

ABJ Wilson loop & Seiberg Duality

ABJ理論 3d $U(N_1) \times U(N_2)$ $\mathcal{N}=6$ CSM theory において supersymmetric Wilson loop の厳密計算を行った。それを用いて、Seiberg duality の解析を行った。

Keita Nii (Nagoya Univ.)

with S. Hirano (Witwatersrand) & M. Shigemori (YITP)

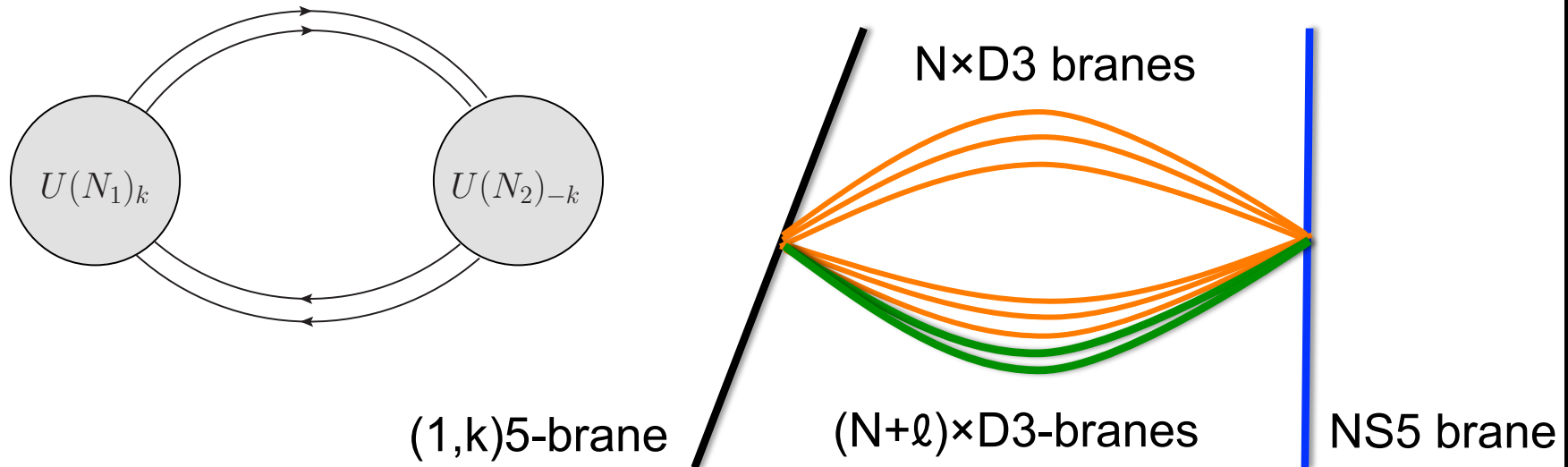
@ YITP workshop 2013 “Field Theory and String Theory”

ABJ theory (Aharony-Bergman-Jafferis)

JHEP11(2008)043

3次元超対称

$\mathcal{N} = 6$ $U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k}$ Chern-Simons Matter theory

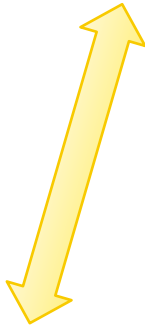


☆ 局所化の方法を使って、SUSYを保つ部分に関して厳密な解析ができる。
→ finite N_1, N_2 の解析 (量子重力の効果、弦理論の非摂動効果)

ABJ triality

$\mathcal{N} = 6 U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k}$ CSM theory

large N_1
finite k



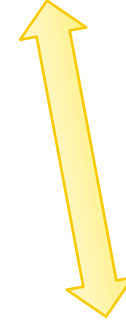
M-theory on $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7 / \mathbf{Z}_k$
with discrete torsion

large N_1, k
fixed N_1/k



Type IIA on $\text{AdS}_4 \times \mathbf{CP}^3$
with discrete holonomy

large N_2, k
fixed N_2/k finite N_1



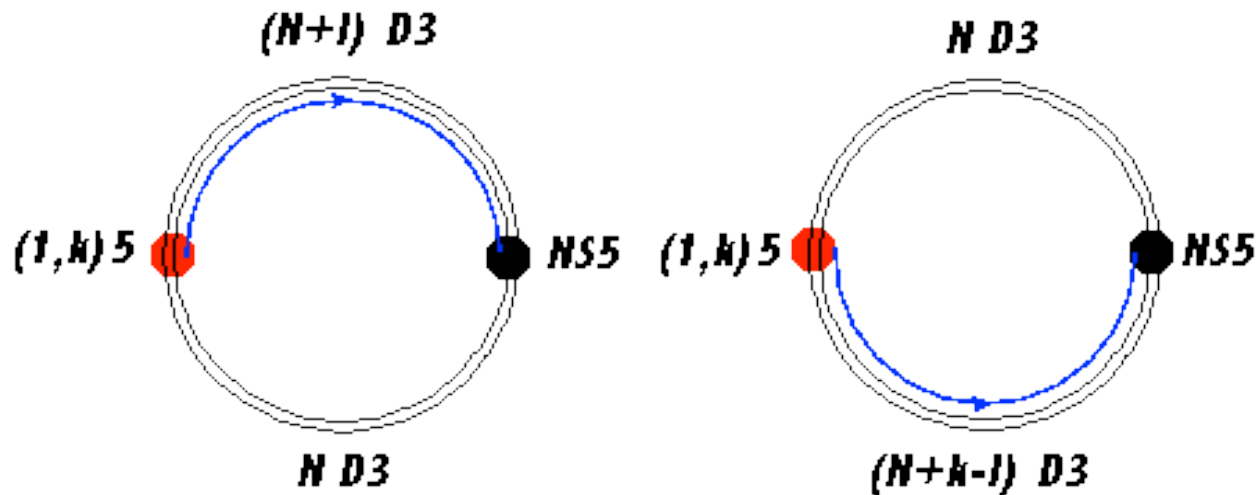
$\mathcal{N} = 6 U(N_1)$ parity-violating
Vasiliev higher spin theory on AdS_4

[Chang-Minwalla-Sharma-Yin]

Seiberg Duality

$$U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k} = U(2N_1 + k - N_2)_k \times U(N_1)_{-k}$$

▷ brane creation effect [Hanany, Witten '97]



ABJ Wilson loop

$$W_{\square}^{1/6} = \text{Tr } \mathcal{P} \exp \int \left(iA_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \frac{2\pi}{k} |\dot{x}| M_I^J C_I \bar{C}^J \right)$$

□ The localization technique

$$W_{\text{ABJ}}^i \equiv \mathcal{N}_{\text{ABJ}} \int \prod_{j=1}^{N_1} \frac{d\mu_j}{2\pi} \prod_{a=1}^{N_2} \frac{d\nu_a}{2\pi} \frac{\prod_{j < k} \left(2 \sinh \frac{\mu_j - \mu_k}{2} \right)^2 \prod_{a < b} \left(2 \sinh \frac{\nu_a - \nu_b}{2} \right)^2}{\prod_{j,a} \left(2 \cosh \frac{\mu_j - \nu_a}{2} \right)^2} e^{-\frac{1}{2g_s} (\sum_j \mu_j^2 - \sum_a \nu_a^2)} e^{p\mu_i}$$

vector multiplet
1-loop determinant

CS action
on the locus

matters 1-loop determinant

Wilson loop

$p = 0$: partition function

$p = 1$: winding 1, fundamental Wilson loop

$p = 2$: winding 2, 対称・反対称表現のWilson loop を含む。

分母がやっかい。

▷ 1/6 BPS Wilson loop

$$W_{1/6}^I \sum_{i=1}^{N_1} e^{p\mu_i} \text{ や } W_{1/6}^{II} \sum_{a=1}^{N_2} e^{p\nu_a} \text{ を挿入したもの。}$$

$$U(N_1) \times U(N_2)$$

▷ 1/2 BPS Wilson loop

$$W_{1/2} = W_{1/6}^I - (-1)^p W_{1/6}^{II}$$

さらに積分を実行するには？

$$L(2, 1) = \mathbb{S}^3 / \mathbb{Z}_2 \quad U(N_1) \times U(N_2)$$

CS matrix model

□ Lens space matrix model を考える。

$$\langle (\dots) \rangle \equiv \mathcal{N}_{\text{lens}} \int \prod_{j=1}^{N_1} \frac{d\mu_j}{2\pi} \prod_{a=1}^{N_2} \frac{d\nu_a}{2\pi} \prod_{j < k} \left(2 \sinh \frac{\mu_j - \mu_k}{2} \right)^2 \prod_{a < b} \left(2 \sinh \frac{\nu_a - \nu_b}{2} \right)^2$$

分子にcoshの因子が存在 \longrightarrow $\times \prod_{j,a} \left(2 \cosh \frac{\mu_j - \nu_a}{2} \right)^2 e^{-\frac{1}{2g_s} (\sum_j \mu_j^2 + \sum_a \nu_a^2)} (\dots)$

□ 変数変換とVandermonde行列式を用いれば、有限個のGaussian積分だと分かる

$$\mu_j \rightarrow \mu_j - \frac{i\pi}{2}$$

$$\nu_a \rightarrow \nu_a + \frac{i\pi}{2}$$

$$\prod_{j < k} \left(2 \sinh \frac{\mu_j - \mu_k}{2} \right) \prod_{a < b} \left(2 \sinh \frac{\nu_a - \nu_b}{2} \right) \prod_{j,a} \left(2 \cosh \frac{\mu_j + \nu_a}{2} \right)$$

$$\rightarrow e^{-\frac{i\pi}{2} N_1 N_2 - \frac{N-1}{2} (\sum_j \mu_j + \sum_a \nu_a)} \sum_{\sigma \in \text{all permutation}} (-1)^\sigma e^{(\sigma(1)-1)\mu_1 + \dots + (\sigma(N_1)-1)\mu_{N_1} + (\sigma(N_1+1)-1)\nu_1 + \dots + (\sigma(N)-1)\nu_{N_2}}$$

□ 解析接続 $N_2 \rightarrow -N_2$ によってABJ matrix modelにもどる。

The Lens space Wilson loop

$$W_i = \mathcal{N}_{\text{lens}} (N_1 - 1)! N_2! \left(\frac{g_s}{2\pi} \right)^{\frac{N}{2}} q^{-\frac{1}{6}N(N^2-1) - \frac{1}{2}p^2 + p} (1 - q)^{\frac{1}{2}N(N-1)} G_2(N + 1, q) S(N_1, N_2)$$

□ q-Barnes G function

$$G_2(n, q) = (1 - q)^{-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{j=1}^{n-2} (q)_j$$

$$g_s = \frac{2\pi i}{k} \quad q = e^{-g_s}$$

□ q-Pochhammer symbol

$$(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)$$

permutationの残存物

$$S(N_1, N_2) = \sum_{1 \leq C_1 < C_2 < \dots < C_{N_1} \leq N} \sum_{k=1}^{N_1} q^{-2pC_k + (k+N-1)p} \left(\prod_{j \neq k} \frac{1 - q^{C_j - C_k - p}}{1 - q^{C_j - C_k}} \right) \\ \times \prod_{j=1}^{N_1} \left\{ \left[\prod_{l=j}^{N_1-1} \frac{(-q^{C_l - C_j - p\delta_{kj} + 1})_{C_{l+1} - C_{l-1}}}{(q^{C_l - C_j + 1})_{C_{l+1} - C_{l-1}}} \right] \left[\prod_{l=1}^{j-1} \frac{(-q^{C_j + p\delta_{kj} - C_{l+1} + 1})_{C_{l+1} - C_{l-1}}}{(q^{C_j - C_{l+1} + 1})_{C_{l+1} - C_{l-1}}} \right] \right. \\ \left. \times \frac{(-q^{C_{N_1} - C_j - p\delta_{kj} + 1})_{N - C_{N_1}}}{(q^{C_{N_1} - C_j + 1})_{N - C_{N_1}}} \frac{(-q^{C_j - C_1 + p\delta_{kj} + 1})_{C_1 - 1}}{(q^{C_j - C_1 + 1})_{C_1 - 1}} \right\}$$

解析接続 $N_2 \rightarrow -N_2$

★ Lens space matrix model
→ ABJ matrix model

□ N_1, N_2 のうち、小さい方の分だけ無限和が現れる。

分配関数 ($p=0$)
で割っている

$$N_1 < N_2$$

$$\tilde{W}_I^{1/6}(N_1, N_2)_{k, -k}^{p=1} = \frac{2q^{-\frac{3}{2}}}{1+q} \frac{1}{N_1! \Psi(N_1, -N_2)} \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{s_1, \dots, s_{N_1} \geq 0} q^{-s_l + l} (-1)^{\sum s_j} \left[\prod_{k \neq l} \frac{1 - q^{s_k - s_l - 1}}{1 - q^{s_k - s_l}} \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{N_1} \frac{(q^{s_i + 1})_{N_2 - N_1}}{(-q^{s_i + 1 + \delta_{il}})_{N_2 - N_1}} \prod_{1 \leq a < b \leq N_1} \frac{(q^{s_b - s_a})_1^2}{(-q^{s_b - s_a + \delta_{lb}})_1 (-q^{s_b - s_a - \delta_{la}})_1}$$

□ 和の表示はwell-definedではない。

無限和が現れる。

積分表示はwell defined

$$\sum_{s \geq 0} (-1)^s \rightarrow \frac{-1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\pi ds}{\sin \pi s}$$

summationは sin関数から出す留数の計算に一致する

▷ 積分は留数計算に帰着する。留数はそれぞれ2種類の寄与がある。

▷ 積分は $\min(N_1, N_2)$ -次元積分になる。

$$\tilde{W}_I^{1/6}(1, N)_{k, -k} \ni (-1)^N \ln q \left[\underbrace{\frac{-1}{2\pi i} \int_I \frac{\pi ds}{\sin(\pi s)}}_{\text{perturbative poleを出す}} \right] \underbrace{\frac{q^{-n(s+1)} (q^{s+1})_{N-1}}{(1+q^n) (-q^{s+1+n})_{N-1}}}_{\text{non-perturbative poleを出す}}$$

P poles $s = 0, 1, \dots, k - (N + 1), k - N \pmod k$

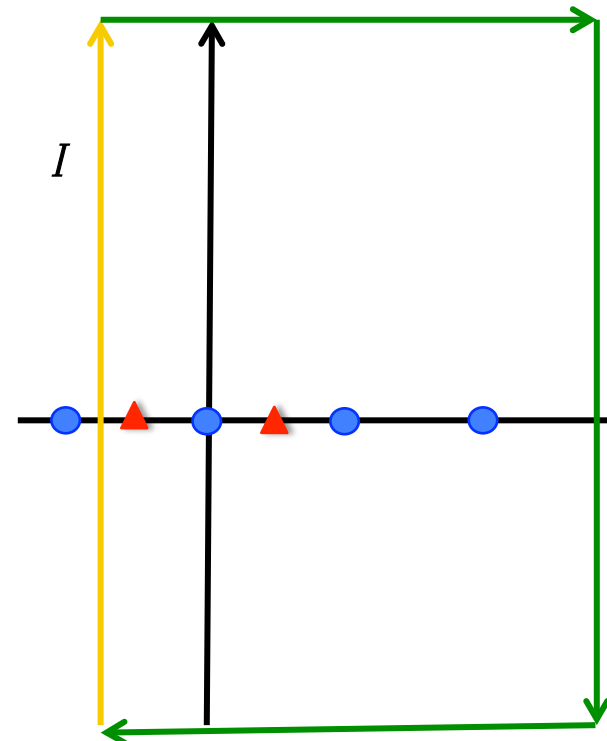
NP poles $s = \frac{k}{2} - (N - 1 + n), \dots, \frac{k}{2} - (1 + n) \pmod k$

被積分関数の反周期性 (period k) から、黄色の線上の積分は左図の周積分 $\times 1/2$ に帰着する。

□ 整数poleのみを拾ってきただけでは、摂動の結果しか再現しない。Seiberg duality等の非摂動的な解析を必要とする場合は、Pochhammer記号からのpoleが重要。

● perturbative pole

▲ non-perturbative pole $\sim e^{-\frac{1}{g_s}} \quad g_s = \frac{2\pi i}{k}$



積分路

Consistency Check

small N_1, N_2 results :

もともとの積分の結果と一致

$$\hat{W}_i(1, -1) = 2\pi g_s q^{-\frac{1}{2}p^2+p} \left(\frac{1}{1+q^p} \right)^2$$

$$W_i(1, -2)|_{p=1} = (2\pi)^4 i^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{\pi i}{k}}}{1+e^{-\frac{2\pi i}{k}}} \times \begin{cases} -\frac{q}{2} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{1+e^{\frac{2\pi i}{k}n}}{1+e^{-\frac{2\pi i}{k}(n+1)}} & (k : \text{odd}) \\ \frac{q}{k} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(n - \frac{k}{2} + 1\right) \frac{1-e^{\frac{2\pi i}{k}n}}{1+e^{-\frac{2\pi i}{k}(n+1)}} & (k : \text{even}) \end{cases}$$

weak coupling expansion:

Polylog regularization

$$\text{Li}_{-s}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{-s}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \text{Li}_0(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k = \text{Li}_{-1}(-1) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_i^{\text{ABJ}}(2, -2) &= \frac{\pi^4 g^4}{16} + \frac{1}{16} p^2 \pi^4 g^5 + \frac{1}{384} (8\pi^4 - 18p^2 \pi^4 + 9p^4 \pi^4) g^6 + \frac{1}{192} (6p^2 \pi^4 - 7p^4 \pi^4 + p^6 \pi^4) g^7 \\ &+ \frac{(1156\pi^4 - 2880p^2 \pi^4 + 3000p^4 \pi^4 - 1140p^6 \pi^4 + 75p^8 \pi^4) g^8}{92160} \\ &+ \frac{(2312p^2 \pi^4 - 2960p^4 \pi^4 + 1488p^6 \pi^4 - 240p^8 \pi^4 + 9p^{10} \pi^4) g^9}{92160} \\ &+ \frac{(61504\pi^4 - 162792p^2 \pi^4 + 179284p^4 \pi^4 - 93632p^6 \pi^4 + 23744p^8 \pi^4 - 2030p^{10} \pi^4 + 49p^{12} \pi^4) g^{10}}{5160960} \\ &+ O[g]^{11} \end{aligned}$$

Seiberg Duality


- Seiberg duality

$$U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k} = U(2N_1 + k - N_2)_k \times U(N_1)_{-k}$$

- original 理論に含まれる摂動的効果と非摂動効果はそれぞれ、dual 理論の対応物では、非摂動効果・摂動効果にmapされる。

$$U(1)_5 \times U(3)_{-5} = U(4)_5 \times U(1)_{-5}$$

$$Z_{\text{ABJ}}(1, 3)_5 = \frac{1}{50} \sin \frac{\pi}{5} \left[\underbrace{\tan \frac{2\pi}{5} \left(2 \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} \right)}_{\text{P}} \underbrace{-10 \cot \frac{\pi}{5}}_{\text{NP}} \right] e^{-\frac{\pi i}{5}}$$

$$Z_{\text{ABJ}}(1, 4)_{-5} = \frac{1}{50} \sin \frac{\pi}{5} \left[\underbrace{-10 \cot \frac{\pi}{5}}_{\text{P}} + \underbrace{\tan \frac{2\pi}{5} \left(2 \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} \right)}_{\text{NP}} \right] e^{\frac{4\pi i}{5}}$$


- 一般の N_1, N_2 では、poleの構造・zero点の構造・漸近的な振舞いから、dualityを示すことができる。

Seiberg Duality 2

- fundamental Wilson loopに関して、以下のdualityを発見した。

$$W_{1/2}(N_1, N_2) = -W_{1/2}(2N_1 + k - N_2, N_1)$$

$$W_{1/6}^I(N_1, N_2) = W_{1/6}^{II}(2N_1 + k - N_2, N_1)$$

$$W_{1/6}^{II}(N_1, N_2) = -W_{1/6}^I(2N_1 + k - N_2, N_1) - 2W_{1/6}^{II}(2N_1 + k - N_2, N_1)$$

- これらの関係式はconsistent

$$W_{1/2} = W_{1/6}^I - (-1)^p W_{1/6}^{II}$$

3つのうち、2つ知っていれば良い。

Seiberg duality for Wilson loop

① original theory

$$\tilde{W}_I^{1/6}(1, N)_{k, -k} \ni (-1)^N \ln q \left[\frac{-1}{2\pi i} \int_I \frac{\pi ds}{\sin(\pi s)} \right] \frac{q^{-n(s+1)} (q^{s+1})_{N-1}}{(1+q^n)(-q^{s+1+n})_{N-1}}$$

winding: n

留数の構造:

$$\begin{aligned} \text{P poles } & s = 0, 1, \dots, k - (N + 1), \underline{k - N} \pmod k \\ \text{NP poles } & s = \underline{\frac{k}{2} - (N - 1 + n)}, \dots, \underline{\frac{k}{2} - (1 + n)} \pmod k \end{aligned}$$

② dual theory

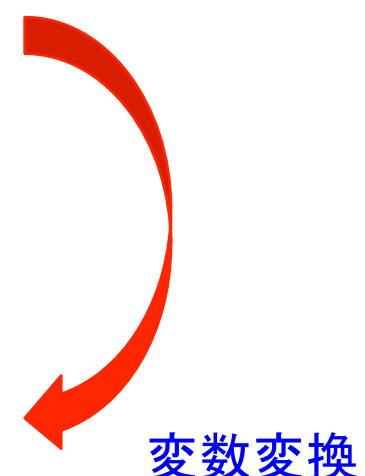
$$\tilde{W}_{II}^{1/6}(2 + k - N, 1)_{k, -k} \ni \ln q \left[\frac{-1}{2\pi i} \int_{I'} \frac{\pi ds}{\sin(\pi s)} \right] \frac{q^{n(s+3-N)} (q^{s+1})_{1+k-N}}{(1+q^n)(-q^{s+1+n})_{1+k-N}}$$

留数の構造:

$$\begin{aligned} \text{P poles } & s = \underline{0}, 1, \dots, N - 3, \underline{N - 2} \pmod k \\ \text{NP poles } & s = \underline{\frac{k}{2} - (k - N + 1 + n)}, \dots, \underline{\frac{k}{2} - (1 + n)} \pmod k \end{aligned}$$

変数変換で被積分関数が一致する。

$$\tilde{s} = \frac{k}{2} - (1 + n) - s$$



変数変換

Conclusions

1. **ABJ理論の1/6 BPS と 1/2 BPS Wilson loopの厳密計算を、Lens space matrix modelを用いて行った。
得られた結果は $\min(N_1, N_2)$ 積分の表式を得た。**
2. **特に基本表現のWilson loopの解析を行った。(任意の表現に拡張可能)**
3. **さらにSeiberg dualityの下で、これらのWilson loopがどう移されるかを調べた。**

Future Directions

1. 一般の表現のWilson loopに対してSeiberg dualityの下でのmappingを議論する。
2. 今回用いた積分のtechniqueの、他の3次元の超対称ゲージ理論への応用。
3. Fermi-gas formalism。1/N 補正。非摂動効果を調べる。
4. Higher spin theory
我々の得た表示はhigher spin極限をとるのに適している。
(large N_1 , k and fixed N_1/k , finite N_2)

ご清聴ありがとうございました。