

2013/8/22 基研研究会「場の理論と弦理論」

Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States

基礎物理学研究所
素粒子論グループ
野崎 雅弘



Jyotirmoy Bhattacharya (Kavli IPMU,Tokyo)氏、高柳 匡 (YITP, Kyoto)氏と
宇賀神 知紀(Kavli IPMU,Tokyo)氏との共同研究(Phys.Rev.Lett. 110 (2013) 091602
(arXiv:1212.1164))に基づく。

モチベーション

昨今、多岐に渡る分野において、エンタングルメント・エントロピーが注目を集めている。

- **物性理論**: 量子オーダーパラメタ
- **量子情報理論**: 量子的なもつれを測定する量
- **統計力学**: 非平衡系の物理におけるエントロピー
- **弦理論**: 重力理論、AdS/CFT対応の深い理解

モチベーション

昨今、多岐に渡る分野において、エンタングルメント・エントロピーが注目を集めている。

- **物性理論**: 量子オーダーパラメタ
- **量子情報理論**: 量子的なもつれを測定する量
- **統計力学**: 非平衡系の物理におけるエントロピー
- **弦理論**: 重力理論、AdS/CFT対応の深い理解

モチベーション

EEにも熱力学エントロピーの様に

従うべき基本法則はないのか？

モチベーション

EEにも熱力学エントロピーの様に

従うべき基本法則はないのか？



熱力学第一法則に似た関係式:

$$\Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.$$

エンタングルメント・エントロピー(EE)の定義

• 定義

ある時刻において全ヒルベルト空間をA,Bに分割: $H_{tot} = H_A \otimes H_B$
部分空間Bにおける自由度を無視。

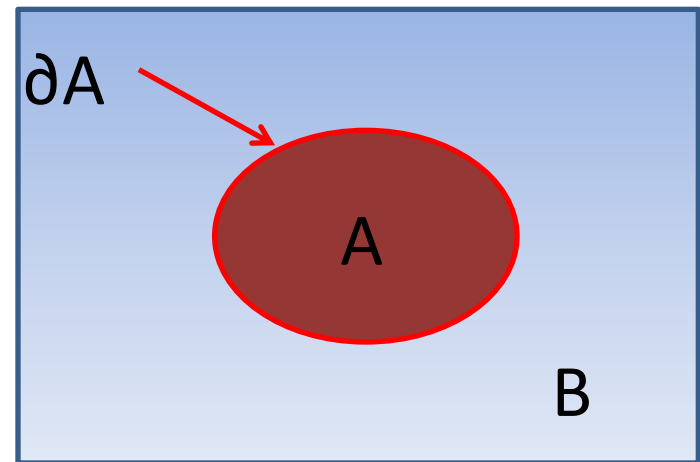
Reduced density matrix: $\rho_A \equiv Tr_B \rho_{tot}$

この密度行列 ρ_A を用いて、エンタングルメント・エントロピー(EE) S_A は以下の様に定義される。

EEの定義



$$S_A = -Tr_A \rho_A \log \rho_A$$



on a certain time slice

例

直積状態: $|\Psi\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes (|\downarrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_B)$

⇒ Reduced density matrix: $\rho_A = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) (\langle\uparrow|_A + \langle\downarrow|_A)$

⇒ EE: $S_A = 0$

エンタングルした状態: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B)$

⇒ Reduced density matrix: $\rho_A = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A) + \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A)$

⇒ EE: $S_A = \log 2$

➡ 状態が量子的にもつれていると **EE ≠ 0**。

S_A は A, B の間にある **量子的なもつれ** を測定する量。

AdS/CFT対応

実際に場の理論において、EEを計算することは技術的に困難。



AdS/CFT対応に基づいて解析を行った。

場の理論

エンタングルメント
・エントロピー (EE)

重力理論

ホログラフィック・
エンタングルメント
・エントロピー (HEE)



等価

ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー(HEE)

ある時刻において境界をA,Bに分割する。

ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー(HEE)は次の様に定義される。

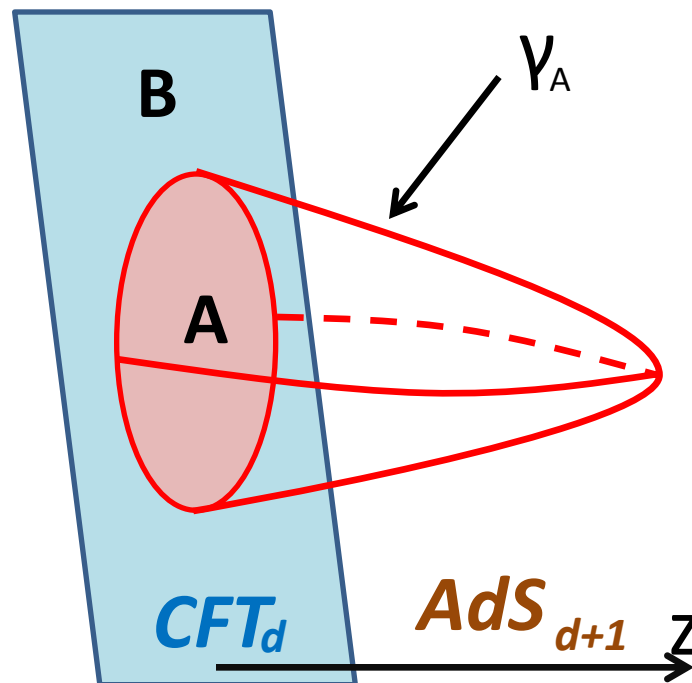
$$ds^2 = \frac{dz^2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left(-dt^2 + \sum_i dx^i dx^i \right).$$

HEEの定義

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G}.$$

γ_A はd-1次元の広がりを持つ
最小曲面(面積が最小の曲面)

$$(\partial\gamma_A = \partial A)$$



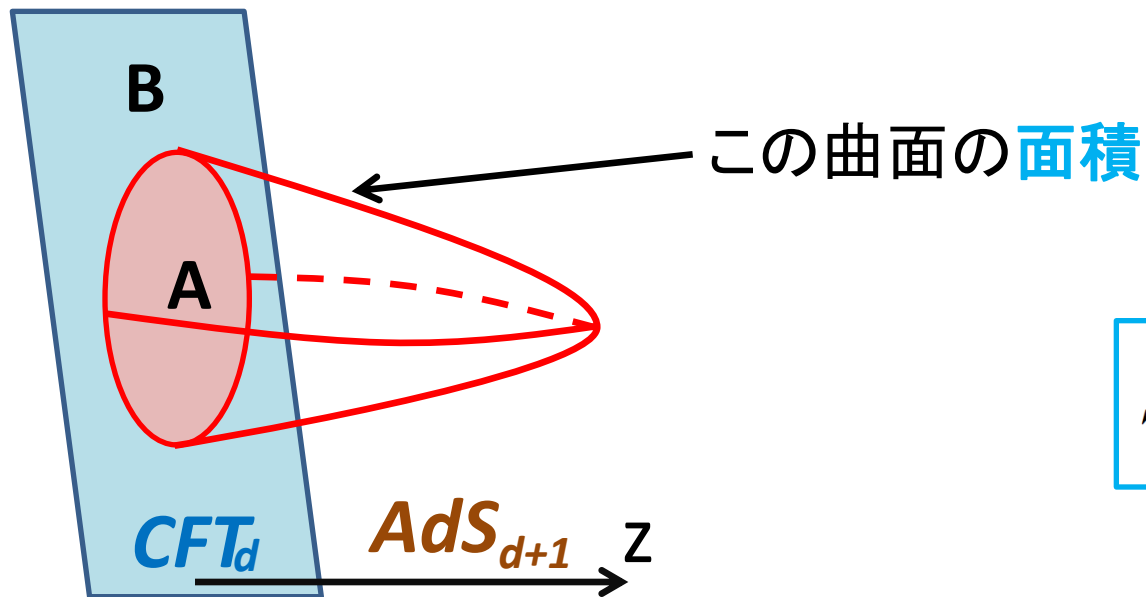
$z > \epsilon$ ϵ : 幾何学的なカットオフ

モチベーション 再び

EEにも熱力学エントロピーの様に

従うべき基本法則はないのか？

重力理論で調べる量



$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G}.$$

$z > \epsilon$ ϵ : Geometrical cutoff

セットアップ

- **場の理論:**

CFT_dにおいて,系を何かの手段で**少しだけ**励起させる。

(熱化や量子熱化などで)

⇒ **全系**は一般的に**非平衡状態**へ



- **重力理論:**

AdS_{d+1} 時空上で境界から**非常に遠いところ**を变形する。

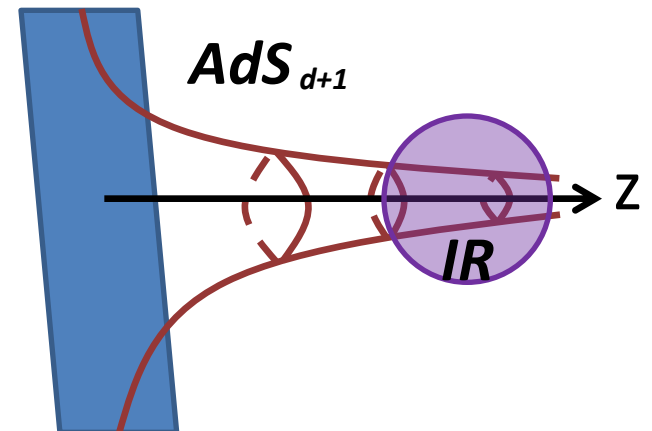
(B.H.やFalling particleを入れる。)

計量:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx_i)^2 \right]$$

$z \rightarrow 0$

$$g(z) \simeq 1/f(z) \simeq 1 + mz^d$$



セットアップ

- **場の理論:**

CFT_dにおいて,系を何かの手段で**少しだけ**励起させる。

(熱化や量子熱化などで)

⇒ **全系**は一般的に**非平衡状態**へ



- **重力理論:**

AdS_{d+1} 時空上で境界から**非常に遠いところ**を变形する。

(B.H.やFalling particleを入れる。)

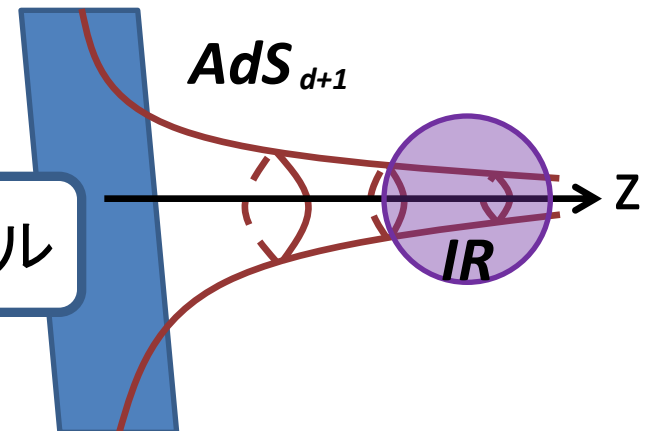
計量:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx_i)^2 \right]$$

$z \rightarrow 0$

励起したエネルギーのスケール

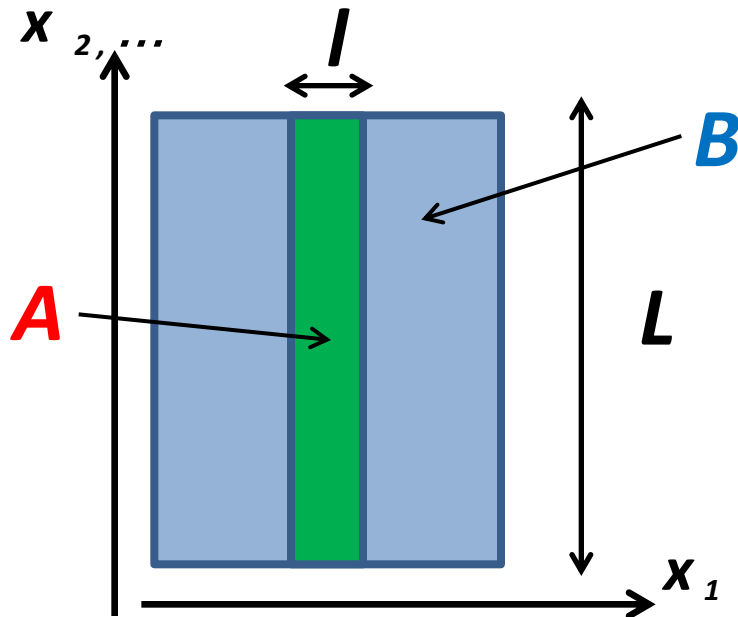
$$g(z) \simeq 1/f(z) \simeq 1 + m z^d$$



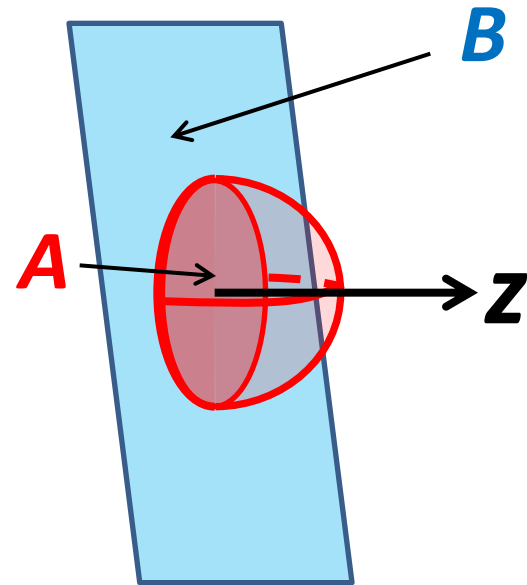
部分系の取り方

次の二つの部分系に対してその内部エネルギーの変化 ΔE_A
とHEEの変化 ΔS_A について解析を行った。

1. 幅 l を持つストリップ



2. 半径 l を持つ球

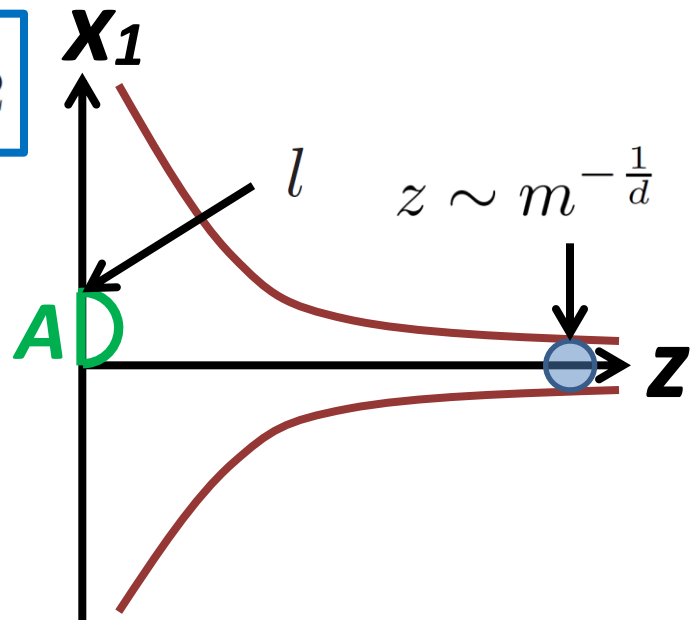
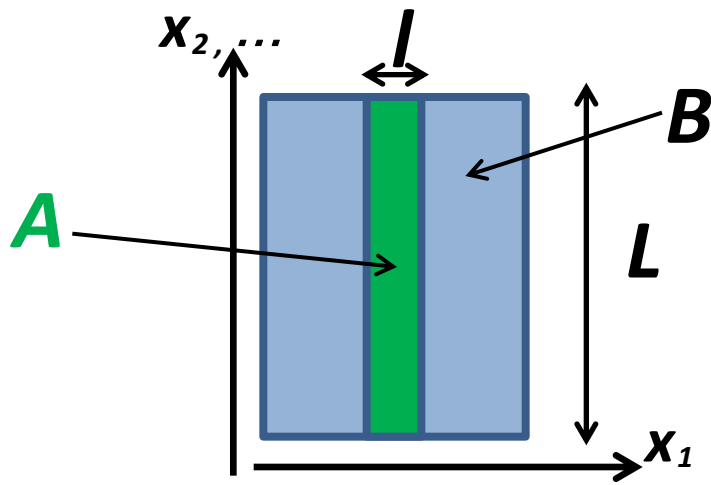


ストリップの場合

ある時刻で境界をA,Bに分割。部分系A:幅 l のストリップ。

仮定: 幅 l は励起エネルギーのスケールの逆数 $1/m$ に比べて非常に小さくとる: $ml^d \ll 1$

部分系 A
 $0 < x_1 < l, -L/2 < x_{2,3,\dots,d-1} < L/2$



ホログラフィック エネルギー・運動量テンソル

(場の理論のエネルギー密度):

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1) R^{d-1} m}{16\pi G_N}$$

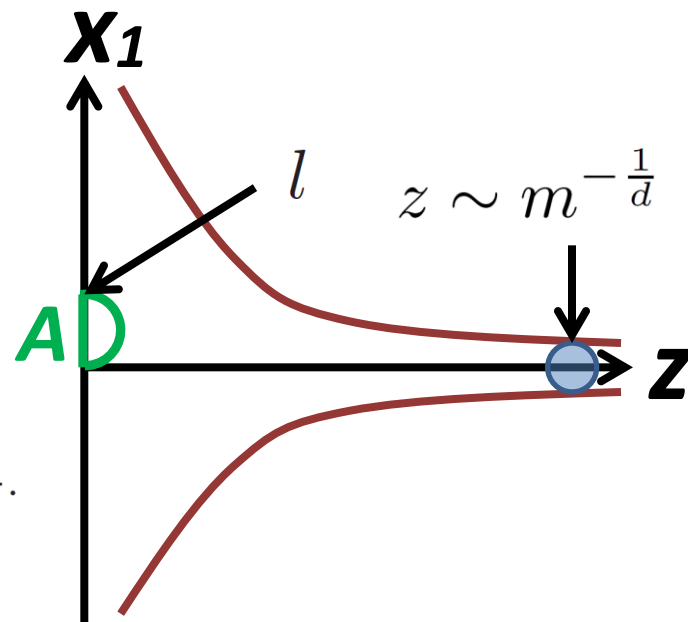
- ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー (HEE):

HEEを ml^d に関して一次まで展開。

$$S_A = S_A^{(0)} + \Delta S_A,$$

$$S_A^{(0)} = \frac{R^{d-1} L^{d-2}}{2(d-2)G_N} \left[\frac{1}{\epsilon^{d-2}} - \frac{2^{d-2} \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^{d-1} \cdot l^{d-2}} \right],$$

$$\Delta S_A = \frac{R^{d-1} m L^{d-2} l^2}{32(d+1)G_N} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2}.$$



ホログラフィック エネルギー・運動量テンソル

(場の理論のエネルギー密度):

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1) R^{d-1} m}{16\pi G_N}$$

- ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー (HEE):

HEEを ml^d に関して一次まで展開。

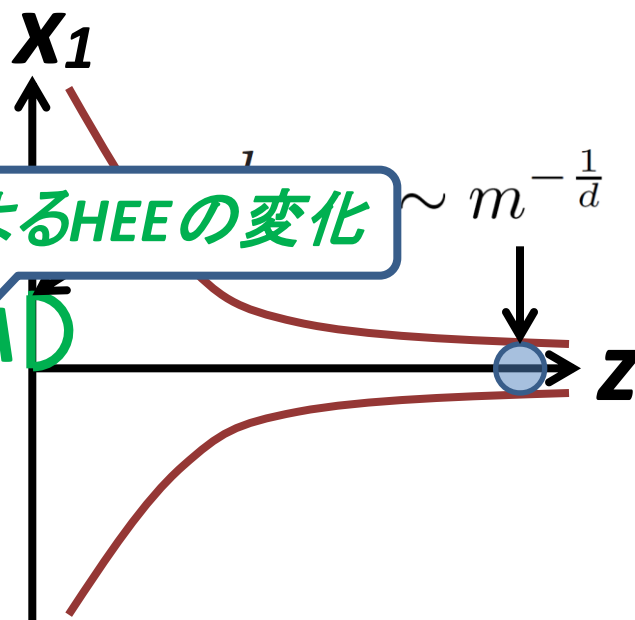
$$S_A = S_A^{(0)} + \Delta S_A,$$

$$S_A^{(0)} = \frac{R^{d-1} L^{d-2}}{2(d-2)G_N} \left[\frac{1}{\epsilon^{d-2}} - \frac{2^{d-2} \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^{d-1} \cdot l^{d-2}} \right]$$

励起によるHEEの変化

$\sim m^{-\frac{1}{d}}$

AD



$$\Delta S_A = \frac{R^{d-1} m L^{d-2} l^2}{32(d+1)G_N} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2}$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1) R^{d-1} m}{16\pi G_N} \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_A と ΔE_A の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)R^{d-1}m}{16\pi G_N} \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1)mL^{d-2}R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_A と ΔE_A の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \quad \sim \quad dU = TdS$$

似ている。

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1) R^{d-1} m}{16\pi G_N} \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_A と ΔE_A の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)R^{d-1}m}{16\pi G_N} \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1)mL^{d-2}R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_A と ΔE_A の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.$$

有効温度 T_{ent} の定義

$$T_{\text{ent}} = \frac{\Delta E_A}{\Delta S_A}$$

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1}$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1) R^{d-1} m}{16\pi G_N} \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_A と ΔE_A の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \quad \longrightarrow \quad \Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.$$

重力定数やAdS半径等の
パラメタに依存しない。

有効温度 T_{ent} の定義

$$T_{\text{ent}} = \frac{\Delta E_A}{\Delta S_A}$$

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1}$$

結果

$ml^d \ll 1$ では

ストリップの場合

$$\Delta E_A = \frac{(d-1)mlL^{d-2}R^{d-1}}{16\pi G_N}$$

$$\Delta S_A = \frac{R^{d-1}mL^{d-2}l^2}{32(d+1)G_N} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2}$$

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A$$

有効温度

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1}$$

球形の場合

$$\Delta E_A = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} R^{d-1}}{8\pi G_N \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot (ml^{d-1})$$

$$\Delta S_A = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{4(d+1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^d$$

$$\Delta E_A = \left(\frac{2\pi l}{d+1} \right)^{-1} \cdot \Delta S_A$$

$$T_{\text{ent}} = \frac{d+1}{2\pi} \cdot l^{-1}$$

結果

$ml^d \ll 1$ では

ストリップの場 **対応するゲージ理論の球形の場合**
パラメタに依存しない。

$$\Delta E_A = \frac{(d-1)mL}{16\pi G_N} \cdot \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} R^{d-1}}{8\pi G_N \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot (ml^{d-1}).$$

$$\Delta S_A = \frac{R^{d-1} mL^{d-2} l^2}{32(d+1)G_N} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \cdot \Delta S_A = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{4(d+1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^d.$$

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \quad \Delta E_A = \left(\frac{2\pi l}{d+1} \right)^{-1} \cdot \Delta S_A$$

有効温度

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1}$$

$$T_{\text{ent}} = \frac{d+1}{2\pi} \cdot l^{-1}.$$

結果

$ml^d \ll 1$ では

ストリップの場 **対応するゲージ理論の球形の場合**
パラメタに依存しない。

$$\Delta E_A = \frac{(d-1)mlL}{16\pi G_N} \cdot \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} R^{d-1}}{8\pi G_N \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot (ml^{d-1}).$$

$$\Delta S_A = \frac{R^{d-1} mL^{d-2} l^2}{32(d+1)G_N} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \cdot \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} R^{d-1}}{4(d+1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^d.$$

$$T_{ent} = c \cdot l^{-1}$$

ΔE_A Large N の強結合のゲージ理論では
 EEに対して**熱力学第一法則の様な法則**が存在する。

有効温度

$$\Delta E_A = T_{ent} \cdot \Delta S_A.$$

cf. $\frac{\eta}{S} = \frac{1}{4\pi}$

$$T_{ent} = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right) \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right) \cdot l^{-1}$$

$$T_{ent} = \frac{d+1}{2\pi} \cdot l^{-1}.$$

まとめ

Large N の強結合のゲージ理論において見ているエネルギースケール ($1/l$) が系を励起させたエネルギースケール (m) に比べて非常に高い時、その理論の詳細に依らず、EE に対して熱力学第一法則に似た法則が成立する。

$ml^d \ll 1$ では

理論の詳細に依らない
(*Universal*)

$$\Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.$$

展望

- EEに対する他の基本法則
- 有効温度 T_{ent} に対する物理的な理解
- 場の理論における導出