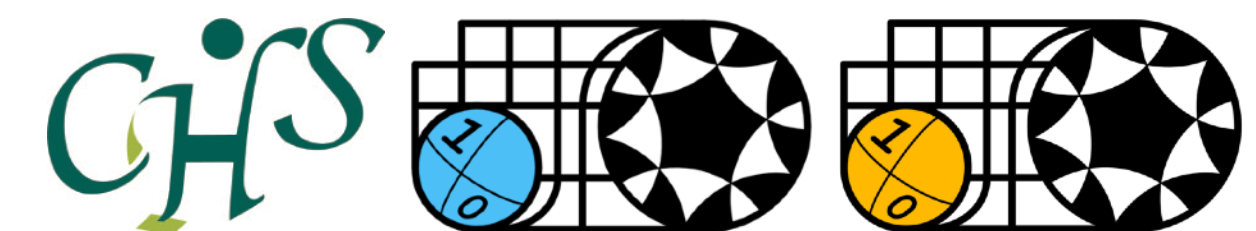


Generalized entanglement entropies based on holography

玉岡 幸太郎 (日大文理)



このトークで話すこと：

- ・ホログラフィーを動機として生まれた量子情報量
- ・その量子重力及び量子多体系への応用

1. Introduction (エンタングルメント・エントロピー)
2. 混合状態に対する量子情報量
3. エントロピーの事後選択過程への一般化
4. Discussion



ほぼレビューですが、comprehensive ではないです 🤖

1. Introduction

量子エンタングルメント

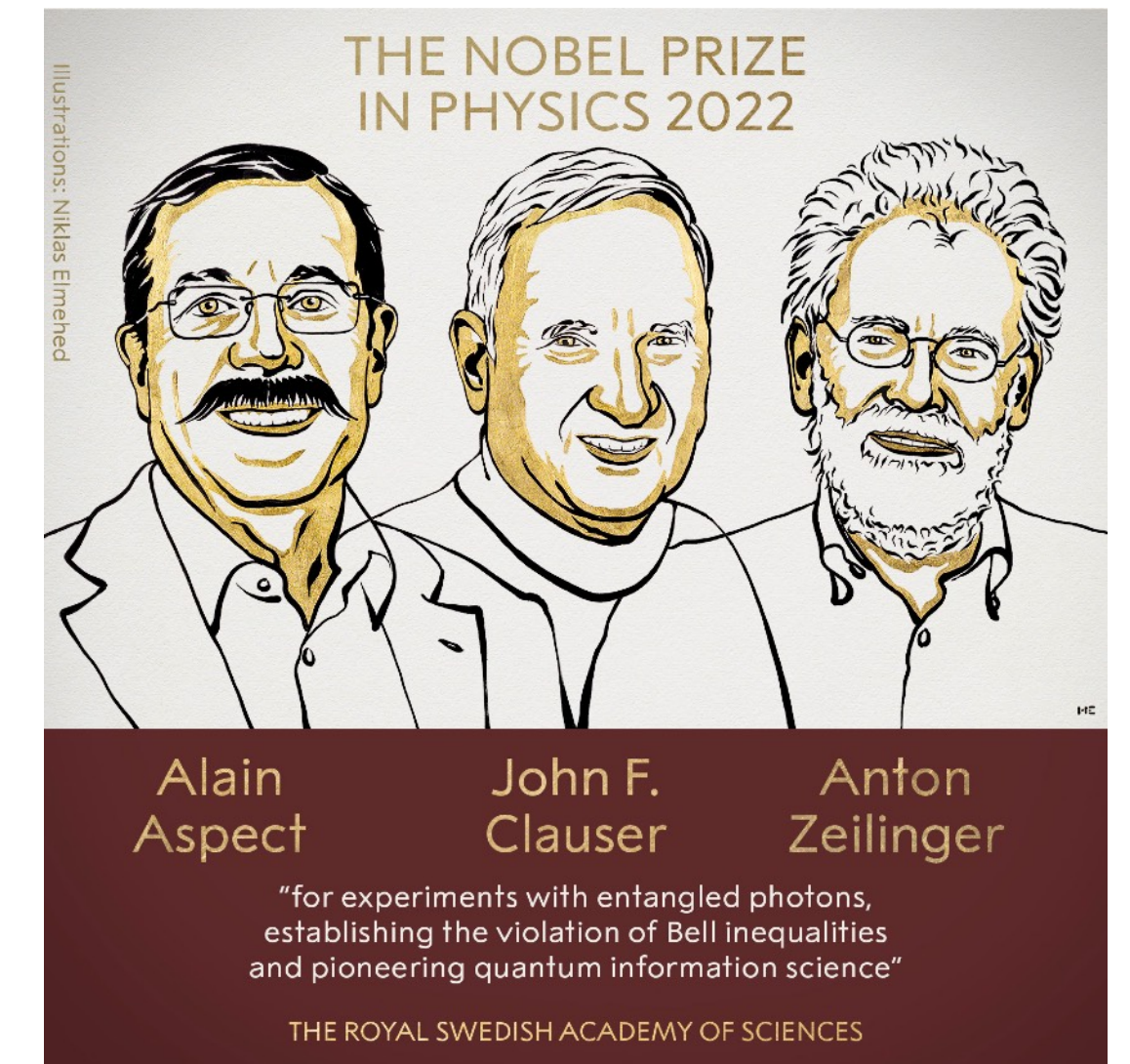
= 系（状態）の“量子性”を特徴付ける指標

例) EPR pair

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle)$$

- ・ AとBのスピン(Z)の測定値は完全にランダムだが、両者の値には相関がある
- ・ 他のスピン(X,Y)に対しても同様（干渉項が本質的→量子論特有の相関！）

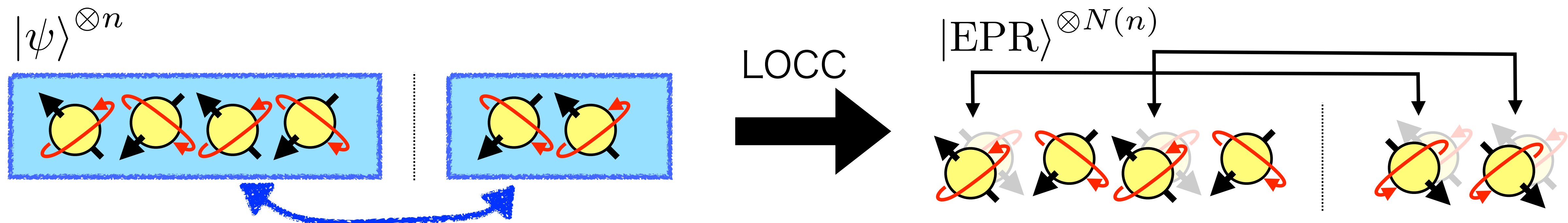
$$\text{c.f. } \rho_{AB} = \frac{1}{2} |0_A 0_B\rangle \langle 0_A 0_B| + \frac{1}{2} |1_A 1_B\rangle \langle 1_A 1_B|$$



エンタングルメント・エントロピーでエンタングルメントを定量化

$$S(\rho_A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A \quad \rho_A = \text{Tr}_B |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| \quad \langle \psi_{AB} | \mathcal{O}_A \otimes \mathbf{1}_B | \psi_{AB} \rangle = \text{Tr}_A [\rho_A \mathcal{O}_A]$$

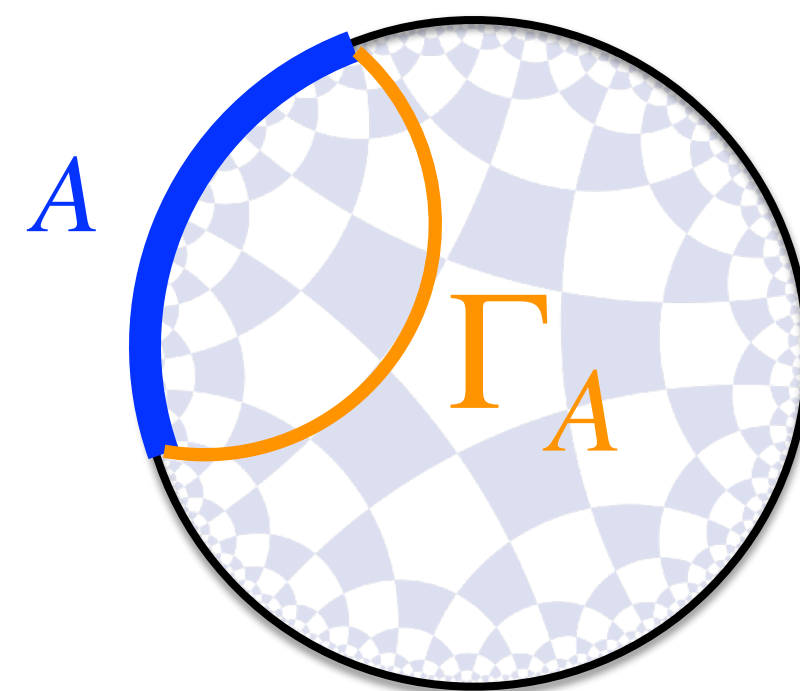
- EPR pair はエンタングルメントの基本単位
- 純粋状態に対して、mutuality : $S(\rho_A) = S(\rho_B)$
- 一般に、純粋状態のEE = (漸近的な) EPR pair の個数 : $S(\rho_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n}$



ホログラフィーにおけるエンタングルメントと時空の構造の対応

笠-高柳公式 Ryu-Takayanagi '06

$$S(\rho_A) = \underset{\substack{\partial\Gamma_A = \partial A \\ \Gamma_A \sim A}}{\text{Min}} \left[\frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} \right]$$



- ・ 時間依存性
Hubeny-Rangamani-Takayanagi '07
- ・ 量子補正
Faulkner-Lewkowycz-Maldacena '13, Engelhardt-Wall '14
- ・ AdS/CFT対応を用いた証明
Lewkowycz-Maldacena'13

量子情報 → 量子重力

- ・ 古典重力と双対な量子状態を量子情報量で特徴づける（例：相互情報量のモノガミー）
Hayden-Headrick-Maloney '11
- ・ Page 曲線 → アイランド公式 Penington '19, Almheiri-Engelhardt-Marolf-Maxfield '19, ...
- ・ 量子誤り訂正符号や Random Tensor Network を用いた AdS/CFT 対応のToyモデル
Almheri-Dong-Harlow '14, Pastawski-Yoshida-Harlow-Preskill '15, ..., Hayden-Nezami-Qi-Thomas-Walter-Yang '16, ...

重力/量子情報 対応？（幾何学量と量子情報量の密接な関係）

- ・両者の問題も密接に対応

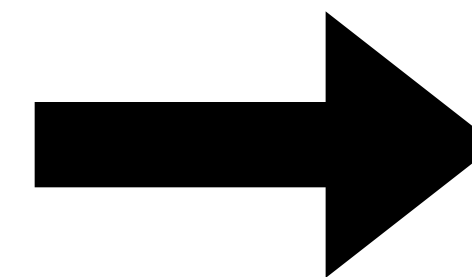
例)

色々な幾何学量
(極小曲面だけでは不十分)



複雑なエンタングルメント構造
(エンタングルメント・エントロピー
だけでは不十分)

- ・ AdS/CFT対応をモチベーション/ヒントに量子情報量を見つけられないか？



量子重力/量子多体系への応用

このトークで議論する例：

- ① 混合状態に対する量子情報量
- ② 事後選択過程への一般化 (+ α)

このトークで話すこと：

- ・ホログラフィーを動機として生まれた量子情報量
- ・その量子重力及び量子多体系への応用

1. Introduction (エンタングルメント・エントロピー)

2. 混合状態に対する量子情報量

3. エントロピーの事後選択過程への一般化

4. Discussion

2. 混合状態に対する量子情報量

エンタングルメント・エントロピーは万能ではない

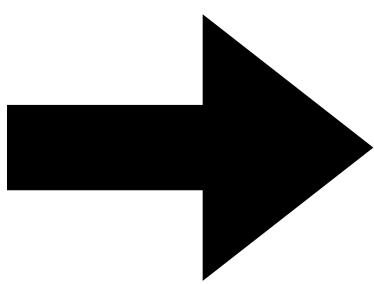
例) $\rho_{AB} = q |\Psi\rangle\langle\Psi| + (1 - q) \sigma_A \otimes \sigma_B$

$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle)$

EPRペア

$\sigma = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|$

古典相関のみ



$\rho_A = \frac{1}{2} |0_A\rangle \langle 0_A| + \frac{1}{2} |1_A\rangle \langle 1_A|$

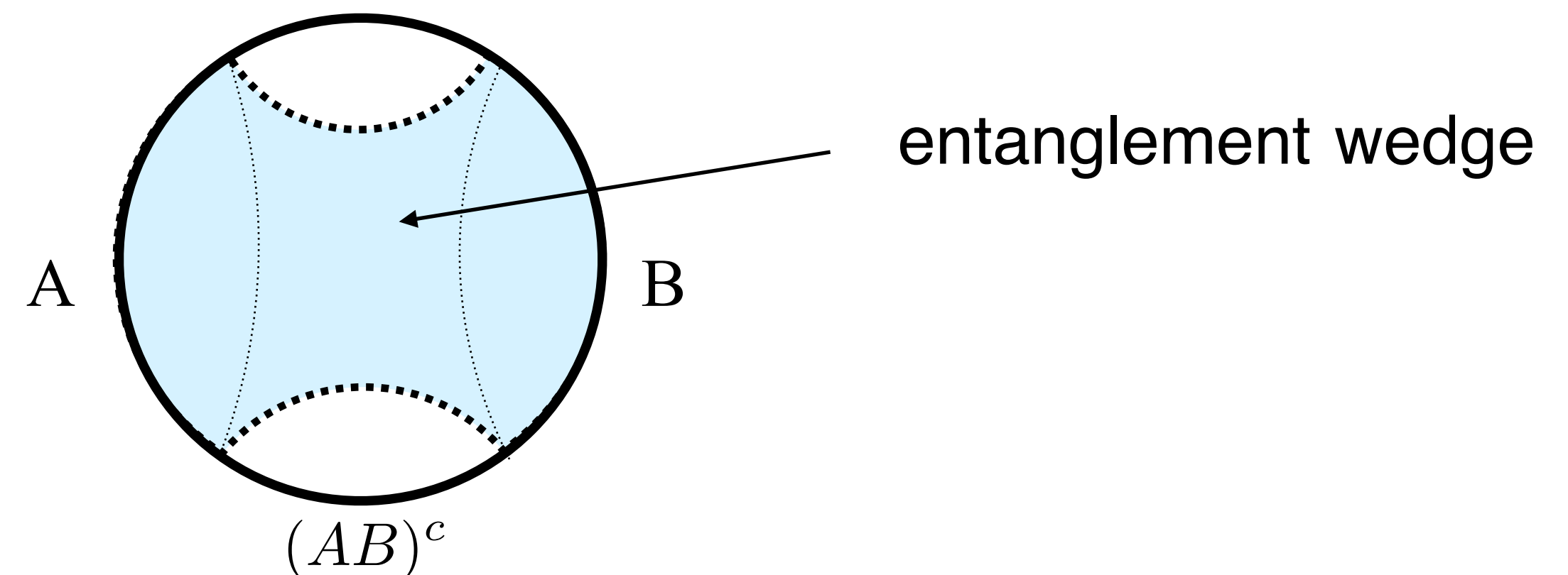
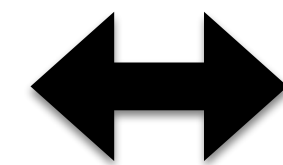
EEは q に依存しない

混合状態の相関の定量化

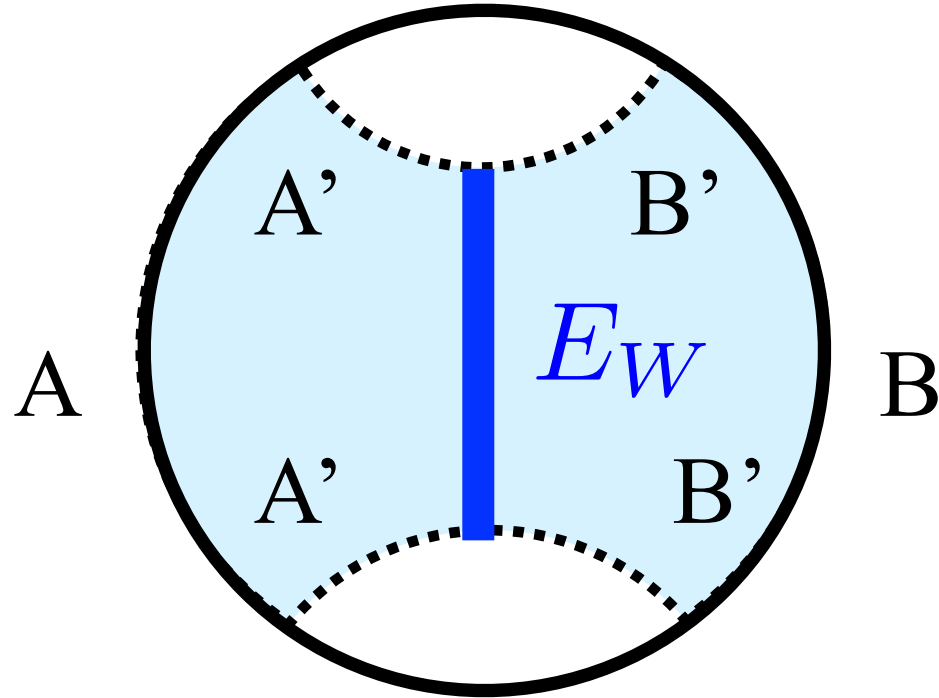
$$\rho^2 \neq \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

- 多くの場合、注目する系はなんらかの意味で“**部分系**”
- ホログラフィーでは、熱的状态($\in$ 混合状態)は**ブラックホール**と対応
- AdS/CFT対応のより構成的な理解を目指して (**subregion/subregion duality**)

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_{(AB)^c} |0\rangle\langle 0|$$



Entanglement Wedge Cross Section (EWCS)



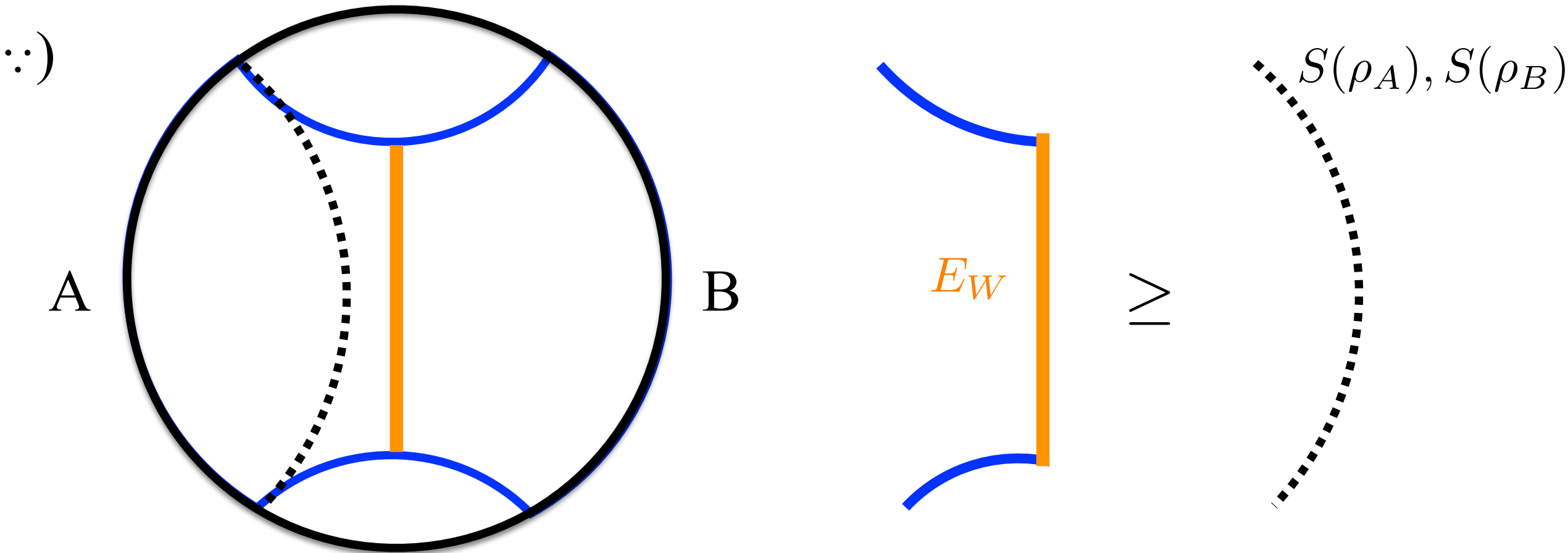
entanglement wedge
cross section

- EWの境界を仮想的なboundaryだと思った時の、極小曲面の面積 (断面積)

Umemoto-Takayanagi '17,
Nguyen-Devakul-Halbasch-Zaletel-Swingle '17

- 純粋状態の場合、通常の笠-高柳公式に戻る

- 種々の不等式 $2E_W \geq I_{AB} = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$



EWCSを計算する情報量の提案

- Entanglement of purification (純粋化量子もつれ)

オリジナルの提案 Umemoto-Takayanagi '17,
Nguyen-Devakul-Halbasch-Zaletel-Swingle '17

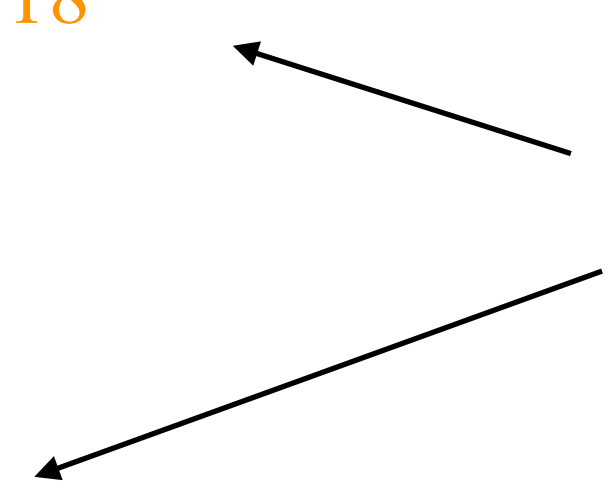
- Logarithmic Negativity (対数ネガティビティ) Kudler-Flam—Ryu '18

- Odd entropy (オッド・エントロピー) KT '18

- Reflected entropy (反射エントロピー)

Dutta-Faulkner '19

新しく導入された量



純粋化 (purification) を用いる

Purification: 混合状態をより大きなHilbert空間の純粋状態で表現

$$\rho_X \longrightarrow |\psi_{XX^*}\rangle \quad \text{s.t.} \quad \rho_X = \text{Tr}_{X^*} (|\psi_{XX^*}\rangle \langle \psi_{XX^*}|)$$

- X^* は最低でも X と同じサイズが必要
- 一意ではない (X^* に作用するユニタリー変換分の自由度)

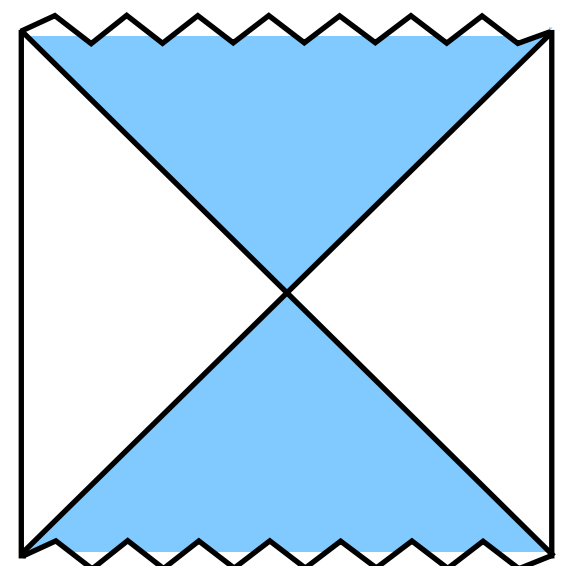
有名な例: Thermo Field Double state (TFD state)

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} \longrightarrow |\text{TFD}_\beta\rangle = Z(\beta)^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\frac{\beta}{2} E_n} |n_A n_B\rangle$$

AdS/CFT

Maldacena '02

Eternal BH



純粋化 (purification) を用いる

- Entanglement of purification Terhal-Horodecki-Leung-DiVincenzo '02

$$E_P(\rho_{AB}) = \min_{\substack{\text{all purifications} \\ |\psi_{AA^* BB^*}\rangle}} S(\rho_{AA^*})$$

- Reflected entropy Dutta-Faulkner '19

$$S_R(\rho_{AB}) = S(\rho_{AA^*})_{|\sqrt{\rho_{AB}}_{AA^* BB^*}\rangle}$$

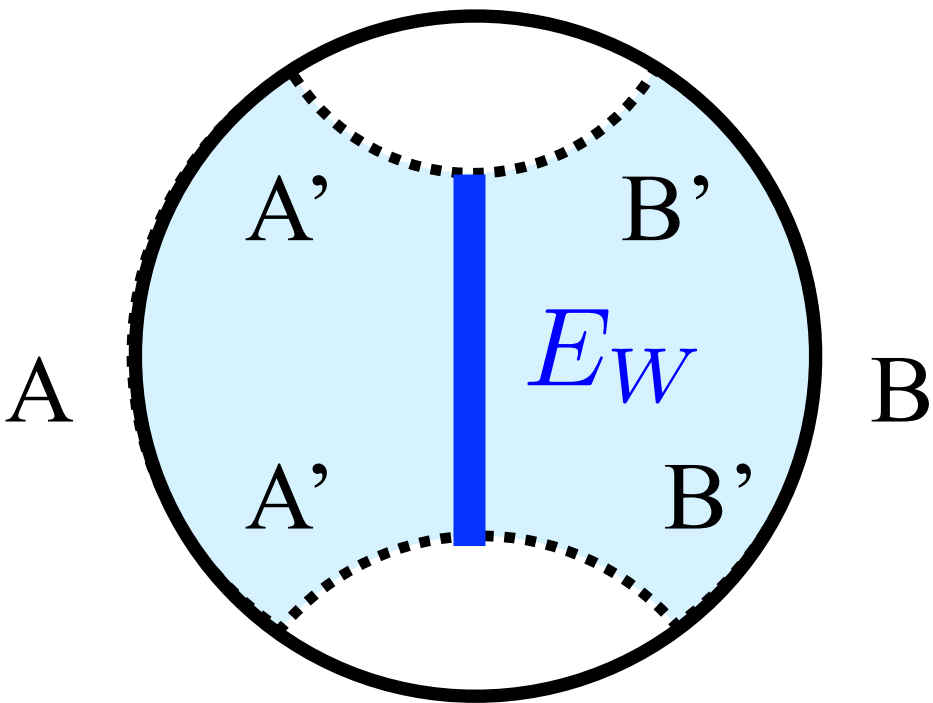
Canonical purification

$$\rho_{AB} = \sum_n p_n |n_{AB}\rangle \langle n_{AB}| \longrightarrow |\sqrt{\rho_{AB}}_{AA^* BB^*}\rangle = \sum_n \sqrt{p_n} |n_{AB}\rangle |n_{A^* B^*}^*\rangle$$

EoP, REとEWCS

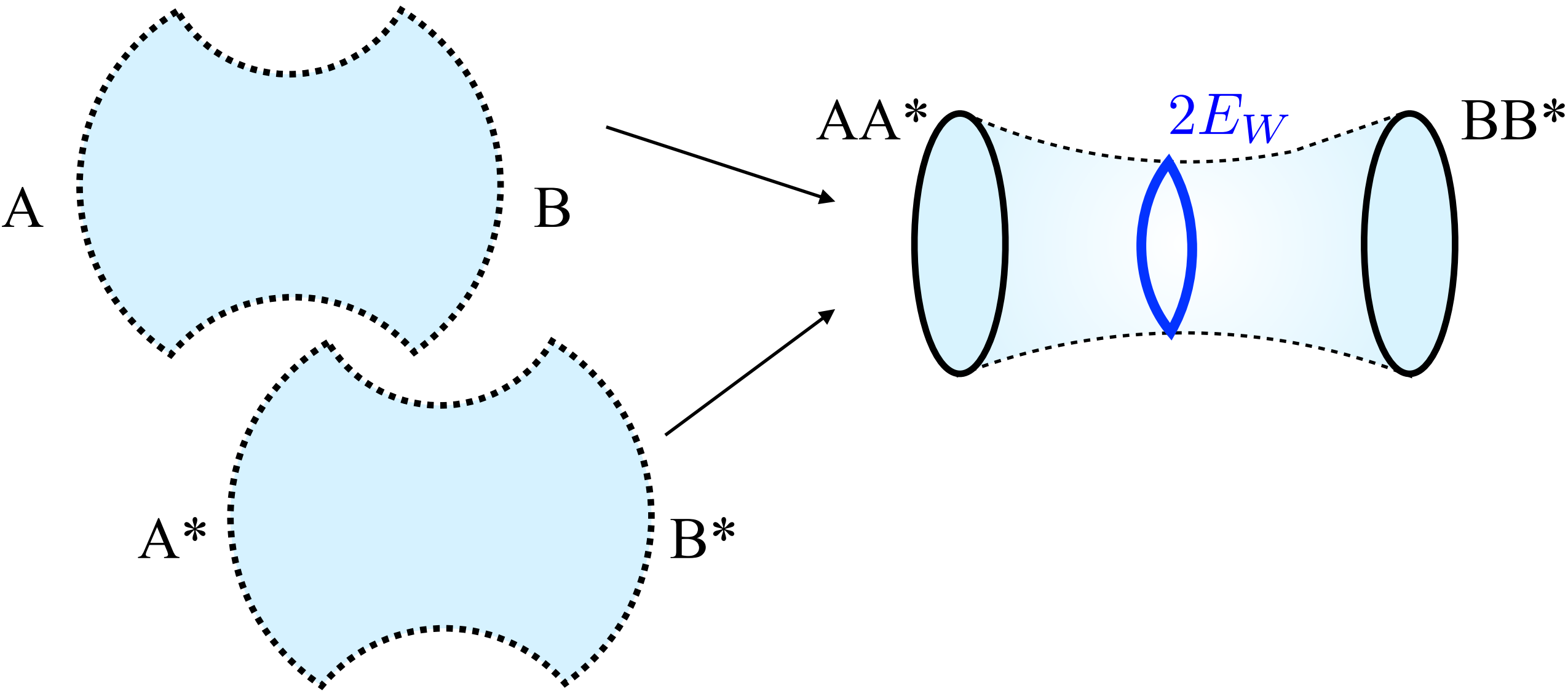
$$E_P = E_W$$

- 種々の非自明な不等式の一致 Umemoto-Takayanagi '17, Nguyen et al.'17
- Surface/state 対応 Miyaji-Takayanagi '15
- Path integral optimizationによる計算 Caputa-Miyaji-Takayanagi-Umemoto '18
- ある種のTNでの計算



$$S_R = 2E_W$$

- Lewkowycz-Maldacena 的な証明 Dutta-Faulkner '19



部分転置 $\langle i_A, j_B | \rho_{AB}^{T_B} | k_A, \ell_B \rangle = \langle i_A, \ell_B | \rho_{AB} | k_A, j_B \rangle$

部分転置 $\sim$ 部分“時間反転” $\rightarrow$ 非物理的な状態(負の確率)

Peresの定理: 部分転置した密度行列が負の固有値を持つ $\Rightarrow$ entangled state

(逆は必ずしも真ではない: 束縛エンタングルメント)

- 対数ネガティビティ (負の固有値の絶対値の和) Vidal-Werner '02

$$E_{LN} = \lim_{n_e: \text{even} \rightarrow 1} \log \text{Tr}(\rho_{AB}^{T_B})^{n_e}$$

- オッド・エントロピー (部分転置した行列の “von Neumann entropy”)

$$S_o = \lim_{n_o: \text{odd} \rightarrow 1} \frac{\text{Tr}(\rho_{AB}^{T_B})^{n_o} - 1}{1 - n_o}$$

KT '18

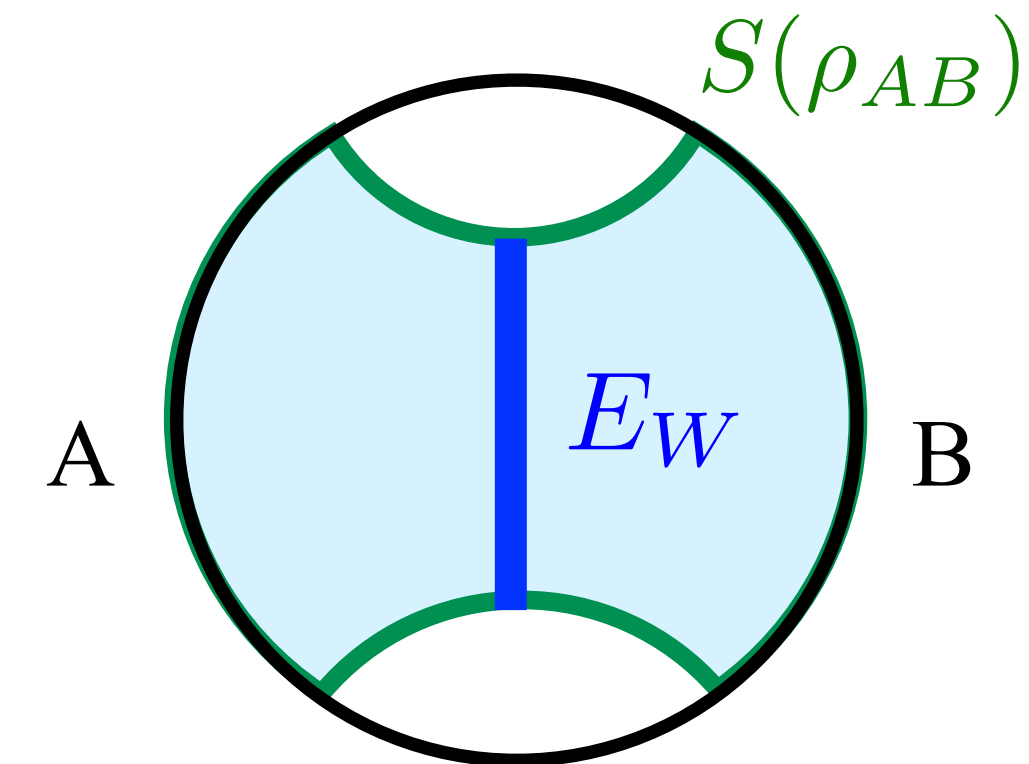
対数ネガティビティ, オッド・エントロピーとEWCS

$$S_o(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB}) + E_W(\rho_{AB})$$

KT '18

$$E_{LN}(\rho_{AB}) = E'_W(\rho_{AB})$$

Kudler-Flam—Ryu '18



- LNは時空にバックリアクションが入る (n>1 レニー・エントロピーと同じ)

より正確には、REのレニー版と関係付けられる Kudler-Flam—Kusuki—Ryu '19

- どちらも、2次元共形場の理論の直接計算

(技術的には、large-c 共形ブロックの具体系から得られる→後にREにも応用)

Hirai-KT-Yokoya '18

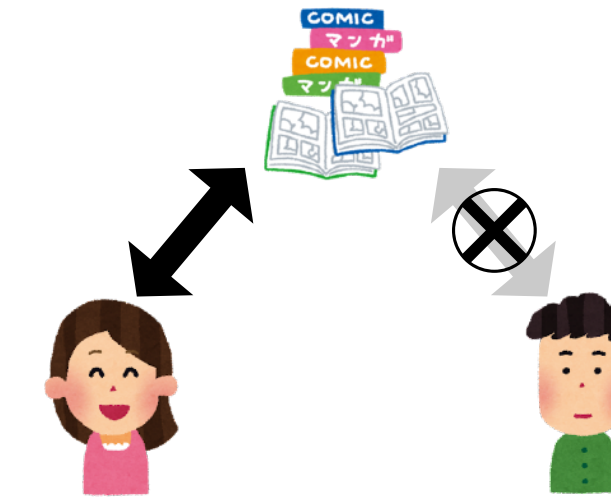
- Random TN の計算ではレプリカ対称性が破れる Dong-Qi-Walter '21

EWCSはどのような相関を捉えているか？

- 何か相互情報量以上のものをカウントしている？ $E_W \geq I_{A:B}/2$

重力双対を持つCFTにおいて、相互情報量は量子相関が支配的 (モノガミー関係式を満たす)

$$I_{A:BC} \geq I_{A:B} + I_{A:C}$$



- EWCSはエンタングルメント測度(量子もつれだけを測る理想的な情報量)とは双対にならない

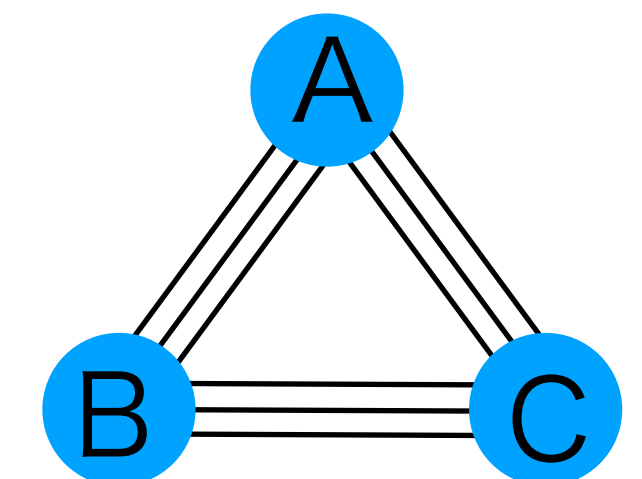
Umemoto '19

→ **時空創発には、古典相関も重要？** (= より大きな系の多体量子相関！)

- 典型的なAdS/CFTのToyモデル:

bi-partite entanglement が (large bound dimension で) 支配的

“Triangle State” $|\Psi_{ABC}\rangle \sim |\text{EPR}_{AB}\rangle^{\otimes a} |\text{EPR}_{BC}\rangle^{\otimes b} |\text{EPR}_{CA}\rangle^{\otimes c}$



W-type entanglement の重要性

Aker-Rath '19

- 何か相互情報量以上のものをカウントしている? $E_W \geq I_{A:B}/2$

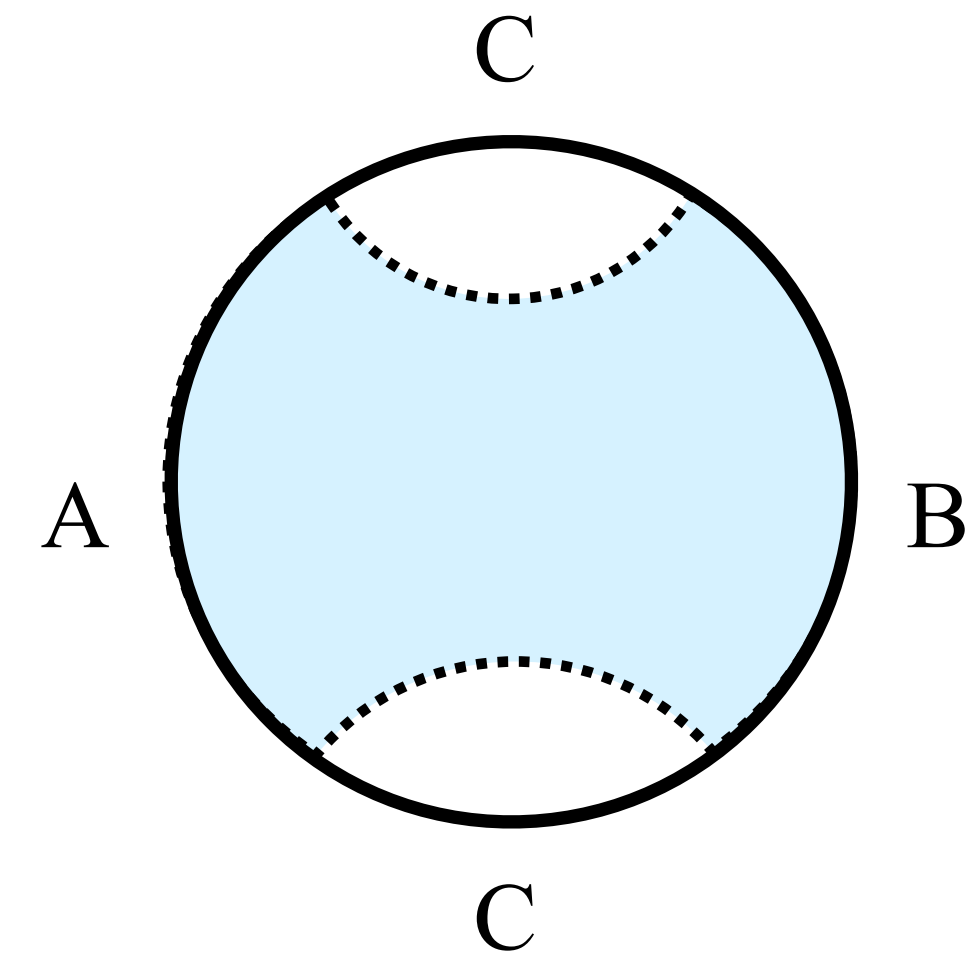
Reflected entropy と相互情報量の差

$$H_{A:B} \equiv S_R(\rho_{AB}) - I_{A:B} \text{ を計算すると...}$$

- 2種類の (genuine) tri-partite entangled state

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B 0_C\rangle + |1_A 1_B 1_C\rangle) \quad H_{A:B} = 0$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0_A 0_B 1_C\rangle + |0_A 1_B 0_C\rangle + |1_A 0_B 0_C\rangle) \quad H_{A:B} > 0 \quad \text{c.f. REの代わりにEoPを使うとGHZでも正}$$



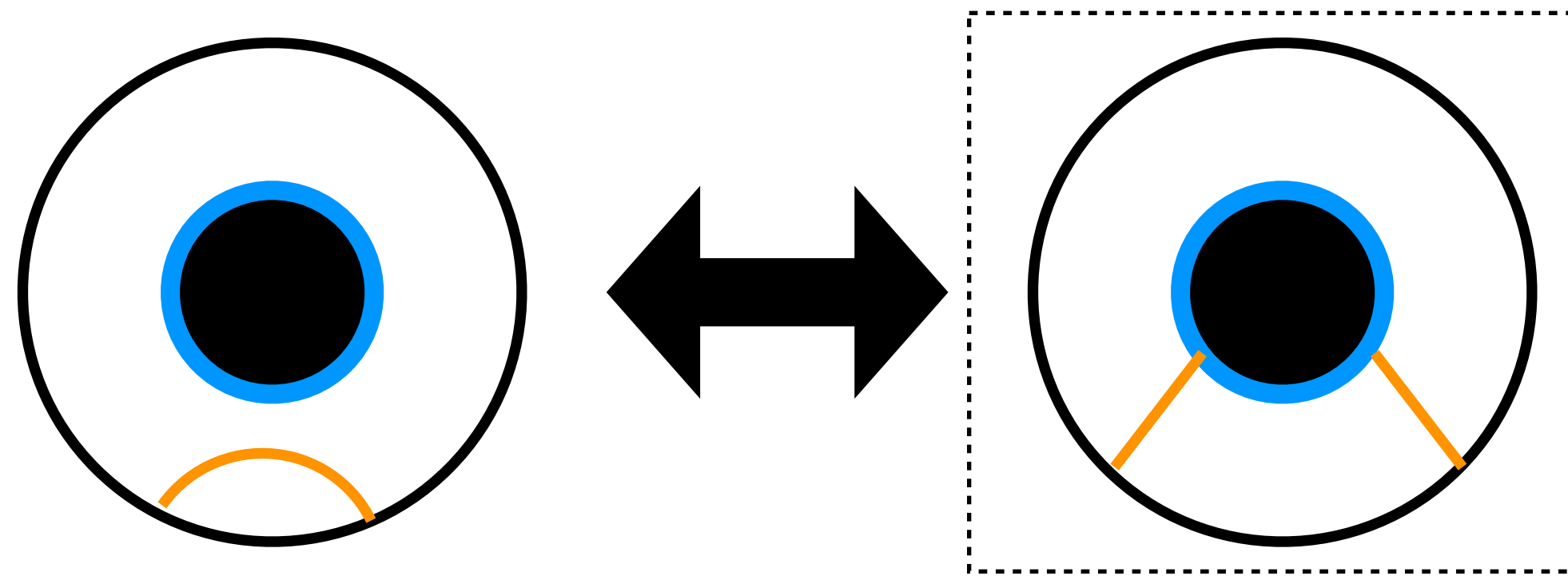
- 一般に、triangle stateの和 (GHZの一般化) に対して、 $H=0$ Zou-Siva-Soejima-Mong-Zaletel '21

時空創発には、W-type entanglement も重要?

Black hole microstates への示唆

- プライマリー状態の時空構造 (“ホライズン上” で時空が終わっている)

Kusuki-KT '19



$|\mathcal{O}_H\rangle$: 重いプライマリー状態

$$\Delta_H \geq \frac{c}{12}$$

(2d HCFT の odd entropy, reflected entropy の計算から)

- Disentangled state と呼ばれる atypical state
- Disentangled state は BH エントロピーを large-N で説明できるだけ存在

Wei-Yoneta '22

EoP=EWCS から一般に示せる！

面積演算子の期待値としてのEWCS

- Entanglement entropy in HCFT は面積演算子の期待値として解釈できる

Almheiri-Dong-Swingle'16

古典時空と双対な状態の重ね合わせ (order c^0)

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle \longrightarrow S(\rho_A^\psi) = \sum_i |c_i|^2 S(\rho_A^{\psi_i}) = \frac{\langle \psi | \frac{\hat{A}}{4G_N} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

- EWCSに双対な情報量は同じような解釈ができるか？ in progress

Odd entropy, reflected entropy $\rightarrow$ YES (CFTの計算)

Entanglement of purification $\rightarrow$ YES (EWCSとの等価性+ α は仮定)

このトークで話すこと：

- ・ホログラフィーを動機として生まれた量子情報量
- ・その量子重力及び量子多体系への応用

1. Introduction (エンタングルメント・エントロピー)

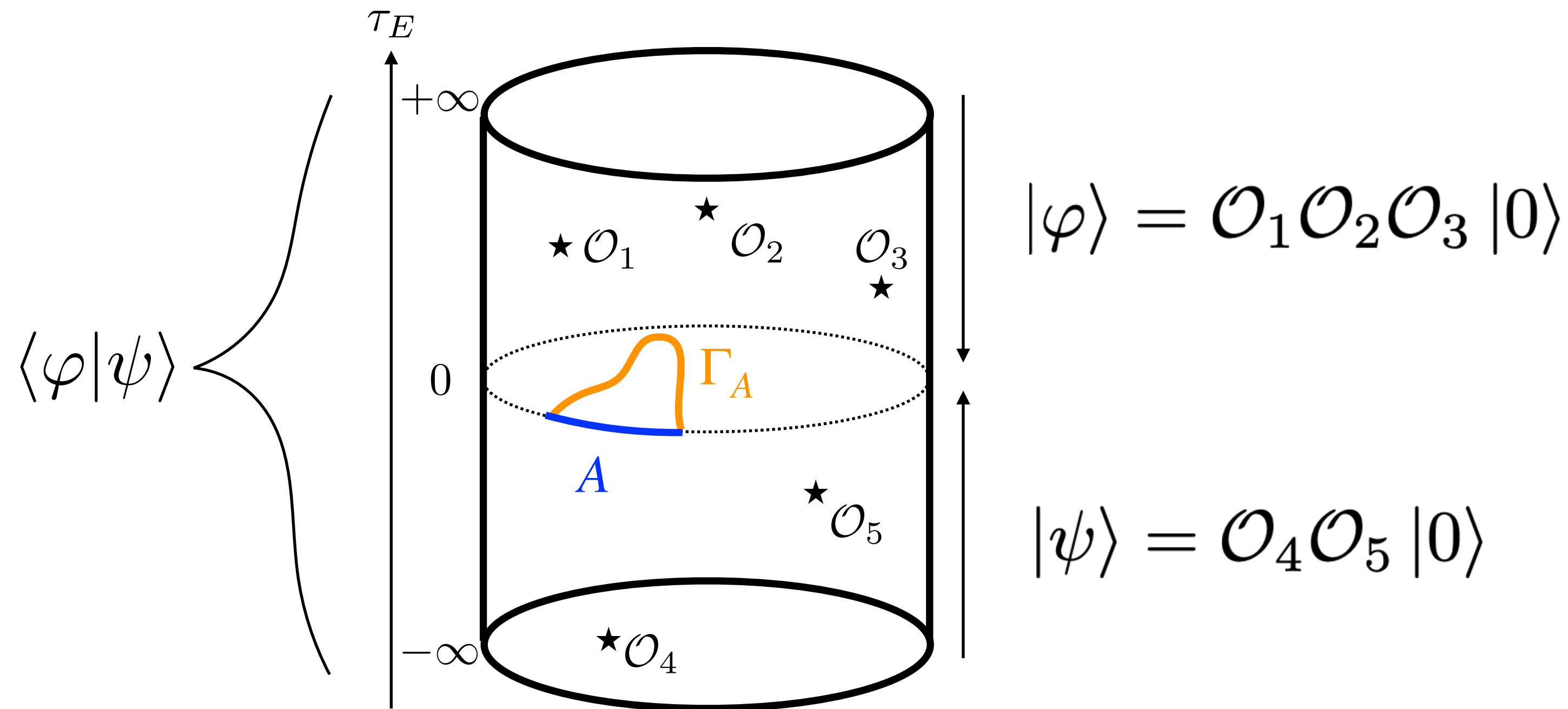
2. 混合状態に対する量子情報量

3. エントロピーの事後選択過程への一般化

4. Discussion

より一般的な文脈での極小曲面

非対称な時空 (Euclidean AdS) における面積？



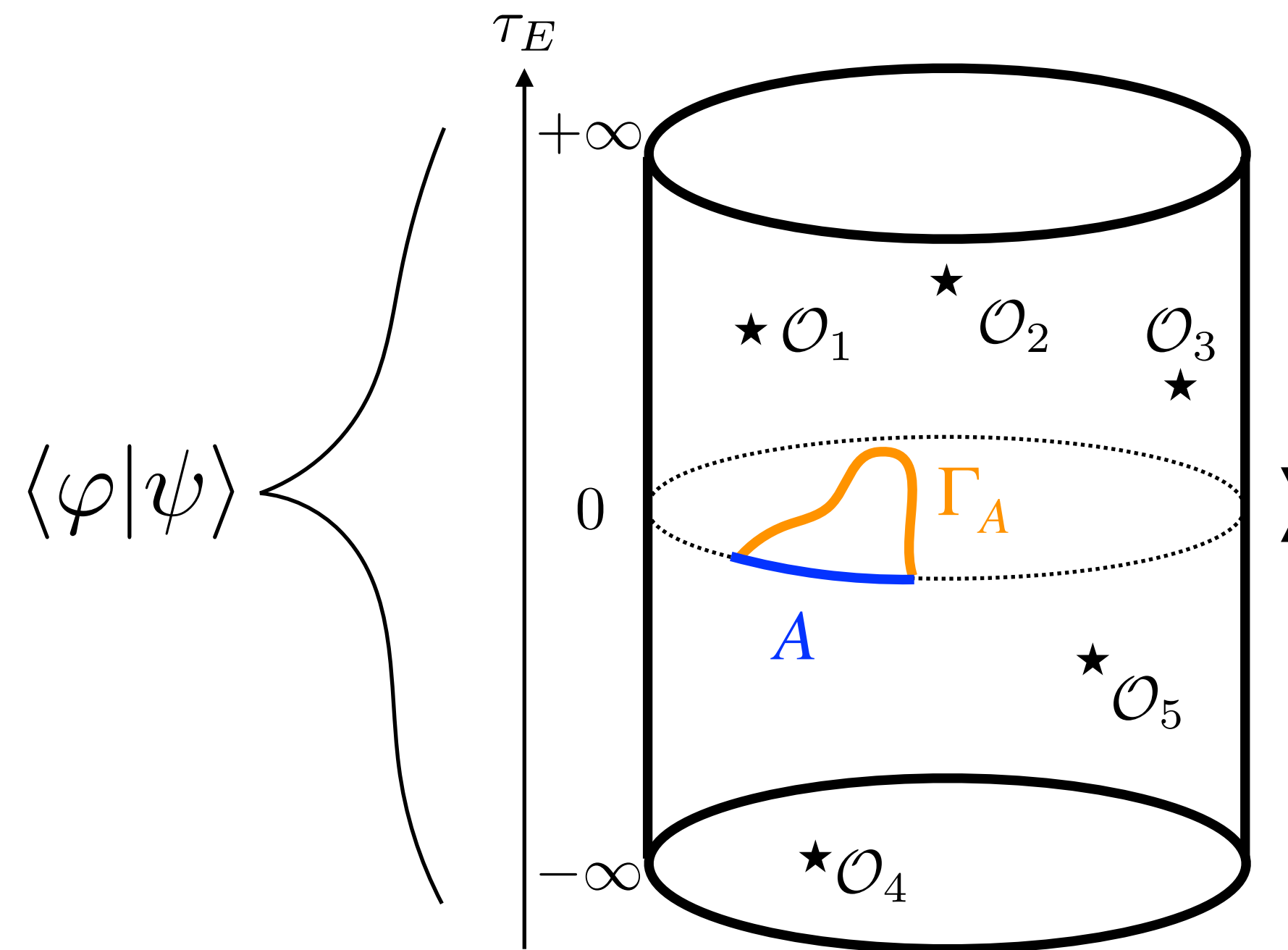
dS/CFT 対応

一般に重力の面積項がCFT側で複素数値になる

$$\ell_{AdS} \rightarrow i\ell_{dS} \quad c \propto \ell^\#$$

Narayan '15, Sato '15, ...

より一般的な文脈での極小曲面



$$|\varphi\rangle = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3 |0\rangle$$

$$\mathcal{T}^{\psi|\varphi} = \frac{|\psi\rangle\langle\varphi|}{\langle\varphi|\psi\rangle}$$

$$|\psi\rangle = \mathcal{O}_4 \mathcal{O}_5 |0\rangle$$

非対称な時空での面積？

density matrix

$$\rho = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$



transition matrix

$$\mathcal{T}^{\psi|\varphi} = \frac{|\psi\rangle\langle\varphi|}{\langle\varphi|\psi\rangle}$$

Pseudo entropy

Nakata-Takayanagi-Taki-KT-Wei '20

$$S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = -\text{Tr} \left[\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi} \log \mathcal{T}_A^{\psi|\varphi} \right] \quad \mathcal{T}^{\psi|\varphi} = \frac{|\psi\rangle\langle\varphi|}{\langle\varphi|\psi\rangle}$$

where $\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi} = \text{Tr}_{A^c} \mathcal{T}^{\psi|\varphi}$

種々の良い性質

- $S(\mathcal{T}^{\psi|\varphi}) = 0$
- $S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = S(\mathcal{T}_{A^c}^{\psi|\varphi})$ (A^c : complement of A)
- $S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = 0$ ($|\varphi\rangle$ and/or $|\psi\rangle$: product state)
- $S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi})^* = S(\mathcal{T}_A^{\varphi|\psi})$

一般に複素数値を取るため、不等式（強劣加法性など）は成り立たない

- 混合状態への一般化は可能（purificationを使う）
- 特異値を用いて類似の量を定義することも可能（SVD entanglement entropy）

Parzygnat-Takayanagi-Taki-Wei '23

- EEと同様な解釈あり

$$(|\psi\rangle)^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOCC}} (|\text{EPR}\rangle)^{\otimes N} \xrightarrow{\text{Postselect}} (|\varphi\rangle)^{\otimes n}$$

$$S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N}{n}$$

c.f. Entanglement Entropy

$$S(\rho_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N}{n} \quad (\rho_A = \text{Tr}_{A^c} |\psi\rangle\langle\psi|)$$

$$(|\psi\rangle)^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOCC}} (|\text{EPR}\rangle)^{\otimes N}$$

弱値との関係

- Holographic CFT では面積演算子の弱値として振る舞う

$$S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = \frac{\langle \varphi | \frac{\hat{A}}{4G_N} | \psi \rangle}{\langle \varphi | \psi \rangle}$$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\mathcal{O}_{H_i}\rangle$$

$$|\varphi\rangle = \sum_j b_j |\mathcal{O}_{H_j}\rangle$$

➡

$$\frac{\sum_i b_i^* c_i \frac{\text{Area}(\Gamma_A^{H_i})}{4G_N}}{\sum_i b_i^* c_i}$$

States dual to BHs → complex-valued

- 一般に、最大固有値よりも大きな値を取れる (amplification)

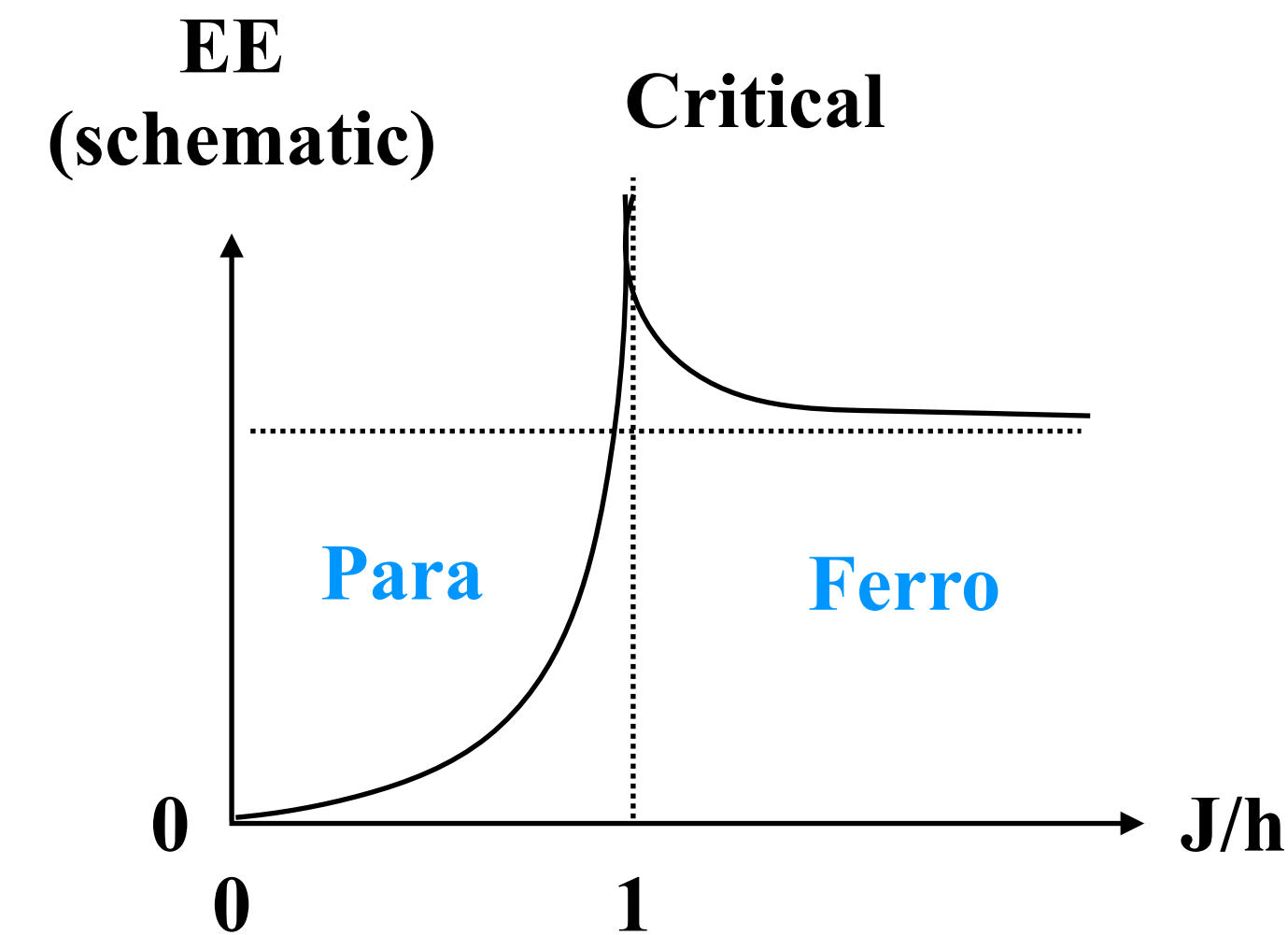
$\log \mathcal{T}$ “Modular Hamiltonian” の右・左固有状態の場合、増幅は起きない
 (直交するエンタングルメント状態の線形和 → qubit や自由場では増幅)

量子多体系における応用（同量子相に属しているかの判定）

例) 横磁場Ising模型の基底状態たち

$$H_{1,2} = -J_{1,2} \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - h_{1,2} \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^x$$

$$\Delta S_{12} \equiv S(\mathcal{T}_A^{1|2}) - S(\rho_A^{(1)})/2 - S(\rho_A^{(2)})/2$$



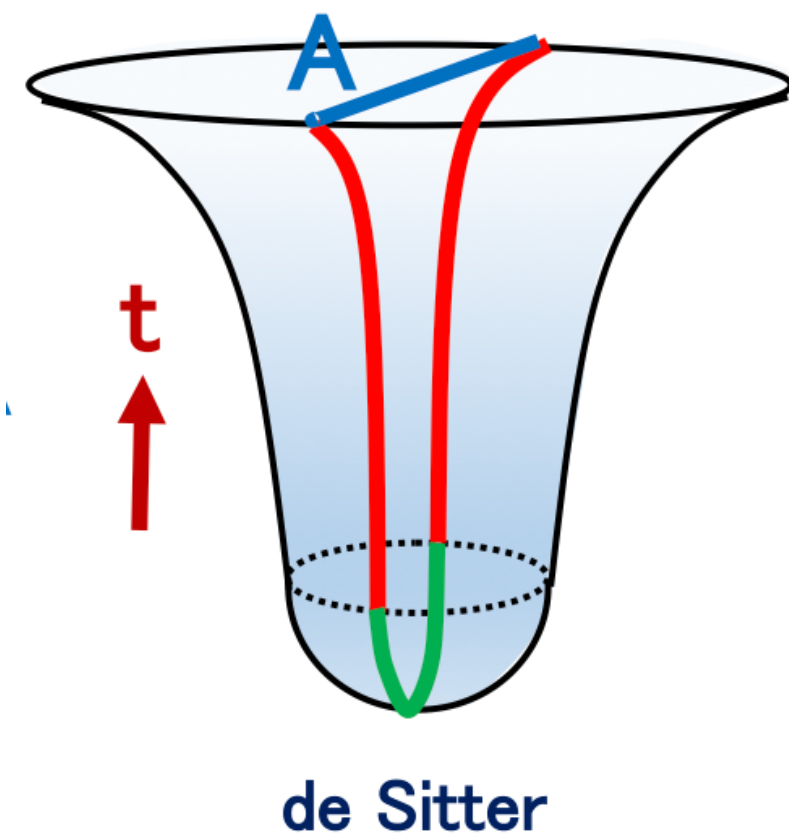
$\Delta S_{12} > 0$ If two states belong to **different phases**

$\Delta S_{12} < 0$ If two states belong to **the same phase**

dS/CFT での HEE 公式は、pseudo entropy として理解できる

Q. PE の虚数部に holographic な解釈はあるか？

Doi-Harper-Mollabashi-Taki-Takayanagi '22



→ **時間方向**の測地線 (dS3/CFT2の場合) の寄与

$$S_A = i \frac{c_{dS}}{3} \log \left(\frac{2}{\epsilon} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{c_{dS}}{6} \pi$$

Timelike 測地線の長さ

Spacelike

Figure taken from 2302.11695

- AdS3/CFT2 双方の計算の適切な解析接続としても理解できる
- 非エルミート系などの固有状態の EE は本質的に pseudo entropy !

このトークで話したこと：

- ・ ホログラフィーを動機として生まれた量子情報量
- ・ その量子重力及び量子多体系への応用

① 混合状態に対する量子情報量

多体量子相関も時空創発には重要, BH microstate への示唆, …

② エントロピーの事後選択過程への一般化

量子相の分類, dS/CFT対応への応用

Discussion

① 混合状態に対する量子情報量

- REは、実は correlation measure になっていない (?!) [Hayden-Lemm-Sorce '23](#)

$$S_R(A : BC) \stackrel{?}{\geq} S_R(A : B) \quad \text{反例: } \rho_{ABC} = \frac{1}{4\beta + 2} \left(\beta(|000\rangle\langle 000| + |110\rangle\langle 110| + |200\rangle\langle 200| + |210\rangle\langle 210|) \right. \\ \left. + |020\rangle\langle 020| + |121\rangle\langle 121| \right).$$

↔ 場の理論では真っ当な振る舞いをする (場の理論で“良い”量子情報量とは?)

② Pseudo entropy

- dS/CFTへの応用のアイディアは通常の場合の理論へも拡張できる (time-like entanglement) [Doi-Harper-Mollabashi-Taki-Takayanagi '22](#)

→ BHの物理への応用 [in progress](#) [See also Miyaji '21, Akal-Kawamoto-Ruan-Takayanagi-Wei '21](#)

このトークで話したこと：

- ・ ホログラフィーを動機として生まれた量子情報量
- ・ その量子重力及び量子多体系への応用

① 混合状態に対する量子情報量

多体量子相関も時空創発には重要, BH microstate への示唆, …

② エントロピーの事後選択過程への一般化

量子相の分類, dS/CFT対応への応用