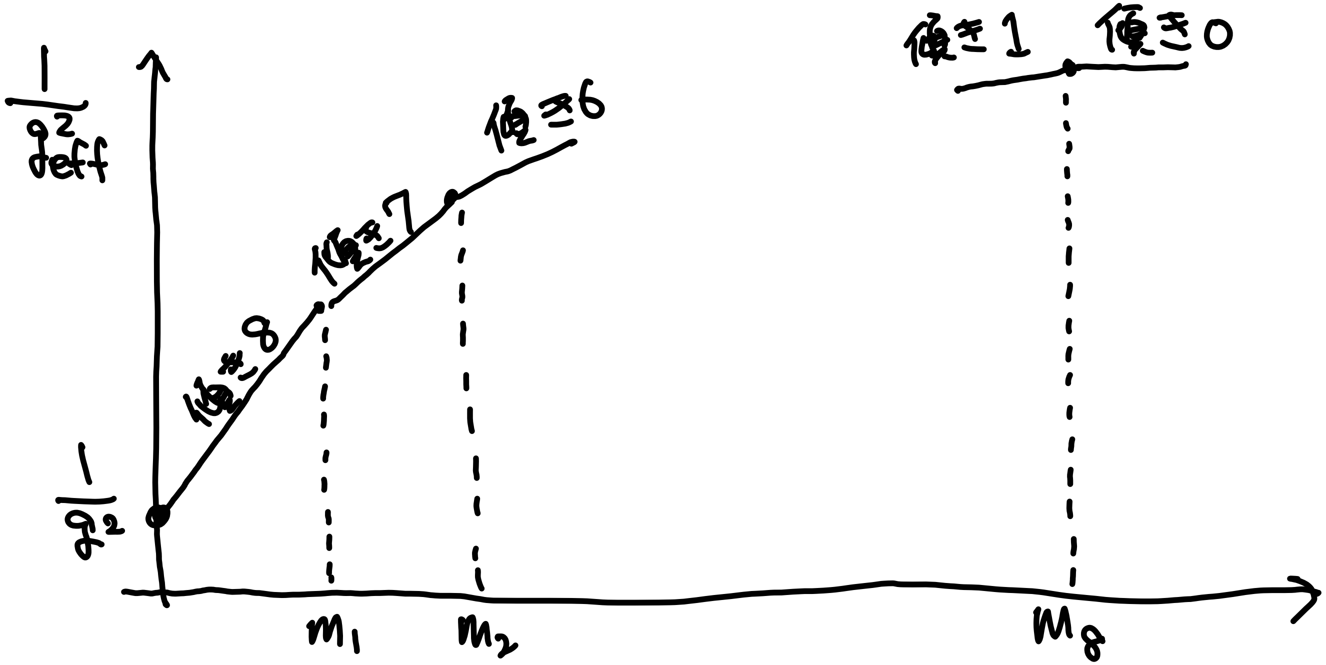


$\sim \mathcal{F}'''$

これを積分すれば、prepotential $\mathcal{F}(\phi)$ が得られる。

(Flat spacetime では $\mathcal{F}''(\phi)$ が与えられれば十分)

$$F''(\phi) = \frac{1}{g_{eff}^2} = \frac{1}{g^2} + 8\phi - \frac{1}{2}\sum_i |m_i + \phi| + \frac{1}{2}\sum_i |m_i - \phi|$$



$\frac{1}{g^2} > 0$,　$N_f \leqq 8$ なら

g_{eff} はいたるところ有限

5d SQCD に対する"SW解"が得られた.

4d と違う点

- 1-loop correction のみが効く.
- instanton は moduli space に影響しない.
- そもそも 5d では instanton は粒子.

- instanton は別の面白い現象をひきおこす.

  → symmetry enhancement

mass spectrum

W-bosons $M_{\pm} = 2\phi$

quarks $M_i = m_i \pm \phi$

instantons $M_{inst} = \frac{4\pi^2}{g_{eff}^2} = \frac{4\pi^2}{g_0^2} + \phi$

massless limit

$\phi \to 0$ $U(1)_{gauge} \to SU(2)_{gauge}$

$m_i \to 0$ $U(1)^{N_f} \to SO(2N_f)$

$$\boxed{m_i, \frac{1}{g_0^2} \to 0 \qquad SO(2N_f) \times U(1) \to E_{N_f+1} \quad \text{(Seiberg)}}$$

Seibergの主張

$m_i \to 0$, $g \to \infty$ の極限において non-trivial SCFT となり、

E_{N_f+1} 対称性があらわれる。

より一般に

$USp(2N_c)$ SQCD + anti-symmetric hyper

+ N_f fundamental hyper

$$\Downarrow \quad m_i \to 0,\ g \to \infty \ \text{limit}$$

non-trivial SCFT + E_{N_f+1} global sym

次の2つのことをチェックしたい.

- non-trivial SCFT
  - → AdS/CFT
- global symmetry enhancement
  - → superconformal index

AdS/CFT　　Jafferis and Pufu 1207.4359

- 問題の SQCD の gravity dual をつくり、free energy を比較してみる。

- SCFT側

  localization を用いた S^5 partition function Z_{S^5} の計算

- gravity側

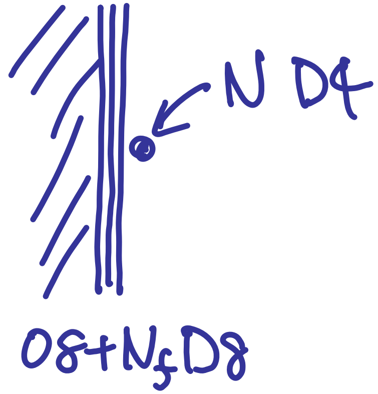
  brane construction にもとづき古典解を構成し、on-shell action $S_{\text{on-shell}}$ を計算

$$-\log Z_{S^5} \overset{?}{=} S_{\text{on-shell}}$$

まずはgravity側

Brane construction

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4	o	o	o	o	o					
O8, D8	o	o	o	o	o	o	o	o	o	



Near hor of D4 $\quad (AdS_6 \times \text{half } S^4)$

9905148 Brandhuber and Oz

$$ds^2 = \frac{1}{(\sin\alpha)^{1/3}}\left[L^2\frac{-dt^2+d\vec{x}^2+dz^2}{z^2}+\frac{4L^2}{9}\left(d\alpha^2+\cos^2\alpha\, ds_{S^3}^2\right)\right] \qquad 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$$

$$e^{-2\phi} = \frac{3(8-N_f)^{3/2}\sqrt{nN}}{2\sqrt{2}\pi}(\sin\alpha)^{5/3} \qquad \frac{L^4}{l_s^4} = \frac{18\pi^2 nN}{8-N_f}$$

singularity があるため、直接 on-shell action を計算できない。

"holographic entanglement entropy" (Ryu-Takayanagi)

として計算

$$F_{grav} = -\frac{9\sqrt{2}\pi N^{5/2}}{5\sqrt{8-N_f}} \quad \cdots \text{gravity 側の予言}$$

ちなみに

M2	D3	$\boxed{\text{D4}}$	M5
$N^{3/2}$	N^2	$\boxed{N^{5/2}}$	N^3

SQCD側の計算 (S^5 partition function)

perturbative sector

round S^5		squashed S^5	
1202.1956	Källén - Zabzine	1210.5909	Lockhart - Vafa
1206.6008	Källén - Qiu - Zabzine	1210.6308	Imamura
1206.6339	Kim - Kim		

Instanton sector (Squashed S^5)

1211.0144 Kim - Kim - Kim

perturbative sector の計算法

① S^5 上の supersymmetric action の構成

② Q exact deformation (weak coupling limit)

③ Gaussian integral (harmonic exp)

結果

$$Z_{S^5} = \int d\sigma\, e^{-S_{cl}} Z_{1\text{-loop}}$$

① S^5上のactionの構成

Conformal theory の場合 ($\mathcal{F} = \frac{1}{6} C_{ijk} \phi^i \phi^j \phi^k$)

Weyl tr $\mathbb{R}^5 \longrightarrow S^5$ を行えばよい

- vector mult については、curvature coupling を導入

$$\mathcal{L} = \frac{i}{6} C_{ijk} A^i \wedge F^j \wedge F^k + \frac{1}{4} C_{ijk} \phi^i F^j_{\mu\nu} F^{k\mu\nu}$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{1}{4} R \mathcal{F}(\phi)$$

- hyper mult については、Weyl tr. するだけ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu q_i D^\mu q_i + \frac{1}{2} (\psi^A \cancel{D} \psi_A) + \cdots$$

Yang-Mills action

→ "Compensator" (Central charge vector multiplet)

を用いる。　Kugo-Ohashi 0006231, 0010288

CS theory

$\frac{i}{6} A' \wedge \mathrm{tr}\, F \wedge F + \frac{1}{4} \phi' \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \cdots$

$\downarrow$　$\phi' = \frac{1}{g_{YM}^2}, \; A' = 0$ ← $\delta \lambda' = 0$ をみたす ϵ が存在するように

(conformal SUSY → rigid SUSY)

$\frac{1}{4 g_{YM}^2} \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

($\mathcal{N}=2$ theory は作れない。)

別の構成法

6d SCFT in $\mathbb{R}^6$ bosonic sym $D, R, J_{1,2,3}$

Qはこれらに対し $\pm\frac{1}{2}$ のchargeをもつ。

$\downarrow$ Weyl tr

6d SCFT in $S^5\times\mathbb{R}$ D: Hamiltonian

$\downarrow$ S^1 compactification by

$$e^{-\beta D}\Phi = \Phi$$

6d SCFT in $S^5\times S^1$

別の構成法

6d SCFT in $\mathbb{R}^6$ bosonic sym $D, R, J_{1,2,3}$

Qはこれらに対し $\pm\frac{1}{2}$ の charge をもつ。

$\downarrow$ Weyl tr

6d SCFT in $S^5\times\mathbb{R}$ D: Hamiltonian

$\downarrow$ S^1 compactification by

$e^{-\beta(D-R)}\Phi = \Phi$ ← 全てのQを残すことはできない。

6d SCFT in $S^5\times S^1$

($\mathcal{N}=2$ theory は作れない。)

$\downarrow$ $\beta\to 0$ limit

5d SYM in S^5

② Q-exact deformation

S^5上の SUSY をどれか1つ選び、

$$S \to S + tQV \qquad (Q^2V = 0)$$

と変形する。これは

- path integral を変えない。
- $t \to \infty$ が weak coupling limit
  (うまく Q, V を選ぶと)

ここでは

Killing spinor $\epsilon^\dagger \gamma^\mu \epsilon \sim v^\mu$

S^5上 Killing vector

$$SO(6) = SU(4) \supset SU(3) \times U(1)$$

← generated by v

Hopf fibration

$$Q\left[(Q\lambda)^\dagger \lambda\right] = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\epsilon^{mnpq5} F_{mn}F_{pq} + \cdots$$

Saddle pt.

$$\begin{cases} F_{12}+F_{34} = F_{23}+F_{14} = F_{31}+F_{24} = 0 \\ F_{5m} = 0 \\ D_\mu \phi = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{C}P^2$ 上の instanton

inst # $=0$ sector

$\to A_\mu = 0, \quad \phi = \sigma$ (const)

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi\, e^{-S_0 - tQV}$$

$t \to \infty$ においてGauss積分

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma\, e^{-S_0} Z_{1\text{-loop}}$$

action は SO(6) symmetry を破るが、

homogeneity は破らないので、

harmonic expansion による計算が可.

$S^5 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$ 上の spherical harmonics

$$Y(z, \bar{z}) = z_1^p z_2^q z_3^r \bar{z}_1^{p'} \bar{z}_2^{q'} \bar{z}_3^{r'}$$

boson - fermion cancellation の結果、fermion の highest weight states $(p' = q' = r' = 0)$ のみが効く. (Vector mult)

$$Z_{1\text{-loop}} = \prod_{p,q,r=0}^{\infty} (p+q+r-i\alpha)(p+q+r+3+i\alpha)$$

$$= S_3(-i\alpha) \quad \text{triple-sine function}$$

hyper mult からは boson のモードより

$$Z_{1\text{-loop}} = 1 \Big/ S_3\left(-i\rho + \frac{3}{2}\right)$$

一般公式

$$Z_{S^5} = \int d\sigma \, e^{-S_{cl}} \frac{\prod_{\alpha} S_3(-i\alpha(\sigma))}{\prod_{\rho} S_3(-i\rho(\sigma)+\frac{3}{2})}$$

σ : ゲージ群の Cartan sub-algebra の元

$\alpha(\sigma)$: root vector α に対する σ の固有値

$\rho(\sigma)$: weight vector ρ に対する σ の固有値

$$S_{cl} = (2\pi)^3 \mathcal{F}(\sigma)$$

The USp(2N) theory on Z_{S^5} (perturbative sector)

$$Z = \frac{1}{|W|}\int d\sigma \, e^{-F(\sigma)}$$

$$F(\sigma) \equiv (2\pi)^3 \mathcal{F}(\sigma) + \mathrm{tr}_{Ad} F_V(\sigma) + \mathrm{tr}_R F_H(\sigma)$$

bare prepotential

$$\mathcal{F}(\sigma) \propto \frac{1}{g_{YM}^2}\sigma^2 \to 0$$

asymptotic form

$$F_V(y) \approx \frac{\pi}{6}|y|^3 - \pi|y|, \quad F_H(y) \approx -\frac{\pi}{6}|y|^3 - \frac{\pi}{8}|y|$$

$$\sigma = \mathrm{diag}(\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \cdots, \pm\lambda_N), \quad |W| = 2^N N!$$

$N\to\infty$ において F を最小にする $\{\lambda_i\}$

$$\lambda_i \sim O(N^{\frac{1}{2}})$$

このとき、instanton は効かない.

$$S_{inst} \sim \frac{r}{g_{eff}^2} = \overset{=0}{\frac{r}{g_0^2}} + \frac{1}{12\pi^2}(8-N_f)|\lambda_i| \sim O(N^{\frac{1}{2}})$$

$N\to\infty$ では効かない。

Saddle pt.

$$F = -\frac{9\sqrt{2}\pi N^{5/2}}{5\sqrt{8-N_f}} + o(N^{5/2})$$

gravity 側の予言と一致

Global symmetry enhancement

Conformal point $(m_i \to 0,\ g \to \infty,\ \phi \to 0)$
では、quark fields と instanton が同時に
massless になり、global sym が E_n に enhance
する。

gauge invariant operator が E_n の
表現をなす。

$\Delta = 3$ の gauge inv. op. (BPS)

	$SO(2N_f)$	$U(1)_{inst}$
$\bar{q}q$	adjoint	0
$\lambda\lambda$	singlet	0
instanton	spinor	+1
anti-instanton	$\overline{\text{spinor}}$	−1

4 zero modes の存在により、spinor rep. に属する.

これらは ($N_f \leqq 5$ のとき) E_{N_f+1} の adjoint 表現を与える。

$N_f \leqq 5$

$N_f = 3$ $\quad SO(6) \times U(1) \to E_4$ $\quad 15_0 + 1_0 + 4_1 + \bar{4}_{-1} = 24$

$(= SU(4) \times U(1))$ $\quad (= SU(5))$

$N_f = 4$ $\quad SO(8) \times U(1) \to E_5$ $\quad 28_0 + 1_0 + 8_1 + \bar{8}_{-1} = 45$

$(= SO(10))$

$N_f = 5$ $\quad SO(10) \times U(1) \to E_6$ $\quad 45_0 + 1_0 + 16_1 + \overline{16}_{-1} = 78$

$N_f = 6, 7$ については、2-instanton も寄与

$N_f = 6$ $\quad SO(12) \times U(1) \to E_7$

$$66_0 + 1_0 + 32_1 + \overline{32}_{-1} + 1_2 + 1_{-2} = 133$$

$N_f = 7$ $\quad SO(14) \times U(1) \to E_8$

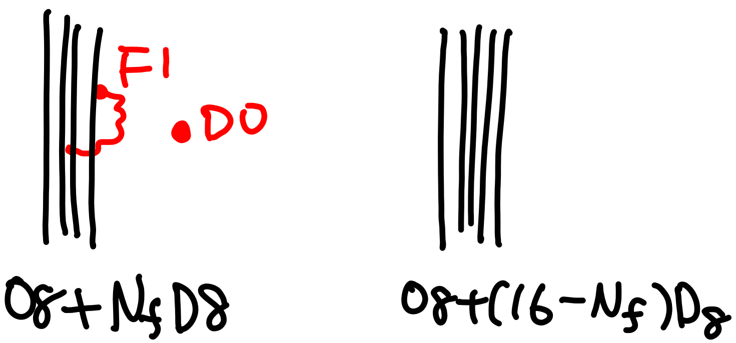
$$91_0 + 1_0 + 64_1 + \overline{64}_{-1} + 14_2 + 14_{-2} = 248$$

Polchinski, Witten hep-th/9510169

Bergman, Gaberdiel, and Lifschytz hep-th/9711098

String duality

Type IIA/$S^1/\mathbb{Z}_2$

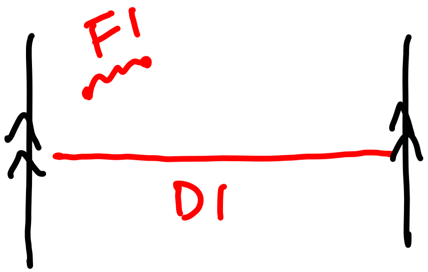


quarks = F1

instantons = D0

↓ T-dual

type I/S^1

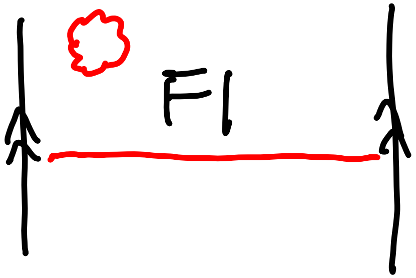


Wilson line

$$A_9 = \mathrm{diag}(+\mathbb{1}_{2N_f}, -\mathbb{1}_{32-2N_f})$$

↓ S-dual

Het SO(32)



弦のスペクトルとして計算できる。

→ $m_i \to 0,\ g \to \infty$ で sym. enh.

これを 5d SQCD において直接チェックしたい。

→ Superconformal index の計算

Kim, Kim, Lee arXiv:1206.6781

5-dim superconformal index

with enhanced E_n global symmetry

Superconformal algebra

	conformal sym	R-sym
bosonic sym	$SO(6,1)$ $\times$	$SU(2)$

Cartan gen. $\Delta,\ J_1,\ J_2,\ R$

Supercharges

	Δ	J_1	J_2	R
Q	$+\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$
S	$-\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$

以下では

Q	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
S	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

にのみ注目する.

$2J_1$

J_1+J_2

$$\{Q, S\} = \Delta - J_1 - J_2 - 3R$$

Superconformal index

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F \mathcal{O}\right]$$

F : fermion number

$\mathcal{O}$: Q, S と可換な operator

tr : gauge invariant operator についての和

一般形

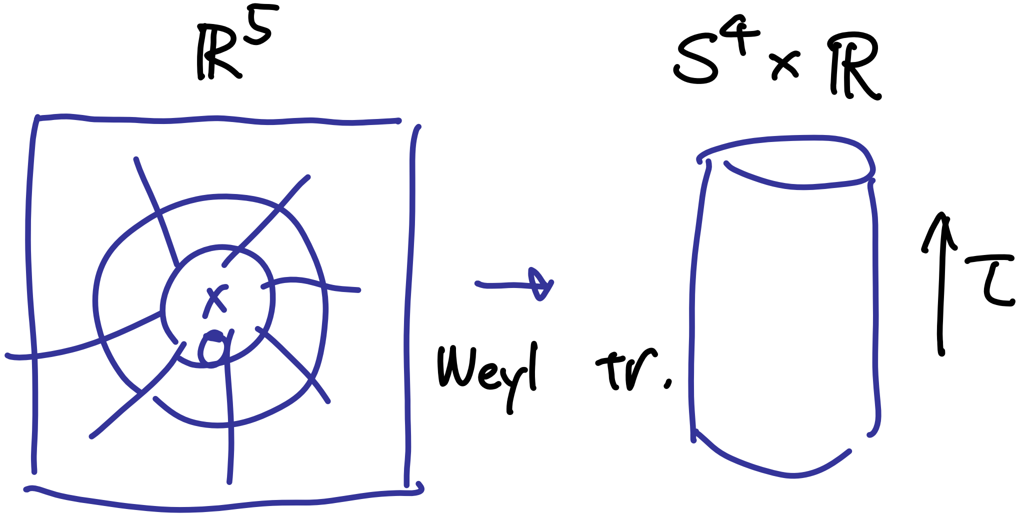
$$I(x_1, x_2, z_i, q) = \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-\beta\overbrace{(\Delta - J_1 - J_2 - 3R)}^{\{Q,S\}}} x_1^{J_1 - R} x_2^{J_2 - R} z_i^{H_i} q^k\right]$$

H_i : flavor sym

k : instanton #

Operator-state 対応

$$I(x,y,z_i,g) = \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-\beta\Delta} \cdots \right]$$



tr: S^4上の状態についての和

= τと$\tau+\beta$の同一視

(S^1コンパクト化)

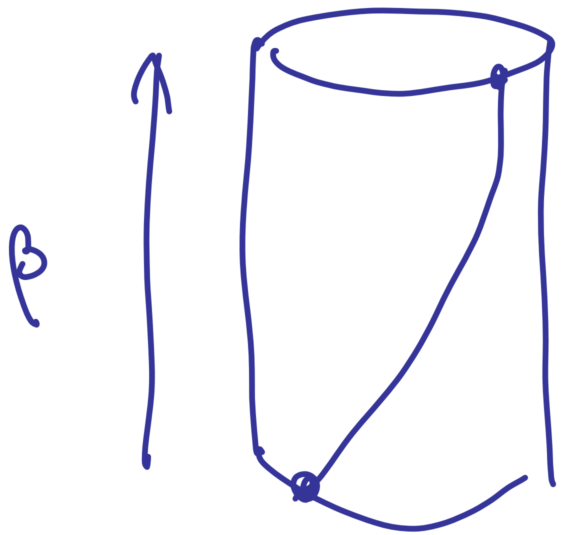
$$I(x_1,x_2,m_i,g) = \int \mathcal{D}\Phi \, e^{-S_{S^4\times S^1}}$$

S^1コンパクト化は chemical pot によってねじれている。

$$\mathcal{O} = e^{-\beta(\Delta - J_1 - J_2 - 3R)} x_1^{J_1+R} x_2^{J_2+R} z_i^{H_i}$$

$$= e^{-\beta\left[(\Delta - J_1 - J_2 - 3R) - \epsilon_1(J_1+R) - \epsilon_2(J_2+R) + a_i H_i\right]}$$

$$\left(\begin{array}{l} x = e^{-\beta\epsilon_1} \\ y = e^{-\beta\epsilon_2} \\ z_i = e^{-i\beta a_i} \end{array}\right)$$



12平面　$\beta(1+\epsilon_1)$ だけ回転

34平面　$\beta(1+\epsilon_2)$ だけ回転

このpath integralをlocalizationによって計算

$$S \to S + \delta V$$

$\delta = Q + S$ を用いる。

$$\delta^2 = \{Q, S\}$$

$$= \Delta - J_1 - J_2 - 3R$$

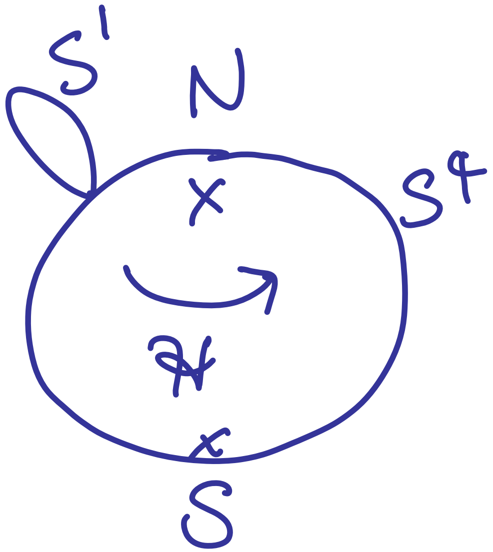
$$= (\Delta - J_1 - J_2 - 3R) - \epsilon_1 (J_1 + R) - \epsilon_2 (J_2 + R) + a_i H_i \quad \leftarrow S^1\text{への作用}$$

$$+ \epsilon_1 (J_1 + R) + \epsilon_2 (J_2 + R) - a_i H_i \quad \leftarrow S^4\text{への作用}$$

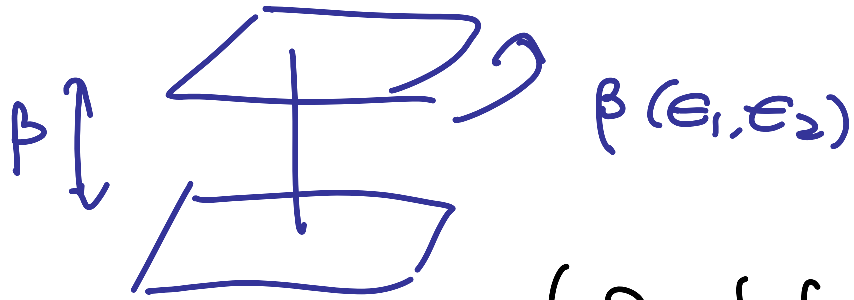
δ^2 は S^4 の isometry (+ internal sym) を生成する。

$$\delta^2|_{S^4} = \epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \cdots \equiv \mathcal{H}$$

path-integral は $\mathcal{H}$ の $\underbrace{\text{fixed pt}}_{N\text{ と }S}$ に localize する。



N と S の近傍では、geometry は $\mathbb{R}^4 \times S^1$



(Ω-deformation)

$\delta V = t\,\delta\left((\delta\lambda)^\dagger\lambda\right)$ と選べば, bosonic part は

$$F_{\tau i}^2 + \cos^2\frac{\theta}{2}(F_{ij}^-)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}(F_{ij}^+)^2 + \cdots$$

saddle pt $(\theta \neq 0, \pi)$

$$A_\tau = \mathrm{const}, \quad A_i = 0, \quad \phi = 0$$

$\theta = 0$ (North pole)

$F_{ij}^+ \neq 0$ でもよい.

(anti-instantons)

$\theta = \pi$ (South pole)

$F_{ij}^- \neq 0$ でもよい.

(instantons)

1-loop contribution も同様に localize

(Gomis, Okuda, Pestun 1105.2568)

計算結果は次のようになる。

$$I(x_1, x_2, m_i, q) = \int [d\alpha]\, I_S(\alpha, x_1, x_2, m_i, q)\, I_N(\alpha, x_1, x_2, m_i, q)$$

South pole $\quad I_S = I_S^{1\text{-loop}}\, I_S^{\text{inst}}$

North pole $\quad I_N = I_N^{1\text{-loop}}\, I_N^{\text{inst}}$

1-loop part

$$I_{vec}^{1\text{-loop}} = (x_1 x_2)^{\epsilon/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} f(x_1^n, x_2^n, n\alpha)\right]$$

$$f = f_{vec} + f_{mat}$$

$$f_{vec}(x_1, x_2, \alpha) = -\frac{1+x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}\sum_{adj} e^{-iR\cdot a}$$

$$f_{mat}(x_1, x_2, \alpha) = \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}\sum_{w}\sum_{i=1}^{N_f}\left(e^{-w\cdot a - i m_i} + e^{iw\cdot\alpha + i m_i}\right)$$

0404225 Nekrasov - Shadchin
0502180 Schadchin

Instanton part

$$I^{k=2n} \sim \oint [d\phi] \prod_{I=1}^{n} \left[\frac{\sinh \frac{\beta\epsilon_1 + \beta\epsilon_2}{2} \prod_{l=1}^{N_f} \sin \frac{m_l \pm \phi_I}{2}}{\sinh \frac{\beta\epsilon_1}{2} \sinh \frac{\beta\epsilon_2}{2} \prod_{i=1}^{N} \sin \frac{\phi_I \pm \alpha_i \pm (\beta\epsilon_1 + \beta\epsilon_2)/2}{2}} \right]$$

$$\prod_{I<J}^{n} \left[\frac{\sin \frac{\phi_I \pm \phi_J \pm i(\beta\epsilon_1 + \beta\epsilon_2)}{2}}{\sin \frac{\phi_I \pm \phi_J \pm i\beta\epsilon_1}{2} \sin \frac{\phi_I \pm \phi_J \pm i\beta\epsilon_2}{2}} \right]$$

$\oint [d\phi]$: $O(k)$ Cartan の積分

注
- $k = 2n+1$ のときは別の公式あり
- これは $O(k)$ の2つの component のうち片方の寄与

これらを全てあわせると、index が得られる。

$N_f=3$ のとき、

$$
\begin{aligned}
I_{\text{pert}} &= 1+\Big(\underbrace{e^{-im_1-im_2}+\cdots+e^{im_2+im_3}+3}_{gg}+\underbrace{1}_{\mathrm{Tr}(\lambda\lambda)}\Big)x_1x_2+\cdots \\
&= 1+\left(\chi^{SO(6)}_{15}+1\right)x_1x_2+\cdots
\end{aligned}
$$

Instanton の寄与を含めると、

$$
\begin{aligned}
I &= 1+\left(1+\chi^{SO(6)}_{15}+g\chi^{SO(6)}_{4}+g^{-1}\chi^{SO(6)}_{\bar{4}}\right)x_1x_2+\cdots \\
&= 1+\chi^{SU(5)}_{24}x_1x_2+\cdots
\end{aligned}
$$

$SU(5)=E_4$ symmetry を示唆している。

$N_f = 3, 4, 5$ に対しても、同様

xの高次も同様にまとまる。

(Kim, Kim, Lee では x^8 までチェックされている)

$N_f = 6, 7$ に関しては部分的にしかcheckできない。

2-instanton contribution を計算

するのがtechnicalに難しい。

1211.4886 Bashkirov　実はこれだけ示せば十分.

$\boxed{2}$ 5d SYM と (2,0) theory

(2,0) theory　　M5×N 上の理論, no parameters

"M-theory" for non-gravity theories.

no Lagrangian

$$\Big\downarrow \; S^1(R)\text{ コンパクト化}$$

$\mathcal{N}=2$ 5d SYM　　D4 上の理論

$$g_{YM}^2 = (2\pi)^2 R$$

(2,0)の存在とこの5d SYMとの関係より，いろいろ従う。

(例)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (2,0) \text{ on } T^2(R_1,R_2) \arrow[dl, "\cancel{S^1(R_2)}"'] \arrow[dr, "\cancel{S^1(R_1)}"] & \\
\begin{array}{c}\text{5d SYM on } S^1(R_1)\\ g^2=(2\pi)^2R_2\end{array} \arrow[d] & & \begin{array}{c}\text{5d SYM on } S^1(R_2)\\ g^2=(2\pi)^2R_1\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{4d SYM}\\ g^2=(2\pi)\frac{R_2}{R_1}\end{array} \arrow[rr, leftrightarrow, "\begin{array}{c}\text{Montonen-Olive}\\ \text{duality}\end{array}"'] & & \begin{array}{c}\text{4d SYM}\\ g^2=(2\pi)\frac{R_1}{R_2}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

$(2,0) \to$ 5dSYM

$\begin{cases} \text{dimensional reduction} \\ \text{compactification} \end{cases}$ どっち？

KK-modes

$$M = \frac{1}{R} = \frac{(2\pi)^2}{g^2} = (\text{instanton mass})$$

5dSYMには KK modeが含まれる.

等価なのでは？

1012.2880 Douglas

1012.2882 Lambert, Papageorgakis, Schmidt-Sommerfeld

楽観的な期待

- 5dSYM is finite and well-defined
- 5dSYM provides a definition of (2,0) theory

残念ながら

D=5 maximally supersymmetric Yang-Mills theory
diverges at 6-loops
1210.7709 Bern, Carrasco, Dixon, Douglas, Hippel, and Johansson

$$(2,0)\ \text{theory}/S^1 = 5d\,SYM + UV\ \text{completion}$$

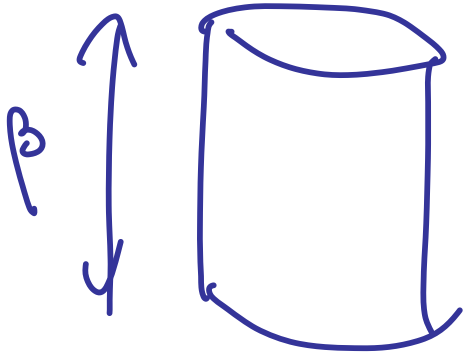
それでも、UV に依存しない量なら計算できる。

例：(2,0) 理論の index

$$(2,0)/S^5 \times S^1 = 5\mathrm{dSYM}/S^5 \ (+\mathrm{UV\ completion})$$

5d SYM を用いることで、計算できる。

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-\beta\left(\Delta - \frac{R_1+R_2}{2} - m(R_1-R_2)\right)}\right]$$



$$= \mathcal{N}=1 \ \ 5\mathrm{d\ SYM\ on\ } S^5$$

$+$ adj hyper w/ mass m

large N limit (instanton 効かないように limit とれる.)

perturbative part

$$Z = \int [d\phi]\, e^{-\frac{4\pi^3 r}{g_{YM}^2} \mathrm{tr}\,\phi^2} \frac{\det_{Ad} S_3(-i\alpha)}{\det_{Ad} S_3(-i\alpha + \frac{3}{2} + m)}$$

$$g_{YM}^2 = 2\pi\beta$$

't Hooft coupling $\lambda = \frac{N g_{YM}^2}{r} = 2\pi N \frac{\beta}{r}$

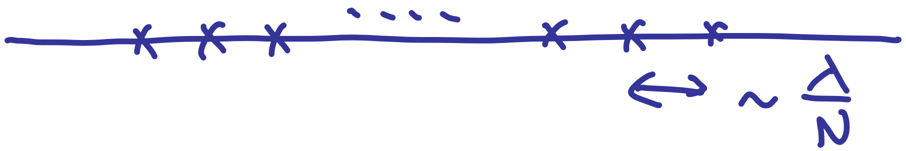
1207.3763 Kallen, Minahan, Nedelin, Zabzine

1304.1016 Minahan, Nedelin, Zabzine

Saddle pt

$$\Phi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N) \sim \lambda N^0 \qquad \frac{N}{\lambda}\lambda^2 \times N$$

$$\le \lambda$$



$$S = \frac{4\pi^3 r}{g_{YM}^2} \mathrm{tr}\,\phi^2 \sim \frac{N}{\lambda} \times \lambda^2 \times N \sim \frac{g_{YM}^2}{r} N^3$$

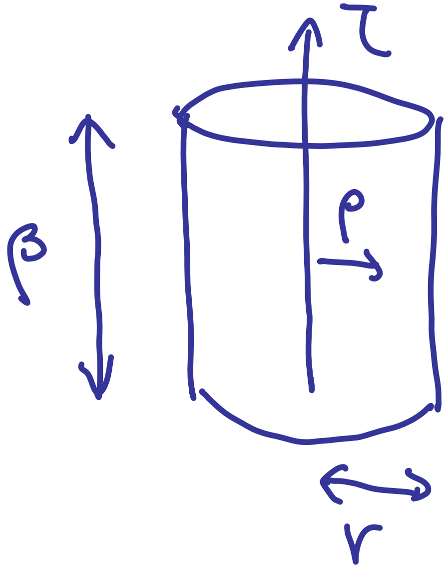
まじめに計算すると.

$$F = -\frac{(\frac{3}{2}-m)^2(\frac{3}{2}+m)}{48} \frac{g_{YM}^2}{\pi r} N^3$$

5d SYM の予言

Supergravity

$$ds^2 = \ell^2 \left(\cosh^2\rho \, d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho \, d\Omega_5^2 \right)$$



on-shell action

$$I = (\text{divergent terms}) - \frac{5\pi R_6}{12 r} N^3$$

$$= (\ \ " \ \ ) - \underbrace{\frac{5 g_{YM}^2}{96 \pi r} N^3}$$

数係数を除き一致

数係数まで合わせるには?

→ SUSYを残すような古典解を用いる?

より詳しい情報を得るには

- finite N
- instanton contribution
- index with general chemical potential

1211.0144 Kim Kim Kim

"Instantons on the 5-sphere and M5-brane"

(2,0) superconformal algebra

bosonic symmetry $SO(7,1) \times SO(5)_R$

Cartan generators $\Delta, J_{1,2,3}, R_{1,2}$

fermionic generators $16Q + 16S$

特にそのうち次の量子数をもつものを選ぶ

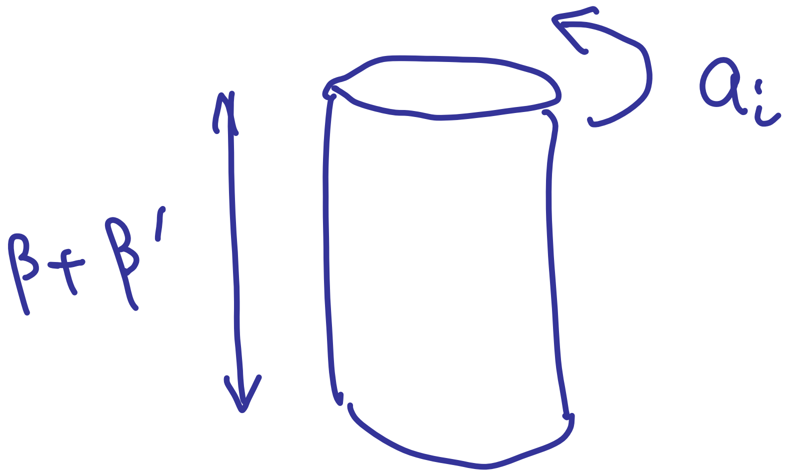
	Δ	J_1	J_2	J_3	R_1	R_2
Q	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
S	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$$\{Q, S\} = \Delta - 2(R_1 + R_2) - (J_1 + J_2 + J_3)$$

Superconformal index の一般形

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-\beta'\{Q,S\}} e^{-\beta\left(\Delta - \frac{R_1+R_2}{2} - m(R_1-R_2) + a_i J_i\right)}\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[(-1)^F \underbrace{e^{-(\beta+\beta')\{Q,S\}} e^{-\beta\left(\frac{3}{2}(R_1+R_2) - m(R_1-R_2) + (1+a_i)J_i\right)}}_{S^1 \text{ compactification を決める operator}}\right]$$



dimensional reduction の結果 squashed S^5 を与える。

localization

$S \to S + t\delta V$ と deformし、$t \to \infty$ でGauss積分

$\delta = Q + S$ を用いる.

$$(\beta+\beta')\delta^2 = (\beta+\beta')\{Q, S\}$$

$$= (\beta+\beta')\{Q, S\} + \beta\left[(1+a_i)J_i + \frac{3}{2}(R_1+R_2) - m(R_1-R_2)\right]$$

S^1に作用

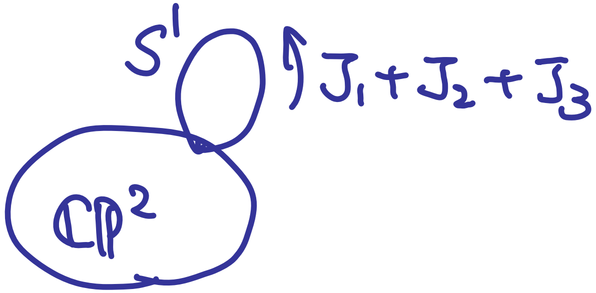
$$-\beta\left[(1+a_i)J_i + \frac{3}{2}(R_1+R_2) - m(R_1-R_2)\right]$$

S^5に作用

Squashed S^5 では

$$\mathcal{H} \equiv \delta^2 = (1+a_i)J_i + (R\text{-sym}) + (\text{gauge sym})$$

さらに、$S^5 = \mathbb{CP}^2$上の Hopf fibration とみなす。

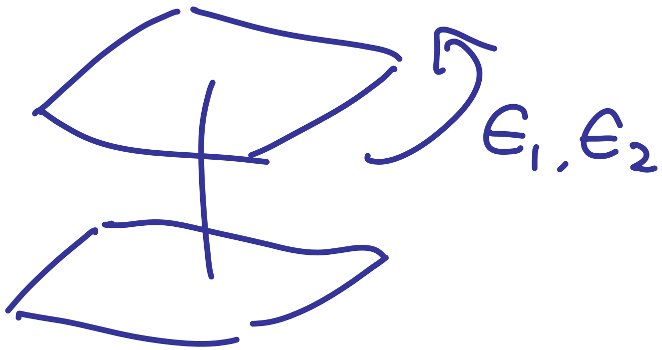


$$\mathcal{H} = (1+a_3)(J_1+J_2+J_3) \quad \leftarrow S^1$$

$$+ (a_1-a_3)J_1 + (a_2-a_3)J_2 \quad \leftarrow \mathbb{CP}^2$$

$$+ \text{internal}$$

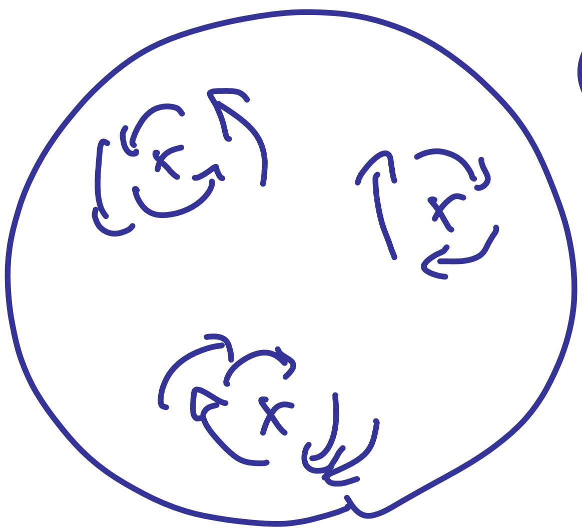
$z_1=z_2=0$ が fixed pt 、その近傍では $\mathbb{R}^4\times S^1$



Ω-deformation

$$\begin{cases} \epsilon_1 = a_1 - a_3 \\ \epsilon_2 = a_2 - a_3 \end{cases}$$

Equivariant localization



$\mathbb{C}P^2$

Path integral は $\mathbb{C}P^2$ 上の 3つの fixed points に localize

$$(\epsilon_1, \epsilon_2) = \begin{cases} (a_2 - a_1, a_3 - a_1) \\ (a_3 - a_2, a_1 - a_2) \\ (a_1 - a_3, a_2 - a_3) \end{cases}$$

$$Z(\beta, m, a_i) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \; e^{-S_0}$$

$$Z_{pert}^{(1)} Z_{inst}^{(1)} \cdot Z_{pert}^{(2)} Z_{inst}^{(2)} \cdot Z_{pert}^{(3)} Z_{inst}^{(3)}$$

計算結果

$$e^{-S_0} = e^{-\frac{2\pi^2 \mathrm{Tr}\,\lambda^2}{\beta(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}}$$

Nekrasov partition func

$$Z^{(3)}_{\mathrm{inst}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2 k}{\beta(1+a_3)}} \sum_{Y;\,|Y|=k} Z^{(3)}_{Y}(\lambda_i, m, a_{1,2,3})$$

$$Z^{(3)}_{\mathrm{pert}} = \text{func. of. } (\lambda_i, m, a_{1,2,3})$$

non-trivial check 1 U(1) case

6d : (2,0) theory with free tensor multiplet

Index は知られている.

$$I_{6d} = PE[f] \equiv \exp\left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} f(p\beta, m, a_i)\right]$$

bosons fermions Dirac eq.

$$f(\beta, m, a_i) = \frac{e^{-\frac{3\beta}{2}}(e^{\beta m} + e^{-\beta m}) - e^{-2\beta}(e^{\beta a_1} + e^{\beta a_2} + e^{\beta a_3}) + e^{-3\beta}}{(1-e^{-\beta(1+a_1)})(1-e^{-\beta(1+a_2)})(1-e^{-\beta(1+a_3)})}$$

これが 5d SYM から得られたものと一致するか?

I_{6d} は $e^{-m\beta}$ の展開として与えられている.

一方、5d SYM における instanton 展開は

$$e^{-S_{inst}} = e^{-\frac{4\pi^2}{g_{YM}^2}\times 2\pi r} = e^{-2\pi\frac{r}{\beta}}$$

による展開

$$I_{6d}\left(e^{-2\pi\beta}\right) \overset{?}{=} Z_{5d}\left(e^{-2\pi\frac{1}{\beta}}\right)$$

書きかえを行う必要がある。

これは次のように行うことができる。

$PE[f] = \exp\left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} f(p\beta, m, a_i)\right]$ の書きかえ（一部）

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} f(p\beta) = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\epsilon}^{\infty} ds\ \delta(s-p\beta) \frac{\beta}{s} f(s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\epsilon}^{\infty} ds\ e^{\frac{2\pi i n s}{\beta}} \frac{1}{s} f(s)$$

$$= \sum_{n\neq 0} \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{\frac{2\pi i n s}{\beta}} f(s) + (\cdots)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{\frac{2\pi i n s}{\beta}} f(s) + (\cdots)$$

Residue theorem

$e^{-\frac{(\cdots)}{\beta}}$ の式

$\Uparrow$

Z_{5d} に一致

注 free tensor multiplet の KK mode を得るには U(1) instanton が必要

$\beta \to \frac{1}{\beta}$ の書きかえをせず、直接 index を得ることもできる

1307.7660 Kim, Kim, Kim, Lee

$$(2,0) \text{ on } \overset{r}{S^5} \times \overset{\beta = 2\pi R}{S^1}$$

$$\begin{array}{ccc} & (2,0) \text{ on } S^5 \times S^1 & \\ \swarrow_{S^1} & & \searrow^{\text{Hopf fiber}} \\ \text{5d SYM on } S^5 & & \text{5d SYM on } \mathbb{C}P^2 \times S^1 \end{array}$$

5d SYM on S^5

$$g_{YM}^2 = (2\pi)^2 R$$

$$S_{inst} \sim \frac{(2\pi)^2}{g_{YM}^2} \times 2\pi r = 2\pi \frac{r}{R}$$

5d SYM on $\mathbb{C}P^2 \times S^1$

$$g_{YM}^2 = (2\pi)^2 r$$

$$S_{inst} \sim \frac{(2\pi)^2}{g_{YM}^2} \times 2\pi R = 2\pi \frac{R}{r}$$

Consistent な結果が得られている。

non-trivial check 2　　large N limit

maximal SUSY の場合を考える。

$$m=\frac{1}{2},\quad \epsilon_1=\epsilon_2=0$$

instanton contribution が簡単になる。

$$Z_{inst}^{(1)}Z_{inst}^{(2)}Z_{inst}^{(3)}=e^{\frac{N\pi^2}{6\beta}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-e^{-\frac{4\pi^2 n}{\beta}}\right)^N}$$

$$=\eta\left(e^{-\frac{4\pi^2}{\beta}}\right)^{-N}=\left[\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\,\eta\left(e^{-\beta}\right)\right]^{-N}$$

$$=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{-\frac{N}{2}}e^{\frac{N\beta}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-e^{-n\beta}\right)^N}$$

perturbative part

$$Z_{\text{pert}} = e^{\frac{\beta}{6}N(N^2-1)}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\prod_{m=1}^{N-1}(1-e^{-m\beta})^{N-m}$$

もあわせると、

$$Z = e^{\beta\left(\frac{N(N^2-1)}{6}+\frac{N}{24}\right)}\prod_{m=1}^{N}\frac{1}{(1-e^{-m\beta})^m}\prod_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{(1-e^{-m\beta})^N}$$

0-pt energy 部分を別にすると、$N\to\infty$ limit で

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^n} = PE\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]$$

MacMahon function

一方、SUGRA側では　$AdS_7 \times S^4$ 上のモード解析より

$$I = PE[I_{sp}]$$

$$I_{sp} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sum over} \\ \text{single-particle excitations}}}{\mathrm{tr}} \left[(-1)^F e^{-\beta(\Delta - R_1)} \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kaluza-Klein analisys}}}{=} \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$I = PE[I_{sp}(q)] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}$$

5dSYMによる計算と一致

まとめ

- 5d SYM から得られる index は正しく KK mode の寄与を与えているようである

- その他にも、

$$(2,0)/S^1 = 5d\ \mathrm{SYM}\ (+\ \mathrm{UV\ completion})$$

と consistent な結果が得られている。

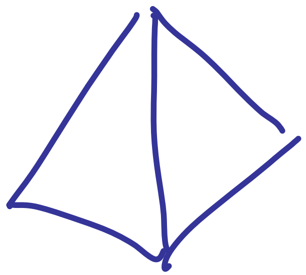
$\boxed{3}$ 5d SYM と 3d-3d 対応

3d-3d 対応

Chern-Simons on 3d manifold M	$\longleftrightarrow$	3d $\mathcal{N}=2$ gauge theory $T(M)$

manifold の topology $\longleftrightarrow$ quiver の構造

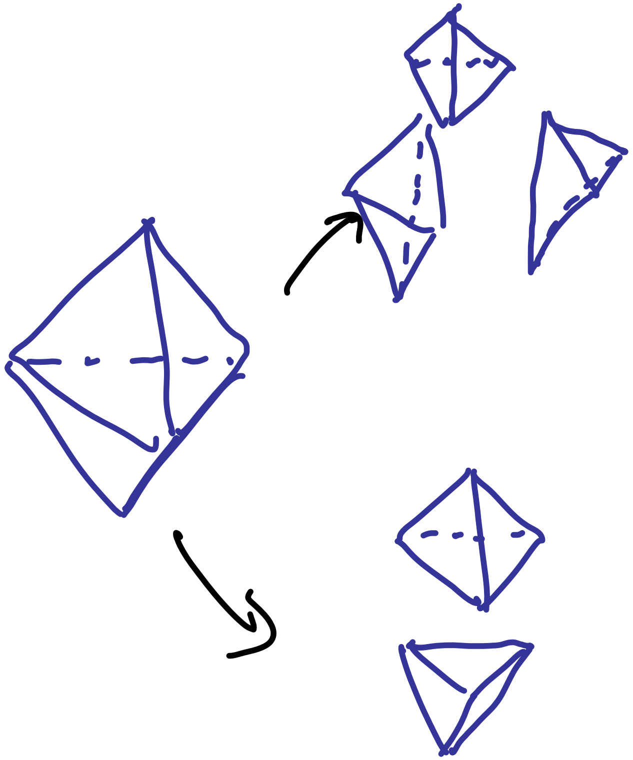
(例)



四面体 $\longleftrightarrow$ Φ chiral multiplet

$$Z_M(CS) = Z_{S^3}(T(M))$$

M : bi-pyramid $\qquad T(M)$



XYZ-model

$W = XYZ$

dual

SQED + $N_f = 1$

$U(1) + (Q, \tilde{Q})$

四面体分割 $\longleftrightarrow$ quiver gauge theory

1108.4389 Dimofte, Gaiotto, and Gukov

具体的对应

$$CS: \mathcal{L} = \mathrm{Re}\, \frac{q}{4\pi} \int_{M} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}\, d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\right)$$

$\mathcal{A}$: $g_{\mathbb{C}}$ gauge field $\quad q = k + iu$

$$k = 0,\ u = \frac{2r}{R} \qquad\qquad k = 1,\ u = \frac{b - b^{-1}}{b + b^{-1}}$$

$$Z_M(CS) = I_{S^2 \times S^1}(T(M)) \qquad\qquad Z_M(CS) = Z_{S^3_b}(T)$$

なぜこのような対応があるのか?

Naiveな期待

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{(2,0) \text{ on } \mathcal{U} \times X} \arrow[dl, "X \to \cdot"', "①"] \arrow[dr, "②"', "\mathcal{U} \to \cdot"] & \\
\boxed{CS \text{ on } \mathcal{U}} & & \boxed{T(\mathcal{U}) \text{ on } X}
\end{tikzcd}
$$

(2,0) theory を知っていれば

直接確かめることができるのに...

実は 5d SYM をうまく用いることで

$$\begin{array}{c}\boxed{(2,0)\ \text{on}\ \mathcal{M}\times X}\\ \Big\downarrow\ X\to 0\\ \boxed{\text{CS on}\ \mathcal{M}}\end{array}$$

を示すことができる。

Yagi 1305.0291

Yamazaki, Lee 1305.2429

Cordova, Jafferis 1305.2891

Yagi, Yamazaki-Lee

$(2,0)$ on $\mathcal{M} \times S^2 \times S^1$

$$\parallel$$

5d SYM on $\mathcal{M} \times S^2$

$$\Big\downarrow \quad \boxed{S^2 \text{ compactification}}$$

3d CS on $\mathcal{M}$ (non-SUSY)

(cf. 5d SYM $\xrightarrow{S^3}$ 2d YM_q

1206.5966 Kawano, Matsumiya

1210.2855 Fukuda, Kawano, Matsumiya)

ギモン

① SUSYはどうなる?

6dでSUSYあり. 3d CS は non-SUSY

② CS term はどこからあらわれる?

③ 余分な場はどうやって消える?

SUSYについて、

Yagi 1305.0291

Yamazaki, Lee 1305.2429

6d ↓

5d SYM $\to$ 3d + 2d

$SO(5)_L \times SO(5)_R \to SO(3)_L \times SO(3)_R \times SO(2)_L \times SO(2)_R$

$Q: (4,4) \to (2,2)_{++} + (2,2)_{+-} + (2,2)_{-+} + (2,2)_{--}$

M の metric に依存しないためには、$SO(3)_L$ に対して topological twist が必要

$SO(3)_D \subset SO(3)_L \times SO(3)_R$

を改めて Lorentz sym とみなす。

$SO(3)_D \times SO(2)_L \times SO(2)_R$

$Q : \; 3_{\pm\pm} + 1_{\pm\pm}$

M 上では scalar ("BRS" sym)

S^2 上では spinor (SUSY)

$\boxed{(2,0)}$

$\boxed{M \text{ 上の non-SUSY theory}}$ $\quad$ $\boxed{S^2 \text{ 上の } (2,2) \text{ theory}}$

同様の分解を場について行うと、

$$SO(5)_L \times SO(5)_R$$

$$A_M \quad (5,1) \to (3_0, 1_0) + (1_{+2}, 1_0) + (1_{-2}, 1_0)$$

$$\lambda \quad (4,4) \to (2_{+1}, 2_{+1}) + (2_{+1}, 2_{-1}) + (2_{-1}, 2_{+1}) + (2_{-1}, 2_{-1})$$

$$\phi \quad (1,5) \to (1_0, 3_0) + (1_0, 1_{+2}) + (1_0, 1_{-2})$$

$\Downarrow$ Top twist

$$A_M \to 3_{00} + 1_{\pm 2, 0}$$

$$\lambda \to 3_{\pm 1 \pm 1} + 1_{\pm 1 \pm 1}$$

$$\phi \to 3_{00} + 1_{0 \pm 2}$$

$S^2 \times \Sigma(2,2)$ の chiral mult vector mult

S^2 上の理論とみなすと，

chiral multiplets

$$(A_\mu + i\phi_\mu \ , \ \lambda_\mu) \qquad \mu = 1,2,3$$

$\mathbb{R}^5$ 上の Yang-Mills action

$$F_{MN}^2 + (D_M \phi_I)^2 + [\phi_I, \phi_J]^2 \qquad \begin{array}{l} M,N = 1,\cdots,5 \\ I,J = 1,\cdots,5 \end{array}$$

このうち，2d scalar

$$F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu \phi_\nu)^2 + [\phi_\mu, \phi_\nu]^2 \qquad \mu,\nu = 1,2,3$$

$$X_\mu = A_\mu + i\phi_\mu$$

$$= [X_\mu, X_\nu][X_\mu^*, X_\nu^*] = \left| \frac{\partial W}{\partial X_\mu} \right|^2$$

ただし Superpotential

$$W = \mathrm{tr}\, \epsilon^{\mu\nu\rho} X_\mu X_\nu X_\rho$$

3d方向の微分を無視せずに残すと、

$$W = \mathrm{tr}\, \epsilon^{\mu\nu\rho} \underbrace{\left(X_\mu \partial_\nu X_\rho + \frac{2}{3} X_\mu X_\nu X_\rho \right)}_{\text{3d CS term}}$$

top. twist のおかげで

$$\mathbb{R}^3 \to M$$

とすることができる。

$\mathbb{R}^5 \to \mathcal{M} \times \mathbb{R}^2$ で得られる action は

$$\mathcal{L} = [\text{vector mult に対する kin terms}]$$
$$+ [\text{chiral mult に対する kin terms}]$$
$$+ \mathrm{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial X_\mu} F_\mu\right]$$

← 2d conformal sym を破る。

$\mathbb{R}^2$ を S^2 に置きかえると、

$$\mathcal{L} = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial X_\mu} F_\mu + \frac{1}{r} W\right]$$

CS term が現れる。

Path-integral

Saddle pt $\quad$ vector : $\varphi_I = F_{12} = D = 0$

chiral : $X_\mu(x^\mu, y^m) = A_\mu(x^\mu) \quad F_\mu = 0$

S^2 上の zero modes A_μ 以外を path integral

$$Z_{5d} = \int \mathcal{D}A_\mu(x^\nu)\,\mathcal{D}\bar{A}_\mu(x^\nu)\, e^{-\frac{2\pi r}{g^2}\int_M \mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{CS}}\, Z_{1\text{-loop}}(A, \bar{A})$$

index theorem

$$Z_{1\text{-loop}} = 1$$

Yamazaki, Lee

$$\boxed{\text{5d SYM on } M \times S^2 = \text{3d CS on } M}$$

一般化 Cordova, Jafferis

(2,0) on $\mathcal{M} \times \underline{\underline{S^3}}$

Hopf fiber の reduction

$\mathcal{M} \to \cdot$

5d SYM on $\mathcal{M} \times S^2$

$+ \int J \, \mathrm{tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$

S^2 の kahler form

T($\mathcal{M}$) on S^3

$S^2 \to \cdot$

CS on $\mathcal{M}$

$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{Tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)}$

さっきのものにこれが加わる。

$Z_{\mathcal{M}}(CS_{k=1}) = Z_{S^3}(T(\mathcal{M}))$

$X = S^2 \times S^1,\ S^3$ に対して ⇙ が示された。

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{(2,0) \text{ on } \mathcal{M} \times X} \arrow[dl, Rightarrow, "X \to \bullet"'] \arrow[dr, "\mathcal{M} \to \bullet"] & \\
\boxed{\text{CS on } \mathcal{M}} & & \boxed{T(\mathcal{M}) \text{ on } X}
\end{tikzcd}$$

まとめ

- 5d SYM はくり込み不可能であるが、UV completion に依らない量を計算することができる。
- 5d SYM それ自体、非自明な dynamics を持つ。面白い。
- 6d (2,0)$/S^1$ = 5d SYM (+ UV completion)
- (2,0) との関係を仮定すると、低次元の理論の duality を調べるのに使える。