

On propagators in de Sitter space

酒谷 雄峰

京都産業大学 益川塾

基研研究会 場の理論と弦理論

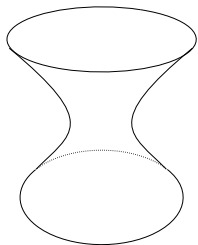
2013年8月21日

福間将文氏、杉下宗太郎氏 (京大) との共同研究に基づく

[M. Fukuma, Y.S, and S. Sugishita, Phys. Rev. D **88**, 024041 (2013).]

de Sitter space

d 次元 de Sitter space



(d+1)-次元 Minkowski 時空中の双曲面:

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^d)^2 = \ell^2$$

de Sitter 半径



正の宇宙項 $\Lambda = \frac{(d-2)(d-1)}{2\ell^2} > 0$ を持つ
Einstein 方程式の解:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$$

インフレーション期, 宇宙項優勢期の宇宙論で重要.

Motivation

- de Sitter 時空は熱力学的性質を持つ: $T_{\text{dS}} = 1/(2\pi\ell)$
[Gibbons-Hawking '77]
- de Sitter 時空の熱力学的性質は,
de Sitter 時空上の scalar 場の量子論からも調べられる
(温度 $T_{\text{dS}} = 1/(2\pi\ell)$ も導出できる) \Rightarrow 杉下氏の講演
 \Rightarrow de Sitter 時空上の scalar 場の量子論を考え,
de Sitter 時空の熱力学性質をさらに詳しく調べたい.
- de Sitter 時空は global timelike Killing vector を持たない (非定常)
 \Rightarrow scalar 場の Hamiltonian が時間依存: $H = H(t)$.
 \Rightarrow 二点関数の定義に必要な “真空状態” $|0\rangle$ の定義に不定性がある.
- 以下では, 真空 $|0\rangle$ を定義する処方箋を与える.
 \Rightarrow 得られた真空 $|0\rangle$ を用いて二点関数 $\langle 0| T \phi(x) \phi(x') |0\rangle$ を計算.

de Sitter 真空を決定する方法 (review)

① 真空が de Sitter 不変であることを要請

Minkowski 時空では $|0\rangle$ は Poincare 不変 $\Rightarrow G(x, y) = G(|x - y|)$.

de Sitter 時空でも $|0\rangle$ が de Sitter 群の作用の下で不変だと要請.

$\Rightarrow \alpha$ -vacua と呼ばれる一群の de Sitter 不変な真空 $|\alpha\rangle$ が得られる.

[Allen '85, Mottola '85]

$\Rightarrow G(x, y) = G(Z(x, y))$

[de Sitter 不変量: $Z(x, y) \equiv \cos(d(x, y)/\ell)$]

② さらに, $G(x, y) = G(Z(x, y))$ が同一点の極限 $x \rightarrow y$ で

Minkowski 時空の二点関数と同じ振舞いをすることを要請.

\Rightarrow 真空が一意に定まる: Bunch-Davies vacuum, $|\text{BD}\rangle$.

Our approach

- 曲がった時空上の自由スカラー場の理論:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2).$$

- 時間依存する Hamiltonian $H(t)$ の
時刻 t での**瞬間的基底状態**として真空 $|0_t\rangle$ を定義:

$$H(t) = \sum_n \omega_n(t) a_n^\dagger(t) a_n(t) \quad \Rightarrow \quad a_n(t)|0_t\rangle = 0.$$

N.B. 瞬間的基底状態 $|0_t\rangle$ は、他の時刻 t' では一般には基底状態でない。

$$\begin{aligned} H(t') &= \sum_n [a_n^\dagger(t) a_n(t) + a_n^\dagger(t) a_n^\dagger(t) + \dots] \\ &= \sum_n \omega_n(t') a_n^\dagger(t') a_n(t'). \end{aligned}$$

$a_n(t')$ で消される状態が時刻 t' での瞬間的基底状態.

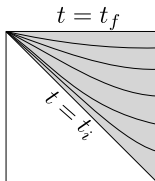
General theory

(de Sitter 時空を含む非定常時空での瞬間的基底状態)

Setup

- ① 考えたい時空の領域を時刻 t 一定面で切る:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + A^2(t) h_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, d-1).$$



- ② mode 展開を行う: $\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x}) = \sum_n \phi_n(t) Y_n(\mathbf{x})$.

$$\left[\Delta_{d-1} Y_n(\mathbf{x}) = -\lambda_n Y_n(\mathbf{x}), \quad \int d^{d-1}\mathbf{x} \sqrt{h(\mathbf{x})} Y_n(\mathbf{x}) Y_{n'}(\mathbf{x}) = \delta_{nn'} \right]$$

瞬間的基底状態

モード展開により, Hamiltonian は

時間依存する調和振動子の Hamiltonian の和の形:

$$H(t) = \sum_n \left[\frac{1}{2\rho(t)} \pi_n^2(t) + \frac{\rho(t) \omega_n^2(t)}{2} \phi_n^2(t) \right]$$

$$\left[\pi_n(t) \equiv \rho(t) \dot{\phi}_n(t), \quad \rho(t) \equiv N^{-1}(t) A^{d-1}(t), \quad \omega_n(t) \equiv N(t) \sqrt{\lambda_n A^{-2}(t) + m^2} \right]$$

⇒ 消滅演算子 $a_n(t)$ を定義:

$$a_n(t) \equiv \sqrt{\frac{\rho(t) \omega_n(t)}{2}} \phi_n(t) + i \sqrt{\frac{1}{2\rho(t) \omega_n(t)}} \pi_n(t),$$

$$\Rightarrow H(t) = \sum_n \omega_n(t) \left[a_n^\dagger(t) a_n(t) + \frac{1}{2} \right].$$

時刻 t での瞬間的基底状態 $|0_t\rangle$ を $a_n(t) |0_t\rangle = 0$ で定義.

異なる時刻の消滅演算子 $a(t)$ と $a(t')$ は互いに Bogoliubov 変換で関係する.

Bogoliubov 係数

Klein-Gordon 方程式: $\frac{d}{dt} \left(\rho(t) \frac{d}{dt} \phi_n(t) \right) + \rho(t) \omega_n^2(t) \phi_n(t) = 0$

の独立な解を $\{f(t), g(t)\}$ とする.

演算子 $\phi_n(x)$ は K-G eq. の解なので, 定数演算子 c_1 と c_2 を用いて展開できる:

$$\phi_n(t) = c_1 f(t) + c_2 g(t), \quad \pi_n(x) \equiv \rho(t) \dot{\phi}_n(x) = \rho(t) [c_1 \dot{f}(t) + c_2 \dot{g}(t)].$$

⇒ 定数演算子は次のように書ける:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho(t) \underbrace{W[f, g]}_{\text{Wronskian}}} \begin{pmatrix} \rho \dot{g} & -g \\ -\rho \dot{f} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n(t) \\ \pi_n(t) \end{pmatrix} \equiv C(t) \begin{pmatrix} a_n(t) \\ a_n^\dagger(t) \end{pmatrix} = C(t') \begin{pmatrix} a_n(t') \\ a_n^\dagger(t') \end{pmatrix}$$

with

$$C(t) \equiv \frac{1}{W[f, g] \sqrt{2\rho(t)\omega(t)}} \begin{pmatrix} \dot{g}(t) + i\omega_n(t)g(t) & \dot{g}(t) - i\omega_n(t)g(t) \\ -\dot{f}(t) - i\omega_n(t)f(t) & -\dot{f}(t) + i\omega_n(t)f(t) \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a(t) \\ a^\dagger(t) \end{pmatrix} = C^{-1}(t) C(t') \begin{pmatrix} a(t') \\ a^\dagger(t') \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} (t; t') \begin{pmatrix} a(t') \\ a^\dagger(t') \end{pmatrix}}.$$

コメント

- Bogoliubov 係数は独立な解 $\{f(t), g(t)\}$ の選び方に依らない.

\therefore 他の独立な解の組 $\{f'(t), g'(t)\}$ を選ぶと

$$\begin{pmatrix} f'(t) & g'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \end{pmatrix} \Xi \quad (\Xi \in GL(2, \mathbb{C})),$$

のように $\{f(t), g(t)\}$ の線形結合で書ける.

$$\Rightarrow C'(t) = \Xi^{-1} C(t).$$

$\{f'(t), g'(t)\}$ から作られる Bogoliubov 係数は $\{f(t), g(t)\}$ のものと一致:

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}' & -\bar{\beta}' \\ -\beta' & \alpha' \end{pmatrix} (t; t_I) = [C'(t)]^{-1} C'(t_I) = C^{-1}(t) C(t_I) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} (t; t_I)$$

- Bogoliubov 係数は時間の再定義 $t \rightarrow \tilde{t} = \tilde{t}(t)$ の下でも不変.

波動関数

任意の時刻 t, t' の間の Bogoliubov 係数 $\alpha(t; t')$, $\beta(t; t')$ の表式を得た:

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ a^\dagger(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^*(t; t') & -\beta^*(t; t') \\ -\beta(t; t') & \alpha(t; t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t') \\ a^\dagger(t') \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \phi_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\rho(t)\omega_n(t)}} [a_n(t) + a_n^\dagger(t)] \\ &\equiv \varphi_n(t; t_I) a_n(t_I) + \varphi_n^*(t; t_I) a_n^\dagger(t_I). \end{aligned}$$

$a_n(t_I)$ の前の係数 $\varphi_n(t; t_I)$ を**波動関数**と呼ぶ:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t; t_I) &= \frac{1}{\sqrt{2\rho(t)\omega_n(t)}} (\alpha^*(t; t_I) - \beta(t; t_I)) \\ &= \frac{v(t_I) f(t) - u(t_I) g(t)}{\rho W[f, g] \sqrt{2\rho(t_I)\omega_n(t_I)}} \end{aligned}$$

$$[u(t) \equiv \rho(t) (\dot{f}(t) + i\omega_n(t) f(t)), \quad v(t) \equiv \rho(t) (\dot{g}(t) + i\omega_n(t) g(t))]$$

二点関数

波動関数を用いると次の二点関数が求められる:

$$\begin{aligned} \bullet \quad G_{00}(x, x'; t_0, t_0) &\equiv \frac{\langle 0_{t_0} | \mathbb{T} \phi(x) \phi(x') | 0_{t_0} \rangle}{\langle 0_{t_0} | 0_{t_0} \rangle} \\ &= \sum_n \frac{\langle 0_{t_0} | \mathbb{T} \phi_n(t) \phi_n(t') | 0_{t_0} \rangle}{\langle 0_{t_0} | 0_{t_0} \rangle} Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}') \\ &= \sum_n \frac{i}{\rho W[\varphi_n(t; t_0), \varphi_n^*(t; t_0)]} \varphi_n(t > ; t_0) \varphi_n^*(t < ; t_0) Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad G_{10}(x, x'; t_1, t_0) &\equiv \frac{\langle 0_{t_1} | \mathbb{T} \phi(x) \phi(x') | 0_{t_0} \rangle}{\langle 0_{t_1} | 0_{t_0} \rangle} \\ &= \sum_n \frac{\langle 0_{t_1} | \mathbb{T} \phi_n(t) \phi_n(t') | 0_{t_0} \rangle}{\langle 0_{t_1} | 0_{t_0} \rangle} Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}') \\ &= \sum_n \frac{i}{\rho W[\varphi_n(t; t_0), \varphi_n^*(t; t_0)]} \varphi_n(t > ; t_1) \varphi_n^*(t < ; t_0) Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \varphi_n(t; t_0) a_n(t_0) + \varphi_n^*(t; t_0) a_n^\dagger(t_0) & [a_n(t_0) | 0_{t_0} \rangle = 0] \\ &= \varphi_n(t; t_1) a_n(t_1) + \varphi_n^*(t; t_1) a_n^\dagger(t_1) & [a_n(t_1) | 0_{t_1} \rangle = 0] \end{aligned}$$

in-in および in-out propagator

t_0 を無限の過去 t_i , t_1 を無限の未来 t_f にとばす極限をとることで、in-in propagator および in-out propagator を定義する:

$$\begin{aligned} G^{\text{in/in}}(x, x') &\equiv \lim_{t_0 \rightarrow t_i} G_{00}(x, x'; t_0, t_0) \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow t_i} \sum_n \frac{i\varphi_n(t_>; t_0) \varphi_n^*(t_<; t_0)}{\rho W[\varphi_n(t; t_0), \varphi_n^*(t; t_0)]} Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}'), \\ G^{\text{out/in}}(x, x') &\equiv \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t_i \\ t_1 \rightarrow t_f}} G_{10}(x, x'; t_1, t_0) \\ &= \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t_i \\ t_1 \rightarrow t_f}} \sum_n \frac{i\varphi_n(t_>; t_1) \varphi_n^*(t_<; t_0)}{\rho W[\varphi_n(t; t_0), \varphi_n^*(t; t_0)]} Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

波動関数 $\varphi_n(t_>; t_1)$, $\varphi_n^*(t_<; t_0)$ の $t_0 \rightarrow t_i$, $t_1 \rightarrow t_f$ での漸近形を調べることで in-in および in-out propagator が求まる。

手順のまとめ

- モード展開: $\phi(x) = \sum_n \phi_n(t) Y_n(\mathbf{x})$.
- $\frac{d}{dt} \left(\rho(t) \frac{d}{dt} \phi_n(t) \right) + \rho(t) \omega_n^2(t) \phi_n(t) = 0$ の独立解 $\{f(t), g(t)\}$.
- Bogoliubov 係数 $\alpha(t; t')$, $\beta(t; t')$ が求まる:

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ a^\dagger(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^*(t; t') & -\beta^*(t; t') \\ -\beta(t; t') & \alpha(t; t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t') \\ a^\dagger(t') \end{pmatrix}$$

- 波動関数が求まる: $\varphi_n(t; t_I) = \frac{1}{\sqrt{2\rho(t)\omega_n(t)}} (\alpha^*(t; t_I) - \beta(t; t_I))$
- 二点関数が求まる:

$$G_{00}(x, x'; t_0, t_0) = \sum_n \frac{i}{\rho W[\varphi_n(t; t_0), \varphi_n^*(t; t_0)]} \varphi_n(t_{>}; t_0) \varphi_n^*(t_{<}; t_0) Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}'),$$

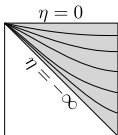
$$G_{10}(x, x'; t_1, t_0) = \sum_n \frac{i}{\rho W[\varphi_n(t; t_0), \varphi_n^*(t; t_0)]} \varphi_n(t_{>}; t_1) \varphi_n^*(t_{<}; t_0) Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}').$$

- in-in および in-out propagator が求まる:

$$G^{\text{in/in}}(x, x') = \lim_{t_0 \rightarrow t_i} G_{00}(x, x'; t_0, t_0), \quad G^{\text{out/in}}(x, x') = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t_i \\ t_1 \rightarrow t_f}} G_{10}(x, x'; t_1, t_0).$$

Propagators in de Sitter space

de Sitter space (Poincaré patch)



$$ds^2 = \ell^2 \frac{-d\eta^2 + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{\eta^2}$$

(de Sitter 半径: $\ell = 1$).

- ① モード展開: 並進対称性 \Rightarrow 平面波を用いる: $Y_n(\mathbf{x}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$.

$$\phi(x) = \phi(\eta, \mathbf{x}) = \sum_n \phi_n(\eta) Y_n(\mathbf{x}).$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{質量: } \rho(\eta) = (-\eta)^{-(d-2)}, \quad \text{振動数: } \omega(\eta) = \sqrt{m^2 (-\eta)^{-2} + k^2} .}$$

を持つ調和振動子の系に帰着.

- ② 運動方程式: $\eta^2 \ddot{\phi}_{\mathbf{k}}(\eta) - (d-2) \dot{\phi}_{\mathbf{k}}(\eta) + (k^2 \eta^2 + m^2) \phi_{\mathbf{k}}(\eta) = 0$.

独立な解: $f(\eta) = (-\eta)^{\frac{d-1}{2}} J_{\nu}(-k\eta), \quad g(\eta) = (-\eta)^{\frac{d-1}{2}} N_{\nu}(-k\eta) .$
 $[\nu \equiv \sqrt{(\frac{d-1}{2})^2 - m^2}] .$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \phi_{\mathbf{k}}(\eta) &= c_1 f(\eta) + c_2 g(\eta) \quad (c_1, c_2 : \text{定数演算子}) \\ &= \varphi_{\mathbf{k}}(\eta; \eta_I) a(\eta_I) + \varphi_{\mathbf{k}}^*(\eta; \eta_I) a^\dagger(\eta_I) . \end{aligned}$$

波動関数 (Poincaré patch)

- 時刻 η_I での瞬間的真空 $|0_{\eta_I}\rangle$ に関する波動関数:

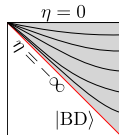
$$\varphi_{\mathbf{k}}(\eta; \eta_I) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2\omega(\eta_I)}} \frac{(-\eta)^{\frac{d-1}{2}}}{(-\eta_I)^{-\frac{d-2}{2}}} (v(\eta_I) J_\nu(-k\eta) - u(\eta_I) N_\nu(-k\eta)).$$

η_I を無限の過去 $\eta = -\infty$ or 無限の未来 $\eta = 0$ にとばす極限での漸近形として in-, out-vacuum の波動関数を得る:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\eta; \eta_0) \stackrel{\eta_0 \rightarrow -\infty}{\sim} (-\eta)^{\frac{d-1}{2}} H_\nu^{(1)}(-k\eta) \leftarrow \text{Bunch-Davies vac. の波動関数}$$

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\eta; \eta_1) \stackrel{\eta_1 \rightarrow 0}{\sim} (-\eta)^{\frac{d-1}{2}} J_\nu(-k\eta).$$

- Poincaré patch の in-vacuum は Bunch-Davies vac. と一致.



Propagators (Poincaré patch)

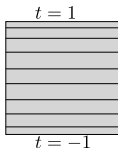
$$\begin{aligned}
 G^{\text{in/in}}(x, x') &= \lim_{\eta_0 \rightarrow -\infty} \sum_n \frac{i}{\rho(\eta) W[\varphi_n(\eta; \eta_0) \varphi_n^*(\eta; \eta_0)]} \varphi_n(\eta_>; \eta_0) \varphi_n^*(\eta_<; \eta_0) Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}') \\
 &= \frac{\pi}{4} [(-\eta)(-\eta')]^{\frac{d-1}{2}} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}} H_\nu^{(1)}(-k \eta_>) H_\nu^{(2)}(-k \eta_<) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2} + \nu\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2} - \nu\right)}{2(2\pi)^{d/2}} (u^2 - 1)^{-\frac{d-2}{4}} \mathcal{P}_{\nu-1/2}^{-\frac{d-2}{2}}(u) \quad [u \equiv -Z(x, x') + i0].
 \end{aligned}$$

Bunch-Davies vacuum の Green 関数を再現.

$$\begin{aligned}
 G^{\text{out/in}}(x, x') &= \lim_{\substack{\eta_0 \rightarrow -\infty \\ \eta_1 \rightarrow 0}} \sum_n \frac{i}{\rho(\eta) W[\varphi(\eta; \eta_1), \varphi^*(\eta; \eta_0)]} \varphi_n(\eta_>; \eta_1) \varphi_n^*(\eta_<; \eta_0) Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}') \\
 &= \frac{\pi}{2} [(-\eta)(-\eta')]^{\frac{d-1}{2}} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}} J_\nu(-k \eta_>) H_\nu^{(2)}(-k \eta_<) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \\
 &= \frac{e^{-i\pi(d-2)}}{(2\pi)^{d/2}} (u^2 - 1)^{-\frac{d-2}{4}} \mathcal{Q}_{\nu-1/2}^{\frac{d-2}{2}}(u) \quad [u \equiv -Z(x, x') + i0].
 \end{aligned}$$

いずれの場合も de Sitter 不変な propagator が得られた。

de Sitter space (global patch)



$$ds^2 = -(1-t^2)^{-2} dt^2 + (1-t^2)^{-1} d\Omega_{d-1}^2.$$

($d-1$ 次元球面)

- ① モード展開: $\phi(x) = \sum_{L,M} \phi_{LM}(t) Y_{LM}(\Omega)$ [$Y_{LM}(\Omega)$: 球面調和関数].

$$\Rightarrow \boxed{\text{質量: } \rho(t) = (1-t^2)^{-\frac{d-3}{2}}, \quad \text{振動数: } \omega(t) = \frac{\sqrt{L(L+d-2)(1-t^2)+m^2}}{1-t^2}.}$$

を持つ調和振動子の系に帰着.

- ② 運動方程式: $\ddot{\phi}_{LM}(t) + \frac{(d-3)t}{1-t^2} \dot{\phi}_{LM}(t) + \left[\frac{m^2}{(1-t^2)^2} + \frac{L(L+d-2)}{1-t^2} \right] \phi_{LM}(t) = 0.$

独立な解:

$$f(t) = (1-t^2)^{\frac{d-1}{4}} P_{L+\frac{d-3}{2}}^\nu(t), \quad g(t) = (1-t^2)^{\frac{d-1}{4}} Q_{L+\frac{d-3}{2}}^\nu(t).$$

$$\Rightarrow \phi_{LM}(t) = c_1 f(t) + c_2 g(t) \quad (c_1, c_2: \text{定数演算子})$$

$$= \varphi_{LM}(t; t_I) a(t_I) + \varphi_{LM}^*(t; t_I) a^\dagger(t_I).$$

波動関数 (global patch)

時刻 t_I での瞬間的真空 $|0_{t_I}\rangle$ に関する波動関数:

$$\varphi_{LM}(t; t_I) = \frac{\Gamma(L + \frac{d-1}{2} - \nu)}{\sqrt{2\bar{m}(t_I)} \Gamma(L + \frac{d-1}{2} + \nu)} [(1 - t_I^2)(1 - t^2)]^{\frac{d-1}{4}} (v(t_I) P_{L + \frac{d-3}{2}}^\nu(t) - u(t_I) Q_{L + \frac{d-3}{2}}^\nu(t)).$$

t_I を無限の過去 $t = -1$ or 無限の未来 $t = 1$ にとばす極限での漸近形として in-, out-vacuum の波動関数を得る:

$$\varphi_{LM}(t; t_0) \stackrel{t_0 \rightarrow -1}{\sim} \begin{cases} (1 - t^2)^{\frac{d-1}{4}} P_{L + \frac{d-3}{2}}^\nu(t) & (\text{奇数次元}) \\ (1 - t^2)^{\frac{d-1}{4}} Q_{L + \frac{d-3}{2}}^\nu(t) & (\text{偶数次元}) \end{cases}$$
$$\varphi_{LM}(t; t_1) \stackrel{t_1 \rightarrow +1}{\sim} (1 - t^2)^{\frac{d-1}{4}} P_{L + \frac{d-3}{2}}^{-\nu}(t).$$

Propagators (global patch)

① 偶数次元:

$$\begin{aligned} G^{\text{out/in}}(x, x') &= \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_1 \rightarrow 0}} \sum_n \frac{i}{\rho(t) W[\varphi(t; t_1), \varphi^*(t; t_0)]} \varphi_n(t > ; t_1) \varphi_n^*(t < ; t_0) Y_n(\Omega) Y_n(\Omega') \\ &= (\text{const.}) \times \sum_{L=0}^{\infty} [(1-t^2)(1-t'^2)]^{\frac{d-1}{4}} P_{L+\frac{d-3}{2}}^{-\nu}(t >) Q_{L+\frac{d-3}{2}}^{\nu}(t <) C_L^{\frac{d-2}{2}}(\Omega \cdot \Omega') \\ &= \frac{i e^{-i\pi \frac{d-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cos(\pi\nu)} \left[(u_+^2 - 1)^{-\frac{d-2}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{d-2}{2}}(u_+) + (u_-^2 - 1)^{-\frac{d-2}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{d-2}{2}}(u_-) \right] \\ &\quad [u_{\pm} \equiv -Z(x, x') \pm i0] \end{aligned}$$

⇒ de Sitter 不変な propagator が得られた。

② in-in propagator も de Sitter 不変なものが得られた [$m \leq \frac{d-1}{2}$ の場合は発散.]

③ 奇数次元でも de Sitter 不変な in-in, in-out propagator が得られた。

$i\epsilon$ 処方付きの経路積分による propagator

Poincaré および global patch でモード展開 $\phi(x) = \sum_n \phi_n(t) Y_n(\mathbf{x})$ を行う。

$$\Rightarrow \langle \phi(x) \phi(x') \rangle = \sum_n \langle \phi_n(t) \phi_n(t') \rangle Y_n(\mathbf{x}) Y_n(\mathbf{x}'),$$

$$\langle \phi_n(t) \phi_n(t') \rangle \equiv \frac{\int [d\phi_n] e^{iS_{n,\epsilon}[\phi_n]} \phi_n(t) \phi_n(t')}{\int [d\phi_n] e^{iS_{n,\epsilon}[\phi_n]}},$$

$$S_{n,\epsilon}[\phi_n] \equiv \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt [e^{i\epsilon} \rho(t) \dot{\phi}_n^2(t) - e^{-i\epsilon} \rho(t) \omega_n^2(t) \phi_n^2(t)].$$

ここで行った $i\epsilon$ 処方 $\Rightarrow H(t) \rightarrow e^{-i\epsilon} H(t) \sim H(t) - i\epsilon H(t)$

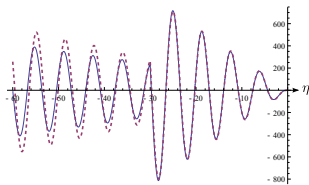
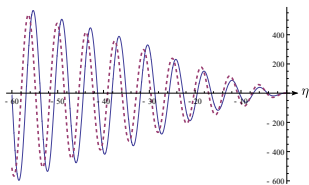
Hamiltonian の虚部により, 無限の過去, 未来での基底状態のみが寄与する:

$$\Rightarrow \langle \phi_n(t) \phi_n(t') \rangle = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t_i \\ t_1 \rightarrow t_f}} \frac{\langle 0_{t_1} | T \phi_n(t) \phi_n(t') | 0_{t_0} \rangle}{\langle 0_{t_1} | 0_{t_0} \rangle}.$$

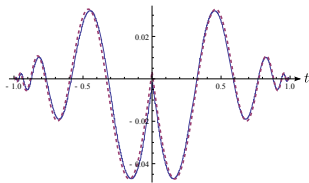
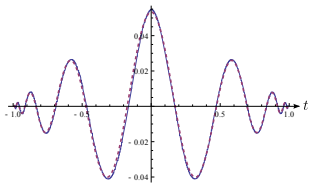
$\Rightarrow \langle \phi_n(t) \phi_n(t') \rangle$ は $G_n^{\text{out/in}}(t, t')$ に一致する。

in-out propagator vs. 経路積分を用いた propagator

Poincaré patch [$d = 4, m = 0.5, k = 1$] (点線: $G_n^{\text{out/in}}(\eta, \eta')$, 実線: $\langle \phi_n(\eta) \phi_n(\eta') \rangle$)



global patch [$d = 4, m = 9, L = 1$] (点線: $G_n^{\text{out/in}}(t, t')$, 実線: $\langle \phi_n(t) \phi_n(t') \rangle$)



まとめと応用

- ① 非定常時空で任意の時刻 t_I での瞬間的真空 $|0_{t_I}\rangle$ に関する波動関数や propagator を求める計算手法を開発した.
- ② de Sitter space の Poincaré patch および global patch で瞬間的基底状態を求め, in-in および in-out propagator を計算した.
⇒ 様々な de Sitter 不変な propagator が得られた.
- ③ in-out propagator が Feynman 経路積分から求まる propagator と一致することを確認した.

④ 応用

Poincaré patch の有限の過去 η_0 での瞬間的基底状態 $|0_{\eta_0}\rangle$ を用いると, de Sitter space の非平衡熱力学的性質を調べられる.

[⇒ M. Fukuma, Y.S, and S. Sugishita, arXiv:1305.0256, 杉下氏の講演]