Recovery map for Hayden-Preskill decoding protocol

宇賀神知紀さん (YITP)、宮田晃宏さん (KITS)との共同研究による

京都大学素粒子論研究室
中山泰晶

弦理論と場の理論2023@YITP

Introduction

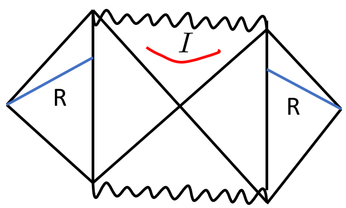
ブラックホールの情報喪失問題 → 量子重力理論における難問

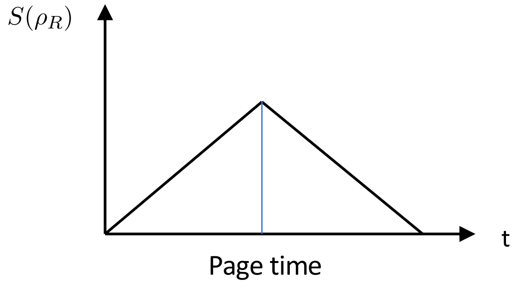
ホーキングの計算では情報は喪失する

Island公式によると、Page time以降にIsland領域が出現し、情報は回復する

[Penington 1905.08255, Almheiri-Engelhardt-Marolf-Maxfield 1905.08762]

$$S(\rho_R) = \underset{I}{\mathrm{MinExt}}\left[\frac{A(\partial I)}{4G_N} + S_{bulk}(R\cup I)\right]$$





motivation:
ホーキング放射から具体的にどのようにして情報が取り出されるか、知りたい

Introduction

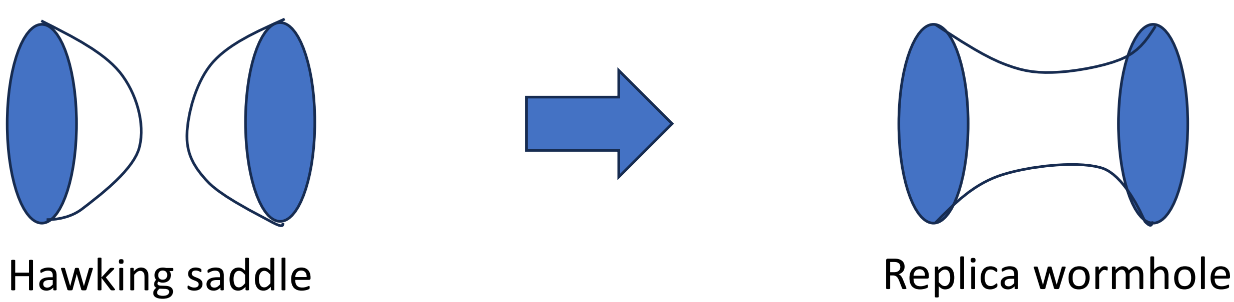
Page曲線はHolographicな計算をしないでも求めることができる

→ Gravitational Path IntegralとReplica wormholeの計算

West Coast Paper → [Penigton-Shenker-Stanford-Yang 1911.11977]
[Almheiri-Hartman-Maldacena-Shaghoulian-Tajdini 1911.12333]

ブラックホールの微視的状態のrandomnessの平均を取ると、
Page timeを境に、時空の分かれたHawking saddleから、
時空がwormholeで繋がるReplica wormhole saddleに相転移し、
Page曲線を再現する

Island公式は本質的にrandomnessの計算であることがわかる



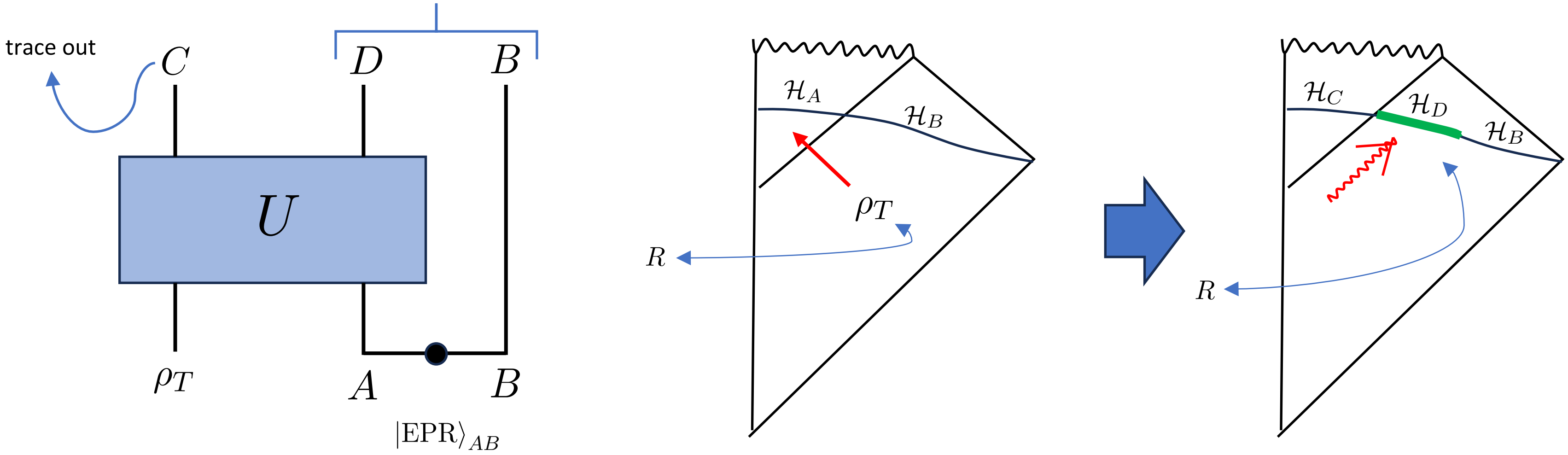
Introduction

一方、ブラックホールの情報喪失問題を量子情報理論的に取り扱う研究がHaydenとPreskillによりなされていた

Hayden-Preskill docoding protocolという

[Hayden-Preskill 0708.4025]

Tに入れた情報をD,Bから取り出すのに、どれくらいのDの大きさが必要か？

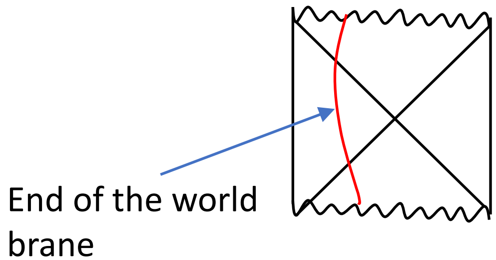


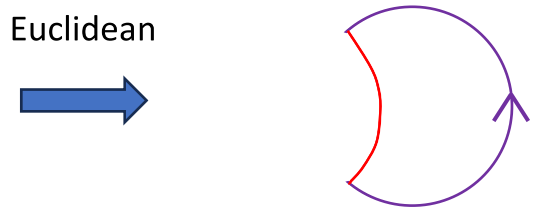
我々の研究：Hayden-Preskill decoding protocol において情報を取り出せる条件と、情報を取り出す方法を、West Coast Paper like にGravitationalな計算で求めた

目次

目次

West Coast Paper



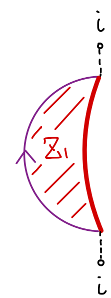


$$|\Psi\rangle = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\psi_i\rangle_B \, |i\rangle_R$$

$$\rho_R = \mathrm{tr}_B \left[|\Psi\rangle \langle\Psi| \right]$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{i,j}^{k} |j\rangle_R \langle i| \langle\psi_i|\psi_j\rangle_B$$

$$\mathrm{tr}\left[\rho_R\right] = \frac{1}{k}\sum_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle_B$$

$$= \frac{1}{k}$$



$$= \frac{1}{k} Z_1 \sum_i \delta_{ii}$$

$$= Z_1$$

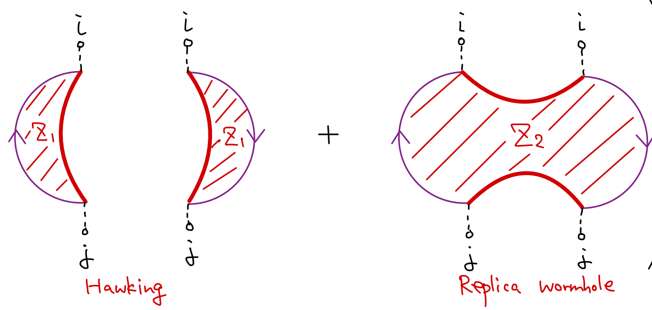
$$Z_n \propto e^{S_{BH}\cdot\chi}$$

West Coast Paper

$$\rho_R^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{i,j} \sum_{l} |j\rangle_R \langle i| \langle \psi_l|\psi_j\rangle_B \langle \psi_i|\psi_l\rangle_B$$

$$\mathrm{tr}\left[\rho_R^2\right] = \frac{c}{k^2} \sum_{ij}^{k} \langle \psi_i|\psi_j\rangle \cdot \langle \psi_j|\psi_i\rangle$$

$$= \frac{c}{k^2} \Big(\quad + \quad \Big)$$



$$= \frac{c}{k^2} \left(Z_1^2 \sum_{ij} \delta_{ij}\delta_{ij} + Z_2 \sum_{ij} \delta_{ii}\delta_{jj} \right)$$

$$= \frac{c}{k^2} \left(Z_1^2 k + Z_2 k^2 \right)$$

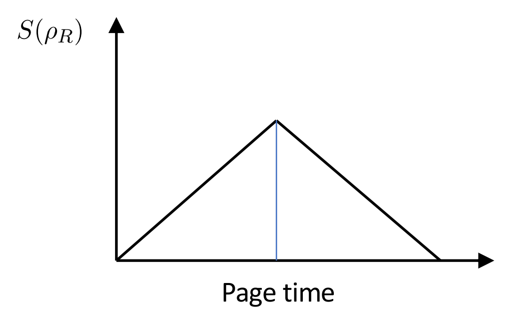
$$Z_1, Z_2 \propto e^{S_{BH}}$$

$$\mathrm{tr}\left[\rho_R^2\right] = \frac{\frac{1}{k^2}\left(Z_1^2 k + Z_2 k^2\right)}{Z_1^2} = \frac{1}{k} + \frac{Z_2}{Z_1^2}$$

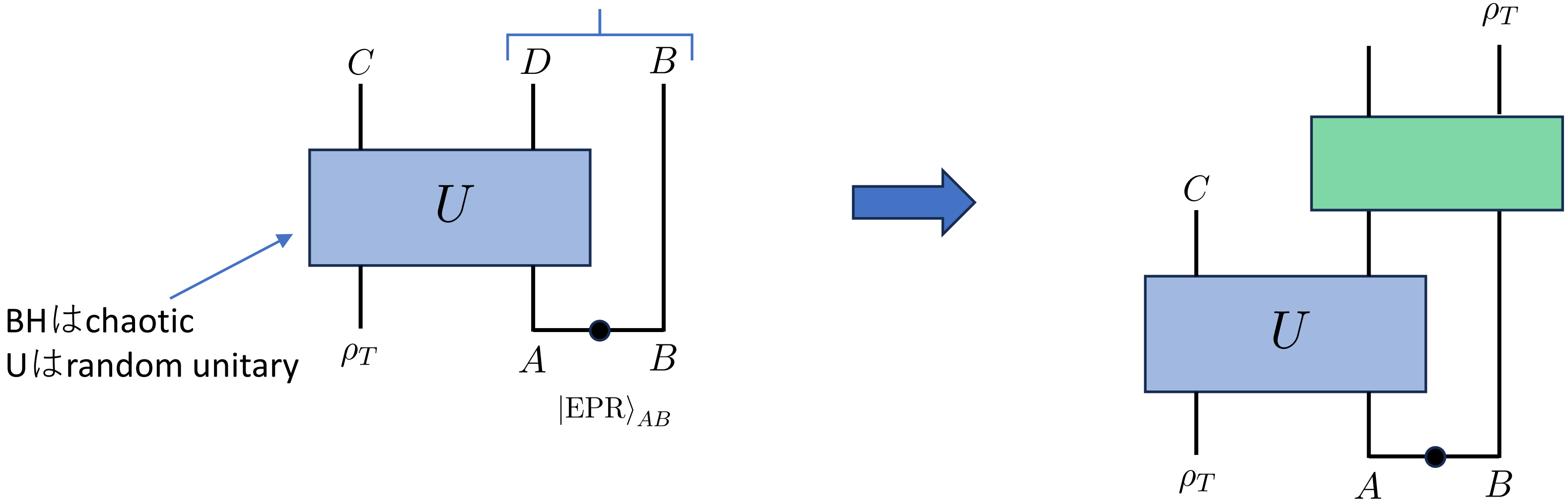
$$= \frac{1}{k} + e^{-S_{BH}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{k} & k \ll e^{BH} \\ e^{-S_{BH}} & e^{BH} \ll k \end{cases}$$

$$S(\rho_R) = \begin{cases} \log k & k \ll e^{BH} \\ S_{BH} & e^{BH} \ll k \end{cases}$$



Hayden-Preskillのdecoupling condition



decoupling condition

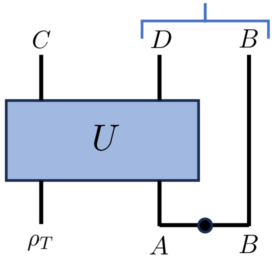
$\boxed{d_T \ll d_D}$ となればただちに DB から ρ_T を復元できる

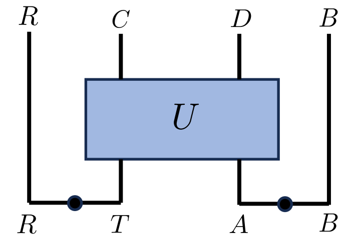
すなわち、$\mathcal{R}_{DB\to T}\left[\mathcal{N}_{T\to DB}\left[\rho_T\right]\right] = \rho_T \quad \forall \rho_T \in \mathcal{H}_T$

なる recovery map $\mathcal{R}_{DB\to T}$ が存在する

(有限温度(TFD)の時、scrambling time $\beta \log S_A$ だけ余計にかかる)

Hayden-Preskillのdecoupling condition





$$|\Psi_{HP}\rangle = \cdots = (I_R \otimes U_{TA\to CD} \otimes I_B)\,|\mathrm{EPR}\rangle_{RT} \otimes |\mathrm{EPR}\rangle_{AB}$$

U をrandom unitaryとすると $\left(\overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1}\right)^2 \leq \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2$ が示される

d_D が d_T より十分大きくなれば、R は C とdecoupleし、T の情報が DB とエンタングルする(BHに投げ入れた情報が完全にradiationに流れ出る)

Haar random averageの計算

$$\overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1} = \int dU\, \|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1$$

$$\left(\overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1}\right)^2 \leq d_R d_C \cdot \overline{\mathrm{tr}\left[\rho_{RC}^2\right]} - 1$$

$$\approx \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2$$

$$\overline{\mathrm{tr}\left[\rho_{RC}^2\right]} = \frac{1}{d_T^2 d_A^2}\overline{\sum U_{CD,TA}U^\dagger_{T'A,C'D}U_{C'D',T'A'}U^\dagger_{TA^\dagger,CD'}}$$

$$\approx \frac{1}{d_T^2 d_A^2}\left(d_A d_D + d_T d_C\right)$$

Weingarten calculus

$$\overline{U_{i_1j_1}U^\dagger_{i_2j_2}U_{i_3j_3}U^\dagger_{i_4j_4}}$$

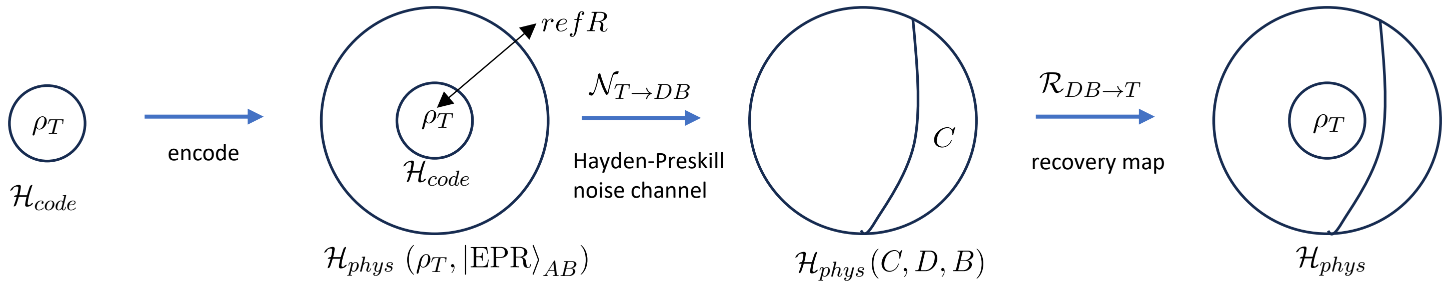
$$= \frac{1}{d^2-1}\left(\delta_{i_1j_2}\delta_{j_1i_2}\cdot\delta_{i_3j_4}\delta_{j_3i_4} + \delta_{i_1j_4}\delta_{j_1i_4}\cdot\delta_{i_3j_2}\delta_{j_3i_2}\right)$$

$$-\frac{1}{d(d^2-1)}\left(\delta_{i_1j_2}\delta_{j_1i_4}\cdot\delta_{i_3j_4}\delta_{j_3i_2} + \delta_{i_1j_4}\delta_{j_1i_2}\cdot\delta_{i_3j_2}\delta_{j_3i_4}\right)$$

dが十分大きいとき

$$\to\ \overline{U_{i_1j_1}U^\dagger_{i_2j_2}}\cdot\overline{U_{i_3j_3}U^\dagger_{i_4j_4}} + \overline{U_{i_1j_1}U^\dagger_{i_4j_4}}\cdot\overline{U_{i_3j_3}U^\dagger_{i_2j_2}}$$

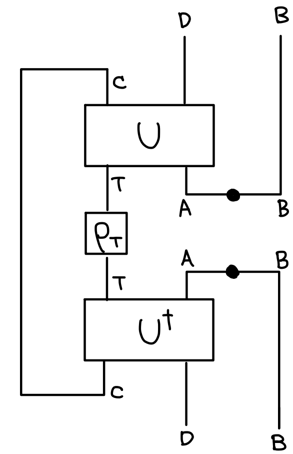
Quantum Error Correctionとの関係



Hayden-Preskill noise channel

$$\mathcal{N}_{T\to D,B}\left[\rho_T\right] = \mathrm{tr}_C\left[(U_{T,A\to C,D}\otimes I_B)(\rho_T\otimes |\mathrm{EPR}\rangle_{A,B}\langle \mathrm{EPR}|)(U^\dagger_{T,A\to C,D}\otimes I_B)\right]$$

$$= \frac{1}{d_B}\sum_{\tilde{D},\tilde{D}'=1}^{d_D}\sum_{\tilde{B},\tilde{B}'=1}^{d_B}\left|\tilde{D}\right\rangle_D\left\langle\tilde{D}'\right|\otimes\left|\tilde{B}\right\rangle_B\left\langle\tilde{B}'\right|\sum_{C=1}^{d_C}\sum_{\tilde{T},\tilde{T}'=1}^{d_T}U_{C,\tilde{D};\tilde{T},\tilde{B}}\left(\rho_T\right)_{\tilde{T}\tilde{T}'}U^\dagger_{C,\tilde{D}';\tilde{T}',\tilde{B}'} \quad =$$



recovery mapが存在する条件はQuantum Error Correction(QEC) condition

Knill-Laflamme condition

$$P_{code}E_i^\dagger E_j P_{code} = \alpha_{ij}P_{code}$$

Sufficiency

$$S(\rho||\sigma) = S(\mathcal{N}[\rho]||\mathcal{N}[\sigma])$$

relative entropy

$$S(\rho||\sigma) = \mathrm{tr}\left[\rho(\log\rho - \log\sigma)\right]$$

として表される

Hayden-PreskillのdecouplingconditionはQEC conditionの一例と考えられる
→ Hayden-Preskill set upでSufficiencyをGravitationalに計算した
→ decoupling conditionが成り立つ時、Sufficiencyを満たすことがわかった

Quantum Error Correctionとの関係

QEC conditionを満たす時、recovery mapとして、Petz recovery mapを構成できる

$$\mathcal{R}^{\mathrm{Petz}}_{\sigma,\mathcal{N}}[\tau] = \sigma^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}^\dagger[(\mathcal{N}[\sigma])^{-\frac{1}{2}}\tau(\mathcal{N}[\sigma])^{-\frac{1}{2}}]\sigma^{\frac{1}{2}}$$

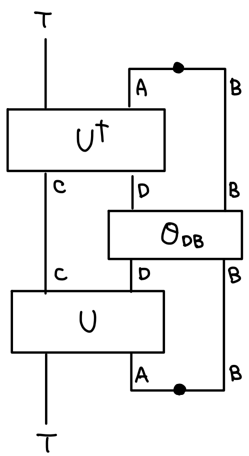
ここで $\mathcal{N}^\dagger$ は $\mathcal{N}$ のadjoint channel ($\mathrm{tr}_{DB}\left[\mathcal{N}_{T\to DB}\left[\rho_T\right]\,\mathcal{O}_{DB}\right] = \mathrm{tr}_T\left[\rho_T\,\mathcal{N}^\dagger_{DB\to T}\left[\mathcal{O}_{DB}\right]\right]$)

Hayden-Preskill noise channelに対するadjoint channelは

$$\mathcal{N}^\dagger_{D,B\to T}[\mathcal{O}_{DB}] = \mathrm{tr}_{A,B}\left[|\mathrm{EPR}\rangle_{A,B}\langle\mathrm{EPR}|\,(U^\dagger_{T,A\to C,D}\otimes I_B)\,\mathcal{O}_{DB}\,(U_{T,A\to C,D}\otimes I_B)\right]$$

$$= \frac{1}{d_B}\sum_{\tilde{T},\tilde{T}'=1}^{d_T}\left|\tilde{T}\right\rangle_T\left\langle\tilde{T}'\right|\sum_{C=1}^{d_C}\sum_{\tilde{B},\tilde{B}'=1}^{d_B}\sum_{\tilde{D},\tilde{D}'=1}^{d_D} U^\dagger_{\tilde{T}\tilde{B},C\tilde{D}}\mathcal{O}_{\tilde{D}\tilde{B},\tilde{D}'\tilde{B}'}U_{C\tilde{D}',\tilde{T}'\tilde{B}'}$$

$=$



Hayden-Preskillのようなchaoticな理論ではscramblingにより、$\mathcal{N}[\sigma]$ はflat spectrum
次のようなPetz liteの形まで単純化できる($\sigma \propto I$ とできる)

$$\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}_{D,B\to T}[\mathcal{O}_{DB}] := \frac{1}{N}\cdot\frac{d_B d_D}{d_T}\mathcal{N}^\dagger_{D,B\to T}\left[\mathcal{O}_{DB}\right]$$

Hayden-Preskill set upでPetz liteを構成し、実際にrecovery mapになっていること
すなわち $\overline{S\left(\rho||\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]\right)} = \overline{S\left(\rho||\rho'_T\right)} \approx 0$ が成り立つことをGravitationalな計算で示した

West Coast Paperとの関係

noise channelとそのadjointを以下のようにWest Coast Paper likeなGravitational Path Integralの形に書き直すことができる

$$\mathcal{N}_{T\to D,B}[\rho_T] = \frac{1}{kd_C}\sum_{i,j=1}^{k}|i\rangle\langle j|\cdot\sum_{\tilde{T},\tilde{T}'=1}^{d_T}\left\langle\psi_j^{\tilde{T}'}\middle|\psi_i^{\tilde{T}}\right\rangle(\rho_T)_{\tilde{T}\tilde{T}'}$$

$$\mathcal{N}^\dagger_{D,B\to T}[\mathcal{O}_{DB}] = \frac{1}{kd_C}\sum_{T,T'=1}^{d_T}|T'\rangle\langle T|\cdot\sum_{i,j=1}^{k}\left\langle\psi_j^{T'}\middle|\psi_i^{T}\right\rangle\langle j|\,\mathcal{O}_{DB}\,|i\rangle$$

以下導出

$$\mathcal{N}_{T\to D,B}[\rho_T] = \mathrm{tr}_C\left[(U_{T,A\to C,D}\otimes I_B)(\rho_T\otimes|\mathrm{EPR}\rangle_{A,B}\langle\mathrm{EPR}|)(U^\dagger_{T,A\to C,D}\otimes I_B)\right]$$

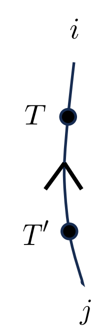
$$= \frac{1}{d_B}\sum_{\tilde{D},\tilde{D}'=1}^{d_D}\sum_{\tilde{B},\tilde{B}'=1}^{d_B}\left|\tilde{D}\right\rangle_D\left\langle\tilde{D}'\right|\otimes\left|\tilde{B}\right\rangle_B\left\langle\tilde{B}'\right|\sum_{C=1}^{d_C}\sum_{\tilde{T},\tilde{T}'=1}^{d_T}U_{C,\tilde{D};\tilde{T},\tilde{B}}(\rho_T)_{\tilde{T}\tilde{T}'}U^\dagger_{\tilde{T}',\tilde{B}';C,\tilde{D}'}$$

$$= \frac{d_D}{k}\sum_{i,j=1}^{k}|i\rangle\langle j|\sum_{\tilde{T},\tilde{T}'=1}^{d_T}\sum_{C=1}^{d_C}U_{C,\tilde{T};i}U^\dagger_{j;C,\tilde{T}'}(\rho_T)_{\tilde{T}\tilde{T}'}$$

DとBをまとめてradiationの足 i とした ($i=1,\cdots,k$, $k=d_Dd_B$)

重力の微視的状態を $|\psi_i^T\rangle_C \coloneqq \sqrt{d_Cd_D}\sum_{C=1}^{d_C}|C\rangle\,U_{C,T;i}$ と定義し、

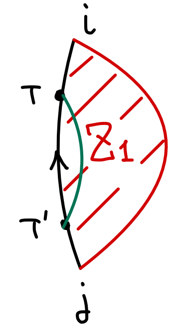
$$\left\langle\psi_i^T\middle|\psi_j^{T'}\right\rangle = d_C\,d_D\sum_{C=1}^{d_C}U^\dagger_{i;C,T}\,U_{C,T';j}$$



とすれば上記の式が得られる (T はcode subspaceの足)

West Coast Paperとの関係

$$\overline{\left\langle \psi_i^{T} \middle| \psi_j^{T'} \right\rangle} = d_C d_D \sum_{C=1}^{d_C} \overline{U^{\dagger}_{i;C,T} U_{C,T';j}} = d_C \delta_{ij} \delta_{TT'} =$$



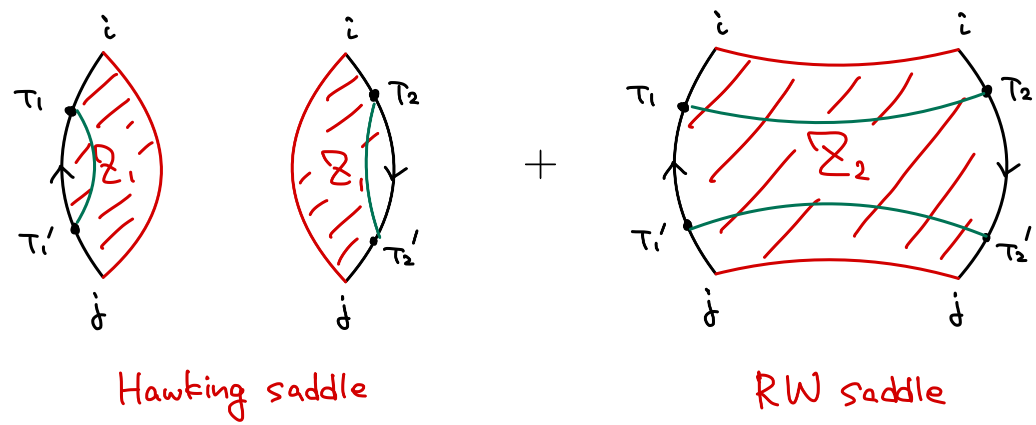
$$\overline{\left\langle \psi_i^{T_1} \middle| \psi_j^{T_1'} \right\rangle \cdot \left\langle \psi_j^{T_2'} \middle| \psi_i^{T_2} \right\rangle} = (d_C d_D)^2 \sum_{C_1, C_2 = 1}^{d_C} \overline{U^{\dagger}_{i;C_1,T_1} U_{C_1,T_1';j} U^{\dagger}_{j;C_2,T_2'} U_{C_2,T_2;i}}$$

Weingarten calculus

$$= d_C^2 \delta_{ij} \delta_{ji} \delta_{T_1 T_1'} \delta_{T_2 T_2'} + d_C \delta_{ii} \delta_{jj} \delta_{T_1 T_2} \delta_{T_1' T_2'}$$

WCP like diagrammatic calculation

$=$



randomnessの平均の計算をdiagrammaticに行う規則が得られた

目次

1. Introduction
2. Hayden-Preskill、Quantum Error Correction、West Coast Paperの関係
3. Hayden-PreskillのRecovery mapについて(本論)
   ① Hayden-PreskillでRecovery mapが存在する条件
   ② Petz LiteがHayden-PreskillのRecovery mapになっていること
   ③ Yoshida-KitaevのdecoderがPetz Liteとみなせること
4. Hayden-Preskill set upのSYKによる研究
5. 結論

得られた結果

- recovery mapが存在する必要十分条件は
  $\mathcal{N}$ が $S(\rho||\sigma) = S(\mathcal{N}[\rho]||\mathcal{N}[\sigma])$ (sufficiency)を満たすことである
  Hayden-Preskill set upでGravitationalにsufficiencyを計算して
  late timeでsufficiencyを満たす(recovery mapが存在する)ことを示した

- decoupling conditionが成り立つ時、Petz liteはHayden-Preskillのrecovery map
  として機能すること、すなわち以下が成り立つことを示した
  - $\overline{S\left(\rho||\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]\right)} = \overline{S\left(\rho||\rho'_T\right)} \approx 0$
  - $S(\rho||\sigma) \approx \overline{S(\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]\,||\,\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\sigma]])}.$

- Hayden-Preskillのdecoderとして知られているYoshida-Kitaev decoderは
  Petz liteとみなせることを示した

Hayden-PreskillでRecovery mapが存在する条件

$$\boxed{S(\rho||\sigma) \;=\; \overline{S(\mathcal{N}[\rho]||\mathcal{N}[\sigma])}}$$ となる条件を求めよう

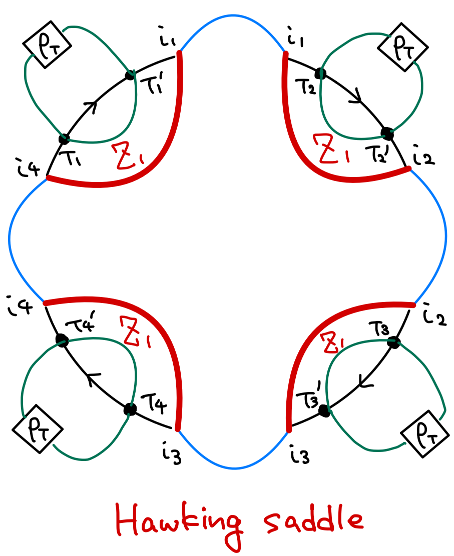
$$\overline{S(\mathcal{N}[\rho]||\mathcal{N}[\sigma])} \approx \lim_{n\to 1}\frac{1}{n-1}\left(\log\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]^n\right]} - \log\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]\mathcal{N}[\sigma]^{n-1}\right]}\right)$$

を計算すれば良い

$\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]^n\right]}$ は様々なsaddleの合計である

early timeではHawking saddle、late timeではRW saddleがdominant

$$\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]^n\right]}\Big|_{\text{fully discon.}} =$$



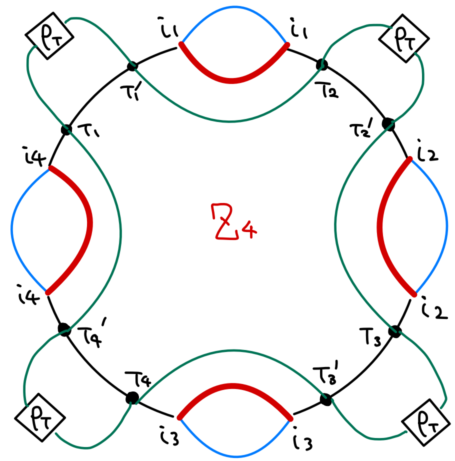
$$= \frac{1}{(k\,d_C)^n}\cdot k\,(d_C)^n \sum_{\boldsymbol{T}=1}^{d_T}\rho_{T_1T_1}\,\rho_{T_2T_2}\cdots\rho_{T_nT_n}$$

$$= \frac{1}{(k)^{n-1}}\left(\mathrm{tr}\left[\rho\right]\right)^n$$

$$= \frac{1}{(k)^{n-1}}$$

Hayden-PreskillでRecovery mapが存在する条件

$$\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]^n\right]}\Big|_{\text{fully conne.}} =$$



$$= \frac{1}{(k\, d_C)^n} \cdot (k)^n\, d_C \sum_{\boldsymbol{T}=1}^{d_T} \rho_{T_n T_{n-1}} \cdots \rho_{T_2 T_1} \rho_{T_1 T_n}$$

$$= \frac{1}{(d_C)^{n-1}}\, \mathrm{tr}\left[\rho^n\right]$$

$$\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]^n\right]} = \frac{1}{(k)^{n-1}} \left(\mathrm{tr}\left[\rho\right]\right)^n + \frac{1}{(d_C)^{n-1}}\, \mathrm{tr}\left[\rho^n\right] + \cdots ,$$

$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{(k)^{n-1}} & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ \dfrac{1}{(d_C)^{n-1}}\, \mathrm{tr}\left[\rho^n\right] & d_C\, d_T \ll k \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{tr}\left[\mathcal{N}[\rho]\mathcal{N}[\sigma]^{n-1}\right]} = \frac{1}{(k)^{n-1}}\, \mathrm{tr}\left[\rho\right] \left(\mathrm{tr}\left[\sigma\right]\right)^{n-1} + \frac{1}{(d_C)^{n-1}}\, \mathrm{tr}\left[\rho\sigma^{n-1}\right] + \cdots ,$$

$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{(k)^{n-1}} & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ \dfrac{1}{(d_C)^{n-1}}\, \mathrm{tr}\left[\rho\sigma^{n-1}\right] & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases} ,$$

$$\boxed{\overline{S(\mathcal{N}[\rho]||\mathcal{N}[\sigma])} = \begin{cases} 0 & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ S(\rho||\sigma) & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1. \end{cases}}$$

late timeでSufficiency条件を満たすことがわかる

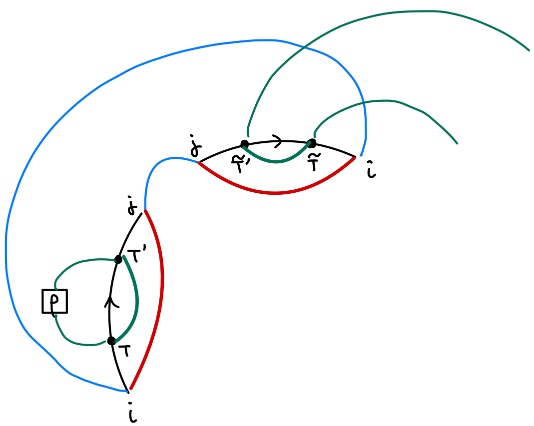
WCP likeな計算では、各時点でどのsaddleがdominantかの詳細が明確である

Petz LiteがHayden-PreskillのRecovery mapになっていること

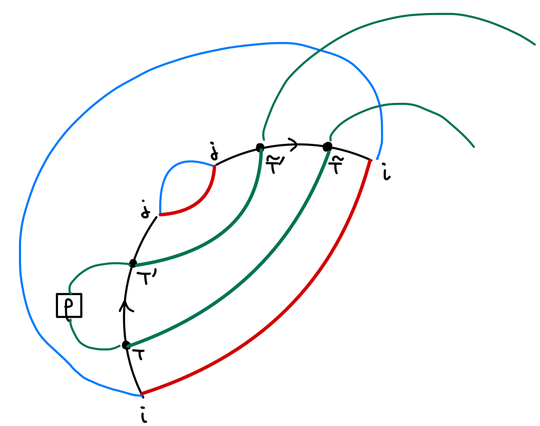
$\rho'_T := \mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]$ のaverageを求めておく

$$\overline{\rho'_T} = \frac{1}{N}\frac{1}{kd_C^2 d_T}\sum_{\tilde{T},\tilde{T}'}\left|\tilde{T}\right\rangle_T\left\langle\tilde{T}'\right|\sum_{T,T'}\sum_{ij}\overline{\left\langle\psi_i^{\tilde{T}}\middle|\psi_j^{\tilde{T}'}\right\rangle\left\langle\psi_j^{T'}\middle|\psi_i^{T}\right\rangle}\rho_{TT'}$$

$=$



$+$



$$= \frac{1}{N}\frac{1}{kd_C^2 d_T}\left(kd_C^2 I_T + k^2 d_C \rho_T\right)$$

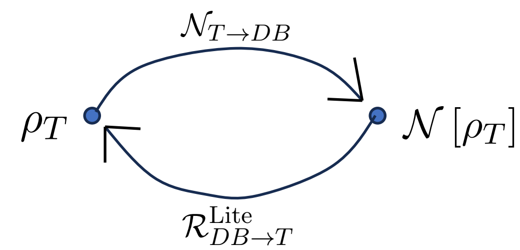
$\overline{\mathrm{tr}\left[\rho'_T\right]} = \mathrm{tr}\left[\rho_T\right] = 1$ で規格化すると $\boxed{\overline{\rho'_T} = \dfrac{\rho + \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \cdot \dfrac{I_T}{d_T}}{1 + \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2}}$ となる

Petz LiteがHayden-PreskillのRecovery mapになっていること

$$\overline{S\left(\rho||\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]\right)} = \overline{S\left(\rho||\rho'_T\right)} \approx 0 \quad \text{を示す}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S(\rho||\rho'_T)} &= \overline{\mathrm{tr}\left[\rho\left(\log\rho - \log\rho'_T\right)\right]} \\
&= S(\rho) - \lim_{n\to 1}\frac{1}{n-1}\overline{\log\mathrm{tr}\left[\rho\left(\rho'_T\right)^{n-1}\right]} \\
&\approx S(\rho) - \lim_{n\to 1}\frac{1}{n-1}\log\overline{\mathrm{tr}\left[\rho\left(\rho'_T\right)^{n-1}\right]} \\
&\approx S(\rho) - \lim_{n\to 1}\frac{1}{n-1}\log\mathrm{tr}\left[\rho\left(\overline{\rho'_T}\right)^{n-1}\right] \\
&= S\left(\rho\middle\|\overline{\rho'_T}\right), \\
&\approx \begin{cases} S\left(\rho\middle\|\dfrac{I_T}{d_T}\right) & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ S(\rho||\rho) & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} S\left(\rho\middle\|\dfrac{I_T}{d_T}\right) & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ 0 & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathrm{tr}\left[\rho\left(\rho'_T\right)^{n-1}\right]} \approx \mathrm{tr}\left[\rho\left(\overline{\rho'_T}\right)^{n-1}\right]$$



late timeでは、我々の構成したPetz liteで ρ_T をrecoverできることがわかる

Petz LiteがHayden-PreskillのRecovery mapになっていること

$\overline{S(\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]] \,||\, \mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\sigma]])} \approx S(\rho||\sigma)$ も確かめよう

$$
\begin{aligned}
\overline{S(\rho'_T \,||\, \sigma'_T)} &\approx \lim_{n\to 1} \frac{1}{n-1}\left(\log \overline{\mathrm{tr}\left[(\rho'_T)^n\right]} - \log \overline{\mathrm{tr}\left[\rho'_T \left(\sigma'_T\right)^{n-1}\right]}\right) \\
&\approx \lim_{n\to 1} \frac{1}{n-1}\left(\log \mathrm{tr}\left[\left(\overline{\rho'_T}\right)^n\right] - \log \mathrm{tr}\left[\overline{\rho'_T}\left(\overline{\sigma'_T}\right)^{n-1}\right]\right) \\
&= S\left(\overline{\rho'_T}\middle|\middle|\overline{\sigma'_T}\right), \\
&\approx \begin{cases} S\left(\dfrac{I_T}{d_T}\middle|\middle|\dfrac{I_T}{d_T}\right) & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ S(\rho||\sigma) & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ S(\rho||\sigma) & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\overline{\rho'_T} = \frac{\rho + \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \cdot \dfrac{I_T}{d_T}}{1 + \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2}, \qquad \overline{\sigma'_T} = \frac{\sigma + \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2 \cdot \dfrac{I_T}{d_T}}{1 + \left(\dfrac{d_T}{d_D}\right)^2}
$$

late timeでは、$\overline{S(\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]] \,||\, \mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}[\sigma]])} \approx S(\rho||\sigma)$ が成り立つ

$$
\rho_T \bullet \xrightarrow{\mathcal{N}_{T\to DB}} \bullet \xrightarrow{\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}_{DB\to T}} \bullet\ \mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}\left[\mathcal{N}\left[\rho_T\right]\right]
$$

$$
\sigma_T \bullet \xrightarrow{\mathcal{N}_{T\to DB}} \bullet \xrightarrow{\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}_{DB\to T}} \bullet\ \mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}\left[\mathcal{N}\left[\sigma_T\right]\right]
$$

一般にはCPTP mapで距離は単調減少
(Uhlmann`s monotonicity theorem)
Cが十分小さければ距離を保つ(sufficient algebra)

Petz LiteがHayden-PreskillのRecovery mapになっていること

(補足) $\overline{\mathrm{tr}\left[(\rho'_T)^n\right]} = \mathrm{tr}\left[\left(\overline{\rho'_T}\right)^n\right]$ について

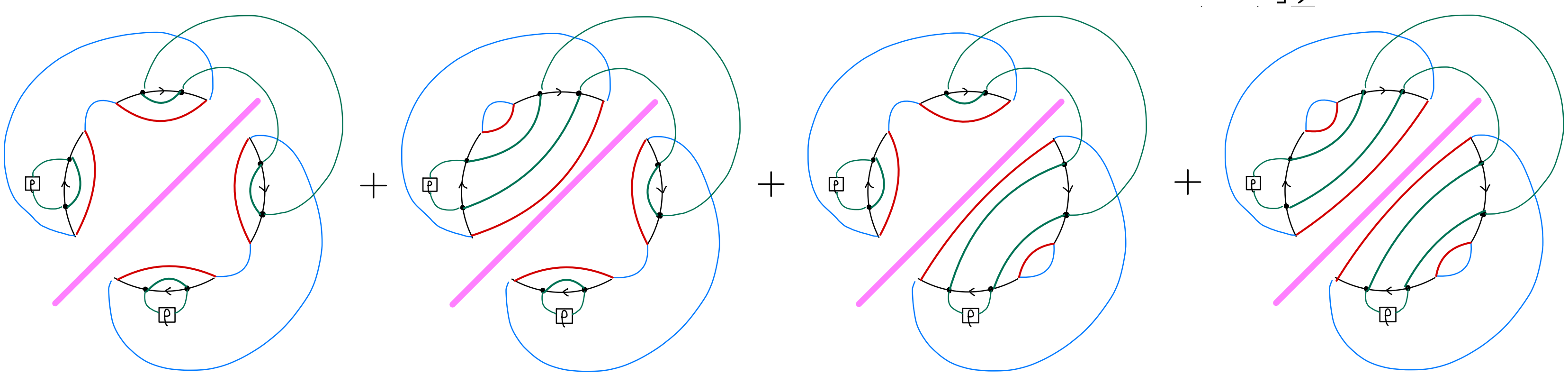
$n=2$ case

$$\overline{\mathrm{tr}\left[(\rho'_T)^2\right]} = \frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{(k(d_C)^2 d_T)^2}\sum_{\tilde{\boldsymbol{T}}=1}^{d_T}\sum_{\boldsymbol{T},\boldsymbol{T'}=1}^{d_T}\sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1}^{k}\overline{\left\langle\psi^{\tilde T_2}_{i_1}\middle|\psi^{\tilde T_1}_{j_1}\right\rangle\left\langle\psi^{T'_1}_{j_1}\middle|\psi^{T_1}_{i_1}\right\rangle\rho_{T_1T'_1}\cdot\left\langle\psi^{\tilde T_1}_{i_2}\middle|\psi^{\tilde T_2}_{j_2}\right\rangle\left\langle\psi^{T'_2}_{j_2}\middle|\psi^{T_2}_{i_2}\right\rangle\rho_{T_2T'_2}}$$

$$\left.\overline{\mathrm{tr}\left[(\rho'_T)^2\right]}\right|_{\text{Planar.}}$$
$$= \frac{1}{N^2}\cdot\frac{(k\,d_C)^4}{(k(d_C)^2 d_T)^2}\Bigg\{\overbrace{\left(\frac{d_T}{k^2}+\frac{2}{k\,d_C}+\frac{\mathrm{tr}\left[\rho^2\right]}{(d_C)^2}\right)}^{\text{leading term}} + \frac{1}{k\,d_C}\left[\frac{1}{k^2}\left(2+d_T\,\mathrm{tr}\left[\rho^2\right]+(d_T)^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k\,d_C}\left((d_T)^2\,\mathrm{tr}\left[\rho^2\right]+2d_T+2\,\mathrm{tr}\left[\rho^2\right]\right)+\frac{1}{(d_C)^2}d_T\,\mathrm{tr}\left[\rho^2\right]\right]\Bigg\}$$

$\boxed{d_T \ll k\,d_C \text{ であればleadingのみ拾ってこれる}}$

$k = d_D d_B$

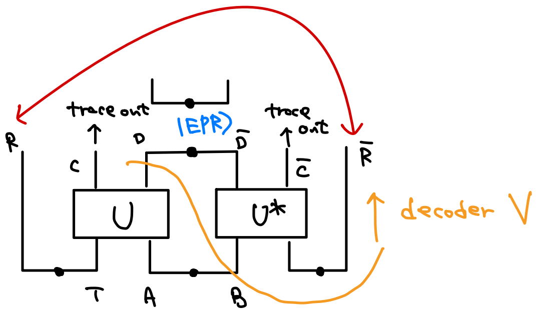


Yoshida-KitaevのdecoderがPetz Liteとみなせること

最後にYoshida-Kitaev decoderがPetz liteとみなせることを示す

$|\mathrm{EPR}\rangle_{R\overline{R}}$ であれば recover できたことになる

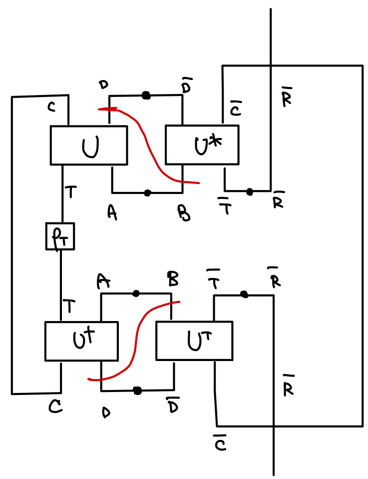
$|\Psi_{out}\rangle =$



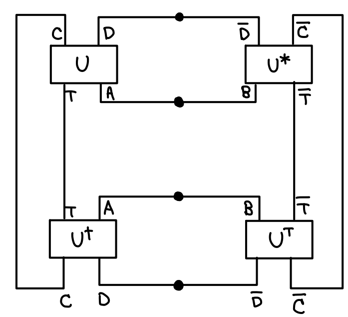
← $|\mathrm{EPR}\rangle_{D\overline{D}}$ で projection measurement

↑ decoder V

$\mathcal{R}^{KY}[\mathcal{N}[\rho]] = \frac{1}{\Delta}$



$\Delta = \frac{1}{d_T^2}$

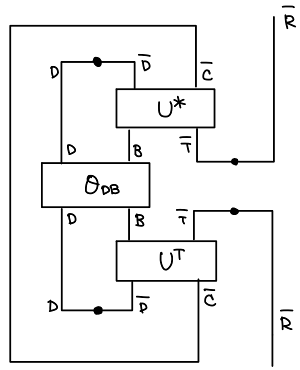


$$\mathcal{R}^{\mathrm{KY}}_{D,B\to\overline{R}}[\mathcal{O}_{DB}] = \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{tr}_{\overline{C}}\left[\,{}_{D,\overline{D}}\langle\mathrm{EPR}|\,U^*_{B,\overline{T}\to\overline{C},\overline{D}}\left(\mathcal{O}_{DB}\otimes|\mathrm{EPR}\rangle_{\overline{T},\overline{R}}\langle\mathrm{EPR}|\right)U^T_{B,\overline{T}\to\overline{C},\overline{D}}\,|\mathrm{EPR}\rangle_{D,\overline{D}}\right]$$

$$= V_{T\to\overline{R}}\,\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}_{D,B\to T}[\mathcal{O}_{DB}]\,V^\dagger_{T\to\overline{R}}$$

Yoshida-KitaevのdecoderがPetz Liteとみなせること

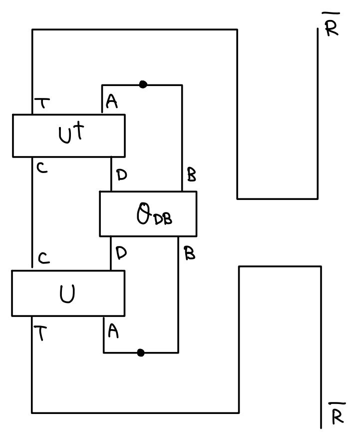
$$\mathcal{R}^{KY}_{DB\to\bar{R}}[O_{DB}] = \frac{1}{\Delta}$$



operator transpose
(cf. Reeh-Schlieder)

$$= \frac{1}{\Delta}\frac{d_B}{d_T\, d_D}$$

$$= \frac{d_C}{d_T^2\,\Delta}$$



$$\frac{d_C}{(d_T)^2\,\Delta} = \frac{d_C}{1+\left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2}$$

これはPetz liteの規格化定数に一致する

$$= \frac{d_C}{d_T^2\,\Delta}\; V_{T\to\bar{R}}\; \mathcal{N}^\dagger_{DB\to T}[O_{DB}]\; V^\dagger_{T\to\bar{R}}$$

$$= V_{T\to\overline{R}}\,\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}_{D,B\to T}\left[\mathcal{O}_{DB}\right]\,V^\dagger_{T\to\overline{R}}$$

Yoshida-Kitaev decoderを
Hayden-PreskillにおけるPetz liteと同一視できた

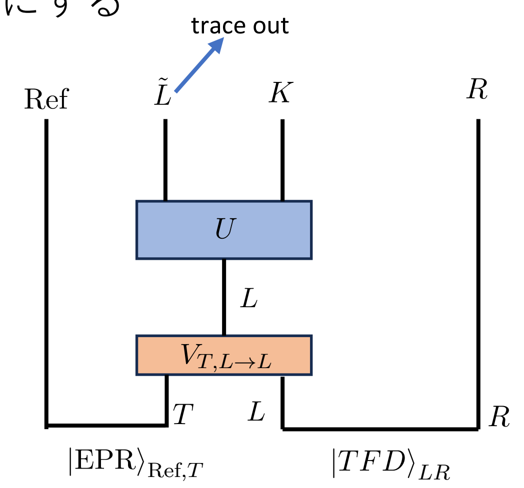
目次

Hayden-Preskill set upのSYKによる研究

Hayden-Preskill set upではdynamicsをrandomなunitary gateとしていた

より物理として意味のある議論がしたい(場の理論で研究したい)

- dynamicsをSYK modelのHamiltonianとし、投げ込む情報をMajorana fermionとする
- old BHとearly radiationをEPR pair(高温極限)からTFD stateにする



fermionの埋め込み

$$(V_{T,L\to L}\otimes I_R)\left(|T\rangle_T\otimes|\mathrm{TFD}\rangle_{L,R}\right):=\begin{cases}|\mathrm{TFD}\rangle_{L,R} & \text{for } T=0\\ \psi_{i,L}(0)\,|\mathrm{TFD}\rangle_{L,R} & \text{for } T=1\end{cases}$$

Hayden-PreskillをSYKで考えると

$$|\Psi_{\text{SYK HP}}\rangle=(I_{\mathrm{Ref}}\otimes U_L(t)\otimes I_R)\,(I_{\mathrm{Ref}}\otimes V_{T,L\to L}\otimes I_R)\left(|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{Ref},T}\otimes|\mathrm{TFD}\rangle_{L,R}\right)$$

$U_L(t)=\exp(-itH_L)$

Hayden-Preskill set upのSYKによる研究

やったこと

- SYK modelでHayden-Preskill noise channelとPetz liteを構成した
- stateにnoise channelをかけたあとPetz liteをかけてrecover

  できるか、すなわち $\langle T|\mathcal{R}^{\mathrm{Lite,SYK}}_{K,R\to T}\left[\mathcal{N}^{\mathrm{SYK}}_{T\to K,R}\left[\left|\tilde{T}'\right\rangle_T\left\langle\tilde{T}\right|\right]\right]|T'\rangle$

  を計算するとmodular flowed correlatorで表されることがわかった
- modular flowed correlatorを計算することにより、

  挿入したstateをrecoverするのに<u>scrambling timeの2倍の時間</u>

  かかることがわかった。noise channelとrecovery mapに

  それぞれscrambling timeだけかかっていると解釈できる

結論

- Hayden-Preskill noise channelとそのadjoint channelを構成し、
  West Coast Paper likeなGravitational Path Integralの計算に帰着させた
- SufficiencyをWCP likeに計算し、decoupling conditionを満たすlate timeでは
  recovery mapが存在することを示した
- そのrecovery mapとしてPetz liteが使えることを示した
- Yoshida-Kitaev decoderがPetz liteとみなせることを示した
- Hayden-Preskill set upをSYK modelで記述し、recoverabilityの計算をすることで
  挿入したstateをrecoverするのにscrambling timeの2倍かかることを示した